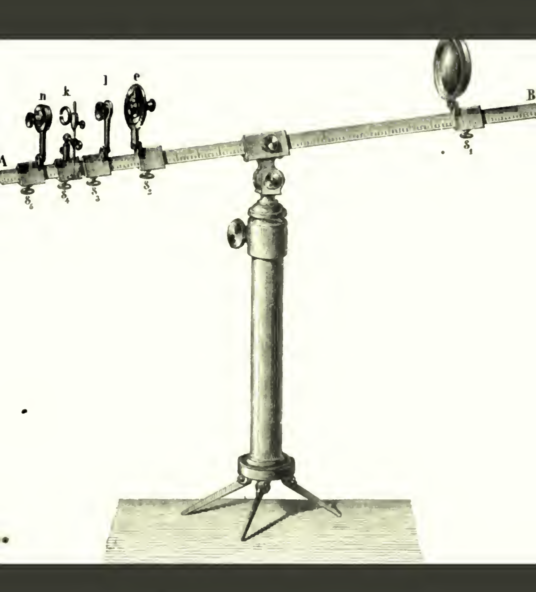
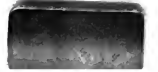


Lehrbuch der Experimentalphysik

Adolph Wüllner


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN



LEHRBUCH

DER

EXPERIMENTALPHYSIK

VON

DR. ADOLPH WÜLLNER,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

ZWEITER BAND.

DIE LEHRE VOM LICHT.

VIERTE VIELFACH UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.



Inhaltsverzeichnis zum zweiten Bande.

Die Lehre vom Licht.

Erster Abschnitt.

Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.

Erstes Kapitel.

Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes.

		Seite
§ 1.	Ausstrahlung und geradlinige Fortpflanzung des Lichtes	3
§ 2.	Geschwindigkeit des Fixsternlichtes; Aberration des Lichtes	8
§ 3.	Geschwindigkeit des Planetenlichtes abgeleitet aus der Beobachtung der Verfinsterung der Jupiter-Trabanten	15
§ 4.	Geschwindigkeit des Lichtes irdischer Lichtquellen. Methode von Fizeau	18
	Messungen von Cornu	22
	Methode von Foucault und Michelson	24
§ 5.	Messung der Lichtstärke; Photometer von Rumford, Ritchie, Bunsen	30
§ 6.	Über die Natur des Lichtes. Emissionshypothese	39
§ 7.	Undulationstheorie	43

Zweites Kapitel.

Die gestörte Ausbreitung des Lichtes, Reflexion und Brechung.

§ 8.	Zurückwerfung des Lichtes an ebenen Flächen	47
§ 9.	Physikalische Erklärung des Reflexionsgesetzes	50
§ 10.	Anwendung der Spiegelung an ebenen Flächen, Heliostat	54
	Heliotrop, Spiegelablesung, rotierender Spiegel, Spiegelsextant	56
§ 11.	Reflexion an krummen Flächen, speciell Kugelflächen	62
	Brennlinien	65
	Bildpunkte erzeugt durch Kugelflächen	69
§ 12.	Kugelförmige Konvexspiegel; Bilder	71
§ 13.	Reflexion an kugelförmigen Hohlspiegeln; Bilder	73
§ 14.	Sphärische Aberration	78
§ 15.	Brechung des Lichtes in ebenen Flächen	81
	Brechungsexponent, relativer, absoluter	84
	Scheinbarer Ort eines Punktes in einem andern Mittel	86
§ 16.	Brechung des Lichtes durch Prismen	89
	Minimum der Ablenkung	92
	Bestimmung der Brechungsexponenten	93
§ 17.	Abbildung von Punkten und Linien durch ein Prisma	95
§ 18.	Zerstreuung des Lichtes	98
§ 19.	Zusammensetzung des weißen Lichtes aus farbigem	102
§ 20.	Anomale Dispersion	106

Seite

§ 21. Ableitung der Brechung und Zerstreuung des Lichtes aus der Undulationstheorie; Theorie von Cauchy, Gleichung von Christoffel . . . 112
§ 22. Neue Dispersionstheorie; Theorie von Helmholtz 119
§ 23. Ableitung der Gleichung für den Brechungsexponenten 123
Abhängigkeit des Brechungsexponenten vom Einfallswinkel 132
§ 24. Erklärung der Brechung und Dispersion des Lichtes nach der Emissionshypothese 136
§ 25. Vergleich beider Theorien; Foucaults Versuch 139
§ 26. Darstellung eines reinen Spektrums 143
Fraunhofersche Linien 146
§ 27. Bestimmung der Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper . 149
Spektrometer 151
§ 28. Brechung und Dispersion in farblos durchsichtigen Medien 156
Prüfung der Dispersionstheorie 159
Vergleichung der Cauchyschen und Helmholtzschen Dispersionsgleichung für farblos durchsichtige Medien 166
§ 29. Brechungsexponenten anomal dispergierender Medien; Prüfung der Theorie 169
§ 30. Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Dichtigkeit der brechenden Körper 176
§ 31. Brechungsexponenten von Mischungen und Lösungen 183
§ 32. Brechungsexponenten der Gase 189
§ 33. Totale Reflexion; Wollastons Bestimmung der Brechungsexponenten 200
Andere Methoden zur Messung der Brechungsexponenten durch totale Reflexion 206
§ 34. Verschiedenheit der von verschiedenen Prismen erzeugten Spektra 210
§ 35. Achromatische und geradsichtige Prismen 213
§ 36. Brechung des Lichtes durch krumme Flächen 217
Hauptbrennpunkte, Abbildung von Punkten, Linien, Flächen . . . 221
§ 37. Brechung in einem Systeme kugelförmiger Flächen 226
§ 38. Vereinfachung der Gleichungen durch Einführung der Hauptpunkte 230
§ 39. Einführung der Knotenpunkte 235
§ 40. Linsen und Linsenbilder; allgemeine Konstruktion zur Bestimmung der Bildpunkte 237
Lage der Hauptpunkte der Linsen 240
Untersuchung der Hauptbrennweiten 241
Lage und Gröfse der Bilder 245
§ 41. Brechung des Lichtes in einem Systeme beliebig vieler kugelförmiger Flächen 250
§ 42. Sphärische Abweichung bei Linsen; aplanatische und kombinierte Linsen 254
§ 43. Chromatische Abweichung; achromatische Linsen 257
§ 44. Beobachtungen nach der Schlierenmethode 261

Drittes Kapitel.

Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen.

§ 45. Absorption des Lichtes in festen und flüssigen Körpern 265
Absorptionsgesetz 269
Abhängigkeit der Absorption von der Dichte der absorbierenden Substanz 271
§ 46. Absorption des Lichtes in Gasen 275
§ 47. Absorption des Lichtes in farbigen Flammen 278
Kirchhoffscher Satz über das Verhältnis von Emission und Absorption 280
§ 48. Emission des Lichtes, Spektralanalyse 284
Bedingungen des Auftretens der charakteristischen Spektra 288

Seite
§ 49. Abhängigkeit der Spektralerscheinungen von der Dicke und Dichte der strahlenden Schicht 291
Die verschiedenen Spektra der glühenden Gase, Bandenspektrum, Linienspektrum 295
§ 50. Abhängigkeit der Spektra der Gase von der Temperatur 300
Kontinuierliche Spektra der Gase 306
§ 51. Theorie der Absorption 308
§ 52. Fluorescenz 314
§ 53. Prismatische Untersuchung der Fluorescenz 319
§ 54. Versuche einer Theorie der Fluorescenz 329
Kritik der Theorie von Lommel 331
§ 55. Phosphorescenz 334
§ 56. Chemische Wirkung des Lichtes 341

Viertes Kapitel.

Die Wahrnehmung des Lichtes.

§ 57. Das menschliche Auge 353
§ 58. Gang der Lichtstrahlen im Auge 356
Reduciertes Auge 360
§ 59. Sehen in verschiedener Entfernung, Accommodation 362
§ 60. Monochromatische und chromatische Abweichung; Irradiation 366
§ 61. Von den Gesichtsempfindungen 370
§ 62. Von den Gesichtswahrnehmungen 374
Sehen mit zwei Augen, Stereoskopie 376
§ 63. Das Mikroskop 379
§ 64. Das Fernrohr 384

Zweiter Abschnitt.

Theoretische Optik.

Erstes Kapitel.

Interferenz und Beugung des Lichtes.

§ 65. Fresnels Spiegelversuch 389
§ 66. Andere Methoden die Interferenzstreifen hervorzubringen 403
Das Doppelprisma, Fizeaus Methode, Billets Halblinsen 405
§ 67. Farben dünner Blättchen; Newtons Farbenringe 407
Theorie der Farben dünner Blättchen im reflektierten Licht 411
Theorie der Farben im durchgelassenen Licht 420
§ 68. Farben dicker Platten; Interferentialrefraktoren 423
§ 69. Interferenz bei großen Gangunterschieden 430
Methode von Fizeau 431
Talbotsche Streifen 435
§ 70. Wredes Theorie der Absorption des Lichtes 436
§ 71. Beugung des Lichtes 440
§ 72. Fresnelsche Beugungserscheinungen 444
§ 73. Fraunhofersche Beugungserscheinungen 450
Theorie der Beugung durch einen Spalt 453
§ 74. Beugungserscheinungen durch mehrere Öffnungen 459
§ 75. Beugungsspektra 467
§ 76. Beugungserscheinungen bei Anwendung durchsichtiger Schirme 469
§ 77. Messung der Wellenlängen 476

Zweites Kapitel.

Die Polarisation des Lichtes.

§ 78. Polarisation des Lichtes 481
Haidingersche Büschel 485



		Seite
§ 79.	Erklärung der Polarisation; Querschwingungen	487
§ 80.	Experimenteller Nachweis der Querschwingungen	489
§ 81.	Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung	495
§ 82.	Theorie der Reflexion des polarisierten Lichtes nach Fresnel und Neumann	498
	Gültigkeit der Fresnelschen Theorie für nicht absorbierende Medien	505
	Brechung des polarisierten Lichtes	507
§ 83.	Folgerungen aus der Theorie der Reflexion an durchsichtigen Medien	510
§ 84.	Totale Reflexion; elliptische und cirkulare Polarisation	515
	Eindringen des Lichtes in das dünnere Medium bei totaler Reflexion	520
	Babinets Kompensator	524
	Untersuchung des total reflektierten Lichtes	529
§ 85.	Reflexion an Metallen und stark absorbierenden Medien; Theorie von Cauchy nach der Beerschen Entwicklung	531
	Theorie von Ketteler	540
§ 86.	Beobachtungen über die Reflexion an Metallen	546
	Brechung des Lichtes in Metallen	557
§ 87.	Elliptische Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion	559
§ 88.	Die Newtonschen Farbenringe im polarisierten Licht	565

Drittes Kapitel.

Von der Doppelbrechung des Lichtes.

§ 89.	Doppelbrechung des Lichtes in Kalkspat	567
	Huyghens Konstruktion der gebrochenen Welle	570
	Strahl und Wellennormale	573
§ 90.	Betrachtung einzelner Fälle	575
§ 91.	Einaxige Krystalle	580
§ 92.	Physikalische Erklärung der Doppelbrechung; Theorie von Fresnel	583
§ 93.	Anwendung einaxiger Krystalle als Polarisationsapparate	592
	Achromatisiertes Kalkspatprisma, Nicolsches Prisma, Foucaultsches Prisma, Turmalinzange	594
§ 94.	Rochons Mikrometer	596
§ 95.	Anwendung einaxiger Krystalle zur Photometrie; Zöllners Photometer	598
	Glans Spektrophotometer	602
§ 96.	Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen	604
	Elasticitätsfläche in zweiaxigen Krystallen	606
§ 97.	Wellenfläche in zweiaxigen Krystallen	612
	Bestimmung der Axenwinkel und der Lage der sekundären Axen	615
§ 98.	Konische Refraktion, innere und äufsere	620
§ 99.	Optische Konstanten zweiaxiger Krystalle	624

Viertes Kapitel.

Interferenz des polarisierten Lichtes.

§ 100.	Fresnel-Aragos Gesetze der Interferenz des polarisierten Lichtes	626
§ 101.	Farbenerscheinungen bei dem Durchgange polarisierten Lichtes durch Krystallplatten	629
§ 102.	Farbenringe in Platten, welche senkrecht zur Axe aus einaxigen Krystallen geschnitten sind	633
§ 103.	Erscheinungen in Blättchen und Platten, welche parallel der Axe aus einaxigen Krystallen geschnitten sind	640
	Isochromatische Kurven im konvergenten Licht	646
§ 104.	Gekreuzte Platten	650
	Savarts Polariskop	653
	Wilds Photometer	655

Seite
§ 105. Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen 656
§ 106. Bestimmung optischer Konstanten; Erkennung des Charakters der Doppelbrechung in einaxigen Krystallen 661
Bestimmung der Axen in zweiaxigen Krystallen 665
Erkennung des Charakters der Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen 666
§ 107. Doppelbrechung in gepreſsten und gekühlten Gläsern 668
§ 108. Erscheinungen in senkrecht zur Axe geschnittenen Bergkrystallplatten, Drehung der Polarisationsebene 670
Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge 672
Form der Ringe in Bergkrystallplatten 679
§ 109. Ableitung der Erscheinungen im Bergkrystall; Cirkularpolarisation 680
§ 110. Drehung der Polarisationsebene in andern Körpern 686
Molekulares Drehungsvermögen 689
§ 111. Saccharimetrie 694
Saccharimeter von Mitscherlich, von Wild 696
Saccharimeter von Laurent, Halbschattenapparate 698
Saccharimeter von Soleil 700

Berichtigungen zum zweiten Bande.

Seite 86 Zeile 22 von o. lies sehen statt suchen.
„ 147 „ 3 „ u. „ 67 „ 61.
„ 161 „ 6 „ o. „

$$\lambda^2 \left(\frac{n_0}{n^2} - 1\right)^2 = \mu^2 \left(\frac{n_0^2}{o^2} - 1\right)^2 \text{ statt } \lambda^2 \left(\frac{n_0^2}{n^2} - 1\right)^2 = \mu^2 \left(\frac{n_0^2}{o^2} - 1\right)^2.$$

Seite 170 in der Tabelle, Spalte „Concentr.“ die 4. Zahl lies 1,385 66 statt 1,285 66.
„ 173 Zeile 6 von o. lies λ_{m_2} statt λ_m.
„ 252 „ 8 „ o. „ $a_2 =$ statt $a =$
„ 259 „ 19 „ o. „ in der zweiten Klammer

$$\frac{n_v'' - 1}{n_v'' r''' r^{IV}} \text{ statt } \frac{n_v'' - 1}{n_v'' r'' r^{IV}}.$$

Seite 359 Zeile 1 von o. nach Hauptpunktes schalte ein: „vom zweiten Hauptpunkte“.
Seite 461 Zeile 9 von u. lies Fig. 140 statt Fig. 141.
„ 467 „ 5 „ o. „ eben statt aber.
„ 523 „ 20 „ o. „ $1 + n^2 = n\sqrt{8}$ statt $1 + n^2 = \sqrt{8}$.
„ 545 „ 13 „ o. „ $v \sin(\varphi - \Delta_1)$ statt $v \sin(\varphi - \Delta_2)$.
„ 608 „ 11 „ o. „ § 89 statt § 83.
„ 651 „ 4 „ o. „ $\sin(\xi - (\delta_o + \delta_e'))$ statt $\sin(\xi - (\delta_o + \delta_e))$.

Zweiter Teil.

Die Lehre vom Licht.

Erster Abschnitt.

Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.

Erstes Kapitel.

Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes.

§ 1.

Ausstrahlung und geradlinige Fortpflanzung des Lichtes. Von der uns umgebenden Aufsenwelt erhalten wir aufser durch das Gefühl, beim Betasten der Körper, oder durch das Gehör, wenn dieselben sich in einer hinlänglich raschen schwingenden Bewegung befinden, in viel ausgedehnterer Weise Kenntnis durch das Gesichtsorgan, indem wir die uns umgebenden Körper sehen.

Um die Körper aber durch das Gesicht wahrnehmen zu können, bedarf es der Anwesenheit des Lichtes, indem wir im Dunkeln Körper, von deren Anwesenheit unser Gefühl uns überzeugt, nicht sehen können.

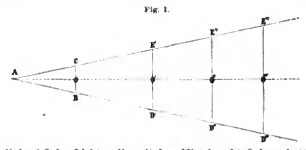
In dieser Beziehung unterscheiden wir die Körper sofort in zwei Klassen; die eine derselben ist immerfort mit jenem Etwas, das wir Licht nennen, verbunden; die zu ihr gehörigen Körper sind durch sich selbst nicht nur sichthar, sondern können allein durch ihre Anwesenheit auch andere Körper sichtbar machen. Solche Körper nennen wir leuchtende Körper, es sind vorzugsweise die Sonne, die Sterne und die glühenden und brennenden Körper. Die leuchtenden Körper unterscheiden wir in doppelter Beziehung von einander, einmal, indem sie unserem Auge den Eindruck einer verschiedenen Helligkeit machen, ferner indem sie ein verschiedenartiges Licht zeigen, welches wir als verschiedene Farben bezeichnen. Die Körper der zweiten Klasse sind nicht für sich sichtbar, es sind die nichtleuchtenden dunkeln Körper, sie werden jedoch sichtbar, ja sie werden leuchtend, wenn sie von einem selbstleuchtenden Körper beleuchtet werden, und dann unterscheiden wir an ihnen ebenso verschiedene Helligkeit und verschiedene Farbe. Wenn wir auf ein weifses Blatt Papier in einem dunkeln Zimmer ein Bündel Sonnenstrahlen fallen lassen, so wird es nicht nur selbst sichtbar, sondern vermag auch die sonst im Zimmer enthaltenen Gegenstände sichtbar zu machen, es vermag sie zu beleuchten. Die Astronomie lehrt uns, dafs die Planeten und der Mond an sich dunkle Körper sind, unter Einwirkung des Sonnenlichtes werden sie in den Stand gesetzt, selbst wieder andere Gegenstände sichtbar zu machen.

Aus allem diesem folgt, dafs eine Verbindung zwischen den Körpern, die wir sehen, und unserem Auge existieren mufs, die sich aber in gleicher Weise zwischen den leuchtenden und beleuchteten Körpern herstellt; diese Verbindung ist das Licht. Wir können uns ferner leicht überzeugen, dafs diese Verbindung von den leuchtenden Körpern ausgeht, oder dafs das Licht von ihnen ausstrahlt. Denn hält man z. B. zwischen die Sonne und unser Auge einen Schirm, so wird uns dadurch der Anblick der Sonne entzogen; oder hält man einen solchen Schirm zwischen ein Licht und ein weifses Blatt, so wird letzterem das Licht entzogen, es wird beschattet und nicht leuchtend.

Untersuchen wir die Gestalt des Schattens auf dem weifsen Blatt, so sehen wir, dafs dieselbe bestimmt wird durch die Gestalt des schattengebenden Körpers. Ist der schattengebende Körper gegen das Licht sehr grofs, so wird der Rand des Schattens bestimmt durch gerade Linien, welche wir von dem Lichte aus an den Grenzen des schattengebenden Körpers vorüber auf das weifse Blatt ziehen. Denn ist z. B. der schattengebende Körper ein Kreis, so hat auch der Schatten eine kreisförmige Begrenzung, in welcher Entfernung von dem schattengebenden Körper wir auch denselben durch das weifse Blatt auffangen. Indes hat der Schattenkreis in verschiedenen Entfernungen eine verschiedene Gröfse, sein Radius ist bei konstantem Abstande des schattengebenden Körpers von der Lichtquelle proportional dem Abstande des Papierschirmes von der Lichtquelle.

Ist demnach A ein kleiner leuchtender Körper und BC ein Durchschnitt des schattengebenden Kreises, den wir uns senkrecht auf die Ver-

Fig. 1.



bindungslinie AO der Lichtquelle mit dem Mittelpunkt O des schattengebenden Kreises gehalten denken, so sind in den verschiedenen Abständen AO des mit dem Schirme parallel gehaltenen Blattes die Radien der Schattenkreise gleich $O'E'$, $O''E''$ ... und es ist

$$O'''E''' : O''E'' : O'E' = AO''' : AO'' : AO'.$$

Daraus folgt dann, dafs die Dreiecke $AO'E'$, $AO''E''$ .. ähnlich sind, oder dafs die Punkte A, E', E'' .. in einer geraden Linie liegen

Wenn ferner bei konstantem Abstande des weifsen Blattes, auf dem wir den Schatten betrachten, von der Lichtquelle der Schirm BC in verschiedenen Abständen von der Lichtquelle gehalten wird, so findet man, dafs der Radius $O'E'$ des Schattenkreises auch dann eine immer andere Gröfse erhält, und zwar, dafs

$$O'E' : OC = AO' : AO,$$

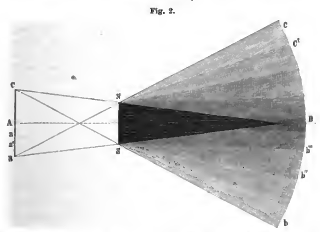
oder dafs der Radius des Schattenkreises zu dem des schattengebenden sich verhält wie der Ahstand des weifsen Blattes zu dem des schattengehenden Kreises von der Lichtquelle.

Daraus ergiht sich, dafs ebenso die Punkte C nnd E', somit alle Punkte C, E', E'' .. auf einer geraden Linie liegen.

Diejenigen Punkte, welche im Innern des Kegels liegen, der durch Umdrehung der beiden von A aus durch C und B gezogenen geraden Linien nm AO als Axe erzeugt ist, sind also im Schatten, sie erhalten kein Licht, während die aufserhalb dieses Kegels liegenden Punkte helenchtet werden. Alle Punkte demnach, welche so liegen, dafs eine gerade Linie von ihnen zum leuchtenden Punkte gezogen den Schirm CB trifft, werden nicht helenchtet, diejenigen aber, für welche eine solche Gerade nicht den schattengebenden Körper trifft, sind belenchtet. Damit also ein Punkt belenchtet werde, ist notwendig, dafs eine gerade Linie von ihm aus zur Lichtquelle gezogen auf ihrem Wege keinen schattengehenden Körper finde, es folgt somit, dafs das Licht sich von der Quelle aus in geraden Linien aushreitet.

Ganz dasselhe zeigt eine Betrachtnng des Schattens, den ein solcher Kreis wirft, wenn die Lichtqnelle A eine gröfsere Ausdehnung hat. Nehmen wir als Lichtqnelle z. B. eine glühende kreisförmige Scheibe nnd als schattengebenden Körper einen andern kreisförmigen Schirm, so zeigt ein auffangender hinter den schattengehenden gehaltener Schirm in dem Schatten sehr verschiedene Nüancen der Beleuchtnng. Zunächst in der Mitte des Schattens zeigt sich ein ganz dunkler Fleck, dessen Breite durch den Kegel CDB (Fig. 2) hestimmt ist, dessen Seiten von den durch die Grenzen SS

Fig. 2.



gezogenen Geraden gehildet werden; in diesen Raum fällt gar kein von CB ansstrahlendes Licht; dieser Kegel ist der Kernschatten; an diesen grenzt von innen nach aufsen immer heller werdend der Halhschatten, dessen Grenzen durch die Geraden CSb und BSc hestimmt sind. Alle Punkte aufserhalb dieses Raumes erhalten Licht von allen leuchtenden Punkten der Scheibe BC, alle Punkte innerhalb desselben nur von einem Teile

derselben. Sie sind daher weder vollständig hell noch vollständig dunkel. Innerhalb des Raumes $b''' SD$ fällt Licht von den Punkten des leuchtenden Körpers zwischen a' und B, innerhalb $b''' Sb''$ tritt dazu nach und nach die Wirkung der zwischen a' und a gelegenen Punkte, woraus unmittelbar folgt, dafs, wie es die Erfahrung zeigt, ein stetiges Wachsen der Helligkeit von der Grenze des Kernschattens bis zur Grenze des Schattens eintreten mufs.

Durch das Vorhandensein der Halbschatten erklärt sich unmittelbar die geringe Schärfe, mit der die meisten Schatten in einiger Entfernung von den schattenwerfenden Körpern begrenzt sind. Alle Lichtquellen haben eine mehr oder weniger grofse Ausdehnung, die Schatten, welche von ihnen geworfen werden, sind daher stets von Halbschatten begrenzt, welche, je weiter man sich von den schattengebenden Körpern entfernt, um so breiter werden und daher einen ganz allmählichen Übergang aus dem Dunkel des Kernschattens zur Helle der vollen Beleuchtung vermitteln.

Wir kennen noch eine Reihe anderer Erscheinungen, welche uns den Beweis einer geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes liefern. Wenn man drei durchbohrte Metallscheiben so hinter einander hält, dafs die drei Löcher derselben in einer geraden Linie liegen, so kann man eine hinter denselben liegende Lichtquelle wahrnehmen, liegen die Löcher aber nicht in einer Geraden, so verhindern die Scheiben die Sichtbarkeit des Lichtes. Ebenso kann man durch eine gerade Röhre hindurchsehen, durch eine gebogene nicht.

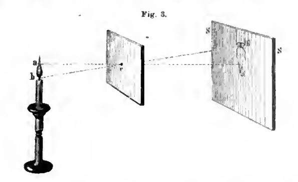
Läfst man die Sonne durch eine wie immer gestaltete kleine Öffnung hindurchscheinen und fängt die Sonnenstrahlen auf einem hinter der Öffnung befindlichen Schirme auf, so sieht man auf dem Schirme nicht einen hellen Fleck von der Gestalt der Öffnung, sondern immer einen hellen runden Fleck, dessen Gröfse sich ändert mit dem Abstande des Schirmes von der Öffnung. Eine Messung des Durchmessers dieses runden Fleckes ergibt aber, dafs die von der engen Öffnung nach den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Linien immer denselben Winkel mit einander bilden, der gleich ist dem scheinbaren Durchmesser der Sonne. Der Grund dieser Erscheinung liegt wieder in der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes, und umgekehrt ist diese Erscheinung ein neuer Beweis für dieselbe. Von jedem Punkte der Sonne geht Licht durch die Öffnung hindurch und entwirft auf dem dahinter gehaltenen Schirme ein kleines Bildchen der Öffnung. Da nun alle Punkte des kreisförmigen Sonnenrandes solche kleine Bildchen erzeugen, so liegen diese in einem Kreise geordnet; und da sich die einzelnen Bilder unendlich nahe liegen und zum Teil in einander greifen, so bilden diese einen zusammenhängenden hellen Kreis, dessen Mitte durch die hellen Bilder, welche von den mittlern Punkten der leuchtenden Sonne erzeugt werden, ausgefüllt wird. Auf dem Schirme entsteht also ein leuchtendes Bild der Sonne. Dafs dieses richtig ist, davon überzeugt man sich leicht zur Zeit einer Sonnenfinsternis, denn stellt man den Versuch dann an, so erscheint auf dem Schirme nicht ein rundes, sondern ein sichelförmiges Bild der Sonne, entsprechend dem dann leuchtenden Teile der Sonne.

Um diese Erscheinung wahrzunehmen, bedarf es nicht einmal eines besondern Apparates, unter Bäumen haben die durch die Lücken der Baumblätter fallenden Lichter zu gewöhnlichen Zeiten eine kreisförmige Gestalt,

zur Zeit einer Sonnenfinsternis aber zeigen sie eine sichelförmige Gestalt, und das um so deutlicher, ein je gröfserer Teil der Sonne verfinstert ist.

Wenn man in eine undurchsichtige Scheibe ein sehr kleines Loch macht, vor dasselbe eine Kerzenflamme und hinter dasselbe ein Blatt Papier stellt, so erhält man auf dem Papiere ein umgekehrtes Bild der Flamme (Fig. 3);

Fig. 3.



auch dieser, eigentlich dem vorigen ganz gleiche Versuch liefert einen Beweis für die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes. Von jedem Punkte der Flamme geht Licht durch die Öffnung c des Schirmes, der Punkt a der Flammenspitze erzeugt ein kleines Bildchen der Öffnung c auf dem dahinter liegenden Blatte bei a', der Punkt b bei b', die einzelnen Bildchen der Öffnung c sind auf dem Schirme SS ganz symmetrisch den leuchtenden Punkten der Flamme gruppiert, nur umgekehrt, so dafs die den obern Punkten a entsprechenden leuchtenden Bilder der Öffnung unten bei a', die den untern Punkten b entsprechenden Bilder oben bei b' erscheinen, dort wo eine von a oder b durch die Öffnung c gezogene Gerade den Schirm SS trifft. Da die von den verschiedenen Punkten der Flamme durch c nach SS gezogenen Linien sich in c schneiden, so sieht man, dafs die den einzelnen Punkten der Flamme entsprechenden Bilder der Öffnung umgekehrt wie jene liegen müssen.

Eine sehr hübsche Abänderung dieses Versuches, welche zugleich einen neuen Beweis liefert, dafs ein an sich dunkeler aber beleuchteter Körper durch das von ihm ausgehende Licht sichtbar wird, ist folgende. Macht man in den Fensterladen eines ganz dunkeln Zimmers ein kleines Loch und stellt demselben einen weifsen Schirm gegenüber, so erhält man auf demselben ein genaues Abbild aller dem Fenster gegenüber befindlichen Gegenstände, welches in derselben Weise entsteht wie das Bild der Sonne und der Lichtflamme. Jeder dem Fenster gegenüber befindliche leuchtende oder beleuchtete Punkt sendet in seiner Verbindungslinie mit der Öffnung Licht aus und erzeugt an dem Punkte, wo die Linie den Schirm trifft, ein Bildchen der Öffnung. Ist die Öffnung hinreichend klein, so fallen die einzelnen Bilder der Öffnung unmittelbar neben einander und erzeugen so ein Bild der Gegenstände, von deren sämtlichen Punkten Licht durch die Öffnung auf den Schirm fällt. Ist aber die Öffnung grofs, so fallen die einzelnen von den verschiedenen leuchtenden Punkten beleuchteten Flächenstücke des Schirmes, die einzelnen Bilder der Öffnung nicht

mehr neben, sondern über einander und dadurch wird das Bild der Gegenstände aufserhalb auf dem Schirme verwaschen und undeutlich; und wird die Öffnung endlich sehr grofs, wie z. B. ein Fenster, so entsteht gar kein Bild mehr, sondern nur eine beleuchtete Fläche, deren Grenzen den Grenzen der Öffnung ähnlich sind.

Aus allen diesen Erfahrungen schliefsen wir, dafs das Licht, jenes Etwas, das uns den gesehenen Körper sichtbar macht, von dem leuchtenden Körper ausgeht und zwar in geraden Linien. Letzteres ist uns auch so geläufig, dafs wir alles, was wir sehen, an das Ende jener Richtung verlegen, in welcher das Licht in unser Auge dringt. Wir werden einige Vorgänge kennen lernen, bei denen das Licht infolge von Hindernissen, auf welche es bei seiner Ausbreitung stöfst, die gerade Ausbreitung verläfst und in gebrochener Linie sich fortpflanzt. Nichtsdestoweniger verlegen wir die Lichtquelle in unserem Urteile an das Ende jener Geraden, in welcher das Licht beim Eintritt in unser Auge sich fortpflanzte und glauben somit den leuchtenden Körper an einem Orte zu sehen, an dem er sich in der That nicht befindet.

Man sagt daher allgemein, das Licht strahlt in geraden Linien nach allen Richtungen von allen Punkten eines leuchtenden Körpers aus und nennt die Geraden, in denen das Licht sich ausbreitet, Lichtstrahlen.

§ 2.

Geschwindigkeit des Fixsternlichtes. Nach dem Vorigen sind wir genötigt anzunehmen, dafs das Licht von den leuchtenden Körpern sich ausbreitet; es fragt sich nun, braucht es zu dieser Ausbreitung eine gewisse Zeit oder entsteht das Licht auf seiner ganzen Bahn momentan. Dafs, wenn das Licht eine Zeit braucht, um sich fortzupflanzen, diese nur sehr klein sei, ja für irdische Abstände fast unmefsbar klein, das zeigt uns die Erfahrung, indem man gleichzeitig in den verschiedensten Entfernungen ein aufflammendes Licht wahrnimmt. Mit Hülfe astronomischer Beobachtungen und in neuester Zeit durch sehr sinnreiche physikalische Versuche hat man jedoch nachgewiesen, dafs das Licht nicht momentan sich fortpflanzt, und dafs das Licht, welcher Quelle es auch entstammt, ob es direkt von einem selbstleuchtenden Körper ausgeht oder ob es von einem beleuchteten Körper ausstrahlt, dafs das Licht der Sterne wie das irdischen Lichtern entstammende sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt.

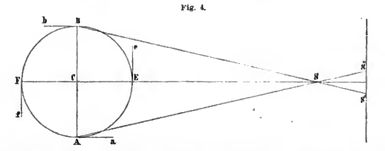
Dafs das Licht der selbstleuchtenden Fixsterne Zeit braucht, um sich fortzupflanzen, zeigt das von Bradley[1]) im Jahre 1727 zuerst beobachtete Phänomen der Aberration des Lichtes.

Um die Entfernung der Fixsterne zu bestimmen, stellte der englische Astronom Bradley Jahre lang fortgesetzte Beobachtungen an, um zu untersuchen, ob sich bei den Fixsternen eine Parallaxe zeige, das heifst, eine Änderung des Ortes am Himmel, wenn sie von dem einen oder dem andern Ende eines Durchmessers der Erdbahn gesehen werden. Stellt der um den Mittelpunkt *C* Fig. 4 beschriebene Kreis die nur wenig von der Gestalt

[1]) *Bradley*, Philosophical Transactions abridged etc. vol. VI. p. 168.

eines Kreises abweichende Bahn der Erde dar, und ist S ein in der Ebene der Erdbahn liegender Fixstern, so ist der Winkel, den die von den Enden A und B des zu CS senkrechten Durchmessers nach S gezogenen Linien

Fig. 4.



mit einander bilden, die Parallaxe des Sternes S. Hat der Abstand CS einen mit der Länge des Durchmessers vergleichbaren Wert, so ist der Winkel ASB meſsbar und wird sich dadurch zu erkennen geben, daſs von B aus gesehen der Stern nach S', von A aus gesehen nach S'' verschoben erscheint. Der Winkel, den die Linien BS und AS mit einander bilden, wird immer kleiner, je weiter der Punkt S von C entfernt ist, und ist die Entfernung CS gegen AB unmeſsbar groſs, so werden BS und AS für uns parallel sein, da dann der Punkt S in einer für uns unendlichen Entfernung liegt. Der Punkt S wird dann immer an derselben Stelle des Himmelsgewölbes erscheinen.

Wenn der Stern S nicht in der Ebene der Ekliptik, sondern an einer andern Stelle des Himmels sich befindet, so würde eine solche Parallaxe sich nicht in einer einfachen Verschiebung des Sternes in der Richtung S' S'' zeigen, sondern dann würde der Stern am Himmel eine kleine geschlossene Bahn zu beschreiben scheinen. Befände der Stern in gleichem Abstande CS sich gerade im Pole der Ekliptik senkrecht über C, so würde der Stern, wenn die Erde in A sich befände, um eine gewiſse Gröſse gegen B hin, wenn die Erde in E wäre, um dieselhe Gröſse gegen F hin, wäre sie in B, um eben die Gröſse gegen A hin und in F gegen E hin verschoben erscheinen, der Stern würde um seinen wahren Ort einen kleinen Kreis beschreiben, dessen Durchmesser gleich wäre dem Winkel, den die von entgegengesetzten Punkten eines Durchmessers nach S gezogenen Linien mit einander bilden.

Befände sich der Stern S in irgend einem andern Punkte der mit CS um C beschriebenen Kugel, so würde seine scheinbare Bahn eine Ellipse sein, deren groſse Axe immer denselben Wert, den des Kreisdurchmessers, oder den der linearen Verschiebung S' S'' hätte, deren kleine aber verschieden wäre, je nach der Erhebung des Sternes über der Ekliptik. Läge der Stern z. B. in dem durch FS senkrecht zu $ABEF$ geführten Durchschnitte der Himmelskugel, so würde die zu AB parallele Axe denselben Wert haben wie die Verschiebung S' S'' des in der Ekliptik liegenden Sternes, da der Winkel BSA dann denselben Wert beibehielte; der Winkel ESF würde aber ein anderer sein und zwar würde er mit der Erhebung des Sternes über die Ekliptik stetig zunehmen von Null, wenn der Stern

in der Ebene ASB läge, bis zum Winkel ASB, wenn der Stern sich senkrecht über C befände.

Für alle übrigen Punkte gilt dasselbe, nur haben für diese die Axen der Ellipsen eine andere Lage.

Bradley beobachtete solche Ortsänderungen der Fixsterne in der That, indes zwei Umstände liefsen erkennen, dafs diese Verschiebung nicht einer Parallaxe derselben zuzuschreiben sei.

Denn erstens zeigte sich, dafs für alle in der Ebene der Ekliptik liegenden Sterne die Verschiebung genau dieselbe Gröfse von 40,89 Sekunden besitzt, und dafs ebenso die grofse Axe der Ellipsen für alle aufserhalb der Ekliptik liegenden Fixsterne, welche der Ebene der Erdbahn parallel ist, genau denselben Wert von 40,89 Sekunden besitzt. Die zur grofsen senkrechte kleine Axe der Ellipse hat für die verschiedenen Sterne einen verschiedenen Wert, der Wert derselben hängt aber nur von der Erhebung des Sternes über die Ekliptik ab, allen in gleicher Höhe über derselben befindlichen Sternen entspricht eine gleiche kleine Axe. Alle Fixsterne schliefslich, welche sich nahe dem Pole der Ekliptik befinden, beschreiben nahezu einen Kreis, dessen Durchmesser für alle derselbe und zwar gleich ist der Verschiebung $S' S''$ der in der Ekliptik liegenden Sterne.

Diese Gleichheit der Bahnen würde unter Annahme, dafs die Verschiebung eine parallaktische wäre, fordern, dafs sämtliche Fixsterne in gleichem Abstande von C auf einer mit CS um C beschriebenen Kugelfläche lägen, denn nur für solche Sterne ist, wie wir sahen, die Parallaxe gleich; ist aber der Abstand CS verschieden, so mufs auch die Parallaxe verschieden sein.

Aber selbst wenn man diese durchaus unwahrscheinliche Hypothese, dafs alle Fixsterne sich in gleichen Abständen von der Sonne befänden, zugeben wollte, so läfst doch eine genauere Betrachtung der scheinbaren Sternbewegung es nicht zu, als Ursache derselben eine Parallaxe anzusehen.

Denn in dem Falle mufs nach dem Vorigen der Stern S nach S'' verschoben erscheinen, wenn sich die Erde in A befindet, in seinem wahren Orte, wenn sie bei E oder F ist und schliefslich nach S' verschoben, wenn sich die Erde bei B befindet. Allgemein müfste der Stern in der Richtung eines Durchmessers verschoben erscheinen nach dem andern Ende desselben hin, wenn die Erde sich an dem einen Ende desselben befände.

Das ist jedoch nicht der Fall, sondern die Sterne erscheinen immer in einer zu dem Durchmesser, an dessen Ende die Erde sich gerade befindet, geneigten Richtung verschoben und zwar nach der Richtung hin, nach welcher sich die Erde gerade bewegt. Nehmen wir an, die Erde durchlaufe ihre Bahn in der Richtung $AEBF$, so erscheint der Stern in seinem wahren Orte in S, sowohl wenn sich die Erde gerade in A befindet, als auch wenn sie gerade das Ende B des Radius passiert, also sich nach Bb bewegt. Dagegen ist der Stern am meisten nach links, nach S'' hin verschoben, wenn die Erde sich gerade in E befindet und sich nach Ee hin bewegt. Der Stern ist dagegen nach entgegengesetzter Richtung nach SS' verschoben, wenn die Erde bei F in der Richtung Ff sich bewegt.

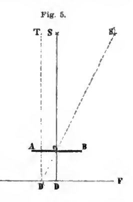
Die scheinbare Bewegung der Fixsterne findet also so statt, dafs die Sterne immer nach der Richtung am meisten verschoben zu sein scheinen,

nach der hin sich die Erde bewegt. Bewegt sich daher bei einem in der Ekliptik liegenden Sterne die Erde gegen den Stern hin oder von ihm fort, so findet eine Verschiebung des Sternes gar nicht statt. Die Verschiebung ist am gröfsten, wenn die Verbindungslinie des Sternes mit der Erde senkrecht ist zur augenblicklichen Bewegung der Erde und zwar nach der Seite hin, nach der die Erde sich bewegt.

Darans erkannte Bradley sofort, dafs diese Erscheinung nicht Folge einer Parallaxe der Fixsterne sei, und er schon leitete diese Erscheinung aus der vereinigten Wirkung der Fortpflanzung des Lichtes und der Bewegung der Erde ab. Weil das Licht sich nicht momentan fortpflanzt und weil zugleich die Erde sich bewegt, mufs eine Verschiebung der Lichtquelle nach der Seite, nach welcher hin sich die Erde bewegt, stattfinden.

Um diese Erscheinung zu erklären, mufs man sich erinnern, dafs wir einen leuchtenden Punkt immer in der Richtung wahrnehmen, in der das Licht zuletzt in unser Auge zu kommen scheint. Ist nun AB eine Ebene, in der bei e eine kleine Öffnung ist (Fig. 5), durch welche das von einem Sterne S herkommende Licht hindurchtritt, so wird, wenn die Ebenen AB und EF sich nicht bewegen, das bei e durchtretende Licht, das sich in der Richtung Se fortpflanzt, den gerade unter e in der Richtung Se liegenden Punkt D treffen. Ein Beobachter bei D wird also den Stern in der Richtung DeS oder gerade senkrecht über D sehen. Dasselbe wird auch dann der Fall sein, wenn sich die beiden Ebenen in der Richtung Se dem Sterne nähern oder sich von ihm entfernen, ein Beobachter bei D wird den Stern immer in der Richtung SeD sehen.

Fig. 5.



Wenn sich aber gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit die Ebenen AB und EF nach B respektive F hin bewegen, so wird für einen auf EF befindlichen Beobachter diese Bewegung unmerklich sein, und er sich in Ruhe zu befinden glauben. Nehmen wir nun an, dafs die beiden Ebenen AB und EF sich so rasch bewegen, dafs in der Zeit, in welcher sich das Licht durch die Strecke eD fortpflanzt, der Punkt D' an die Stelle gerückt sei, in welcher vorher D war, so wird das in dem Augenblicke, als D sich in der Richtung Se befand, durch e hindurchgegangene Licht nicht den Punkt D treffen, der dann nach der Rechten hin verschoben ist, sondern den Punkt D'. Dadurch also, dafs die Kombination $ABFE$ sich nach rechts hin bewegte, das Licht aber an dieser Bewegung keinen Teil hatte, befand sich das Licht nach und nach auf der Linie eD', oder infolge der beiden Bewegungen der Ebenen und des Lichtes ist die Bahn des letztern in Bezug auf die Ebenen AB und EF die Linie eD'. Der in D' befindliche Beobachter, für den die Bewegung der Ebene EF unmerklich ist, überträgt die eigene Bewegung auf das Licht, glaubt, dafs der Punkt D' seinen Ort nicht geändert habe, und hält eD' für die Richtung, in der das Licht sich bewegt habe.

Es macht natürlich keinen Unterschied, ob ein solcher Schirm wie AB vorhanden ist oder nicht; wenn in der Zeit, in welcher das Licht

die Strecke eD zurücklegt, der Punkt D' an die Stelle von D rückt, wird ein Beobachter bei D' immer die Richtung eD' als diejenige ansehen, in welcher das Licht zu ihm kommt, und demnach die Lichtquelle S in S' wahrnehmen, verschoben nach der Richtung, nach welcher er sich bewegt. Die Verschiebung oder der Winkel, den die wahre Richtung des Lichtes mit der scheinbaren Richtung desselben bildet, der Winkel $TD'S'$ hängt nur ab von dem Verhältnis der gleichzeitig von dem Punkte D' und von dem Lichte zurückgelegten Räume, also von dem Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten.

Denn der Winkel $TD'S'$ ist gleich dem Winkel $D'eD$, und dieser Winkel ist bestimmt durch

$$\text{tang } D'eD = \frac{D'D}{eD},$$

oder da diese Längen die von dem Punkte D' und dem Lichte in der gleichen Zeit t zurückgelegten Strecken sind, und da, wenn wir die Geschwindigkeit des Punktes D' mit c', die des Lichtes mit c bezeichnen,

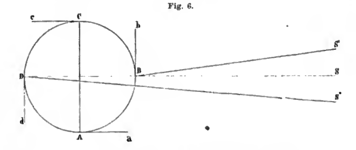
$$D'D = c't;\ eD = ct,$$

so ist

$$\text{tang } D'eD = \text{tang } TD'S = \frac{c'}{c}.$$

Die Anwendung dieser Entwicklung auf das Phänomen der Aberration und die Benutzung desselben zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes ergibt sich von selbst. Befindet sich die Erde in A (Fig. 6), so

Fig. 6.



bewegt sie sich gerade gegen S hin, also gerade dem ankommenden Lichte entgegen, die scheinbare Bahn des Lichtes fällt daher mit der wirklichen zusammen, wir sehen den Stern in der Richtung Aa oder in seinem wahren Orte bei S. Bei B dagegen ist die Bewegung der Erde gerade senkrecht zu SB zur Bahn des Lichtes nach Bb, dort sehen wir daher den Stern verschoben nach der Richtung S', so zwar, daſs der Winkel $S'\ BS$ bestimmt wird, wenn wir ihn mit α bezeichnen, durch

$$\text{tang } \alpha = \frac{c'}{c},$$

worin dann c' die ganze Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn bezeichnet.

Befindet sich die Erde in C, so erscheint der Stern wieder an seinem

wahren Orte S, da die Erde sich in gerader Linie Cc von dem Sterne entfernt, und wenn die Erde in D ist und sich nach Dd hin bewegt, so erscheint der Stern nach S'' ebenso weit verschoben, wie zur Zeit, als die Erde in B war, nach S'.

In den zwischen A und B und B und C liegenden Punkten erscheint der Stern ebenfalls nach S' hin verschoben, aber um so weniger, je weiter die Erde von B entfernt ist. Von der Bewegung der Erde ist dann nur eine Komponente zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht, die um so kleiner ist, je näher die Erde bei A oder C ist, und nur diese Komponente bewirkt dann eine Verschiebung des Sternes.

Liegt der Stern aufserhalb der Ebene der Erdbahn, so erklären sich die an diesen beobachteten Erscheinungen ganz auf dieselbe Weise. Liegt der Stern im Pole der Ekliptik, so ist die Bahn der Erde in jedem Augenblicke senkrecht zur Richtung der Fortpflanzung des Lichtes, der Stern mufs also stets von seinem wahren Orte nach der Richtung, nach welcher die Erde sich gerade bewegt, und um dieselbe Gröfse verschoben erscheinen; er mufs also um seinen wahren Ort einen kleinen Kreis beschreiben, dessen Durchmesser, wenn das Licht dieses Sternes sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, als das Licht des Sternes S in der Ekliptik, die Gröfse der Verschiebung $S'\,S''$ besitzt.

Befindet sich der Stern an einem andern Orte des Himmelsgewölbes, so mufs die Bahn des Sternes um seinen wahren Ort jährlich eine kleine Ellipse sein, deren grofse Axe senkrecht sein mufs zu dem Durchmesser der Erdbahn, an dessen Enden die Bewegung der Erde senkrecht ist zur Verbindungslinie des Sternes mit der Erde. Ist die Geschwindigkeit des von diesem Sterne ausgestrahlten Lichtes dieselbe, so mufs die grofse Axe denselben Wert haben, wie die Verschiebung $S'\,S''$. An den andern Stellen der Erdbahn ist die Bewegung der Erde nicht zur Richtung, in der das Licht zu ihr kommt, senkrecht, nur eine Komponente derselben veranlafst daher eine Verschiebung des Sternes und zwar jene, welche in eine zur Richtung des ankommenden Lichtes senkrecht gelegte Ebene fällt. Man sieht, diese Komponente ist am kleinsten für jene Stelle der Bahn, wo sie sich parallel zu dem Durchmesser bewegt, an dessen Enden der Stern die gröfste Verschiebung erhielt. Dort ist also die Verschiebung am kleinsten, die kleinste Verschiebung ist also senkrecht zur gröfsten.

Die Thatsache der Aberration beweist also erstens, dafs das von den Fixsternen ausgestrahlte Licht sich nicht momentan fortpflanzt, sondern dafs es eine mit der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn vergleichbare Geschwindigkeit besitzt. Sie beweist ferner, da die grofse Axe der Ellipse der scheinbaren Bewegung des Sternes für alle Sterne den gleichen Wert von 40",89 besitzt, dafs die Geschwindigkeit des von allen Sternen ausgestrahlten Lichtes die gleiche ist, ein Satz, der für die Lehre vom Lichte von der höchsten Bedeutung ist.

Die Tangente des Winkels, um welchen die scheinbare Bahn des Lichtes gegen die wirkliche geneigt ist, oder des Abstandes des scheinbaren Ortes des Sternes von dem wahren Orte ist gleich dem Verhältnis der zur Richtung des Lichtstrahles senkrechten Bewegung der Erde zur Geschwindigkeit, mit welcher sich das Licht fortpflanzt. Da nun an der Stelle, wo sich die Erde senkrecht gegen den Lichtstrahl bewegt, die Abweichung des

Sternes von seinem wahren Orte gleich ist der halben grofsen Axe der Aberrationsellipse, so ist die Tangente dieser halben Axe gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn und der Geschwindigkeit des Lichtes.

Um die Geschwindigkeit des Lichtes zu erhalten, müssen wir demnach diejenige der Erde in ihrer Bahn, oder, da wir die Dauer eines Umlaufes der Erde, die eines Jahres genau kennen, die Länge der Erdbahn kennen. Dieselbe ist gegeben, wenn wir den Abstand der Erde von der Sonne kennen, da wir zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit der Erde ihre Bahn als einen Kreis betrachten können. Der Abstand der Sonne wird bekanntlich durch die Parallaxe der Sonne bestimmt, welche ihrerseits aus den Beobachtungen der Venusdurchgänge am sichersten abgeleitet wird. Aus dem Venusdurchgange im Jahre 1769 leitete Encke[1]) im Jahre 1824 für die Sonnenparallaxe den Wert 8″,571 ab, woraus sich die mittlere Entfernung der Sonne gleich 24 066 Äquatorialradien der Erde ergibt. In geographischen Meilen, deren 15 auf einen Grad des Äquators gehen, ist der Äquatorialradius der Erde gleich 859,4374; für die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn folgt daraus 4,118 Meilen in der Sekunde. Als Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes erhält man hiermit aus der Gleichung

$$\text{tang } 20'',445 = \frac{4,118}{c}$$

$$c = \frac{4,118}{\text{tang } 20'',445} = \frac{4,118}{0,0001003} = 41\,065.$$

Darnach würde das Licht sich in einer Sekunde durch die Strecke von 41 065 Meilen fortpflanzen.

Nach Listing[2]) ist die Länge des Äquatorialradius 6377,377 Kilometer, also diejenige einer geographischen Meile 7,4204 Kilometer. In Kilometern ergibt sich demnach die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 304\,720.$$

Der aus den Venusdurchgängen von Encke abgeleitete Wert der Sonnenparallaxe ist indes später vielfach angezweifelt worden; Hansen kam in seiner Theorie der Mondbewegung zu 8″,97 und zu ähnlichen Werten im Mittel zu 8″,9 kamen mehrere Astronomen wie Leverrier, Powalky, Faye u. a.[3]). Mit dem Werte von Hansen würde die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn 3,93 Meilen, die des Lichtes 39 300 Meilen oder 291 622 Kilometer; mit dem Werte 8″,9 erhält man für die Lichtgeschwindigkeit 39 700 Meilen oder 294 596 Kilometer.

Die Unsicherheit des aus der Aberration abgeleiteten absoluten Wertes der Lichtgeschwindigkeit beträgt also etwa $\frac{1}{23}$ des ganzen Wertes, sie kann nur durch eine genauere Bestimmung der Sonnenparallaxe gehoben werden.

---

[1]) *Encke.* Die Entfernung der Sonne. Gotha 1824.
[2]) *Listing.* Neue Konstanten des Erdkörpers. Göttingen 1878.
[3]) Man sehe die Zusammenstellung von *Radau* im Moniteur scientifique du Dr. *Quesneville* 15. April 1869 p. 375 ff.

§ 3.

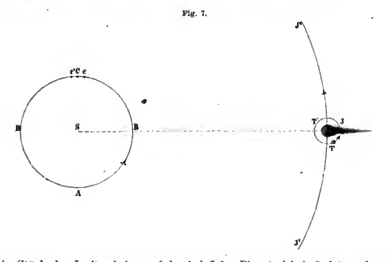
Geschwindigkeit des Planetenlichtes. Noch eine andere astronomische Beobachtung hat die Mittel znr Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes geliefert, die um so interessanter ist, da sie den Beweis liefert, dafs das von dunkeln Körpern infolge des erhaltenen ausgestrahlte Licht sich mit eben derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, als das von den selbstleuchtenden Fixsternen ausgehende Licht.

Es sind die Beobachtungen, welche Olaf Römer in den Jahren 1670 bis 1676, also 50 Jahre vor Entdeckung der Aberration auf der Sternwarte zu Paris über die Verfinsterung der Jupitersmonde anstellte[1]).

Der Jnpiter ist von vier Monden umgeben, welche in ähnlicher Weise um denselben kreisen, wie der Mond um die Erde; die Bahn derselben fällt nahezu mit der Äquatorebene des Jupiters zusammen, und bei jedem Umlaufe werden sie einmal verfinstert, da sie, aufser dem am weitesten vom Jupiter entfernten Trabanten, jedesmal durch den Kernschatten des Jupiter hindurchgehen.

Man kann von der Erde aus entweder den Eintritt der Trabanten in den Schatten oder deren Anstritt aus demselben beobachten. Stellt $ABCD$ die Bahn der Erde, S die Sonne im Mittelpunkte derselben dar und ist $J'\ J''$

Fig. 7.



ein Stück der Jupitersbahn, auf der bei J der Planet sich befindet, so kann man auf der Seite DAB der Erdbahn die auf einander folgenden Eintritte, auf der Strecke BCD die auf einander folgenden Austritte der Trabanten aus dem Schatten des Jupiters beobachten. Aus der Zeit, welche zwischen zwei Eintritten oder zwei Austritten verfliefst, kann man die Umlaufszeit der Trabanten bestimmen.

Diese Umlaufszeit z. B. des ersten Trabanten mufs nnn immer dieselbe sein und nehmen wir an, der Jnpiter stehe still, so mnfs die Umlaufszeit

[1]) *Fischer*, Geschichte der Physik. B. II. p. 155.

einfach gleich sein der Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Eintritten oder Austritten des Trabanten in oder aus dem Schatten verfliefst. Die Bewegung des Jupiters in seiner Bahn bewirkt, dafs wir an dieser Zeit eine kleine leicht zu berechnende Korrektur anbringen müssen, da durch die Bewegung des Jupiters seine Stellung gegen die Sonne und somit die Lage des Schattens etwas geändert wird.

Wenn wir nun aber, auch mit Beachtung dieser Korrektur, aus zwei auf einander folgenden Eintritten oder Austritten des Trabanten aus dem Schatten die Umlaufszeit eines der Trabanten bestimmen, so finden wir dieselbe keineswegs immer gleich, sondern, je nach der Stellung der Erde in ihrer Bahn, als eine andere. Bestimmt man die Umlaufszeit zur Zeit, wo sich die Erde in B befindet, also Sonne und Jupiter in Opposition stehen, oder wenn die Erde in D steht, Sonne und Jupiter in Konjunktion sind, so ist die Umlaufszeit merklich dieselbe; wenn aber die Erde in A sich befindet, so findet man aus der Beobachtung zweier auf einander folgender Eintritte des Trabanten in den Schatten die Umlaufszeit kürzer, wenn die Erde in C sich befindet, aus zwei Austritten um ebensoviel länger als zur Zeit der Opposition oder Konjunktion.

Nach den ersten Beobachtungen glaubte Cassini den Unterschied in den beobachteten Umlaufszeiten einer Unregelmäfsigkeit in der Bewegung des Trabanten zuschreiben zu müssen, Römer jedoch machte darauf aufmerksam, dafs diese Verschiedenheit im innigsten Zusammenhange mit der Bewegung der Erde gegen den Jupiter stehe. Zur Zeit der Opposition und zur Zeit der Konjunktion ist die Bahn der Erde nahezu senkrecht zur Verbindungslinie des Jupiter mit der Erde. Der Abstand beider ändert sich nur unbedeutend. Wenn aber die Erde sich in A befindet, ist ihre Bewegung gerade gegen den Jupiter gerichtet und die Erde ist zur Zeit des ersten Eintrittes des Trabanten in den Schatten viel weiter vom Jupiter entfernt, als zur Zeit des folgenden Eintrittes, aus deren Zwischenzeit man die Umlaufszeit berechnet. Wenn aber die Erde sich an der entgegengesetzten Seite ihrer Bahn bei C befindet, so bewegt sie sich fast in gerader Richtung vom Jupiter fort, sie ist beim zweiten Austritte fast um die ganze von ihr durchlaufene Strecke weiter vom Jupiter entfernt, als zur Zeit des ersten Austrittes des Trabanten aus dem Schatten. Römer schlofs daraus, dafs der Grund der Verschiedenheit in den Umlaufszeiten daher rühre, dafs das Licht der Trabanten Zeit brauche, um den Abstand des Jupiter von der Erde zu durchlaufen; und dafs die, zur Zeit wo sich die Erde von A aus gegen den Jupiter hinbewegt, aus der Zwischenzeit zwischen zwei Eintritten des Trabanten geschlossene Umlaufszeit gleich der Differenz sei zwischen der wahren Umlaufszeit und der Zeit, welche das Licht gebraucht haben würde, um die Strecke zu durchlaufen, um welche die Erde in der Zwischenzeit sich dem Jupiter genähert hat. Wenn die Erde in C sich vom Jupiter entfernt, so ist die aus den Beobachtungen zweier Austritte gefolgerte Umlaufszeit die Summe der wahren Umlaufszeit und der Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Strecke gebrauchte, um welche die Erde sich von dem Jupiter entfernt hat.

Denn befindet sich die Erde zur Zeit des ersten Austrittes des Trabanten in c (Fig. 7), so wird, wenn das Licht zur Fortpflanzung Zeit braucht, der Trabant um die Zeit t nach dem Momente, in welchem er

wieder zu leuchten begonnen hat, in c wahrgenommen werden, wo dann t die Zeit bedeutet, welche das Licht braucht, um die Strecke Jc zurückzulegen. Ist T die wahre Umlaufszeit des Trabanten, so wird er nach dieser Zeit zum zweitenmale den Schatten verlassen, das von ihm in dem Augenblicke ausgehende Licht wird dann zur Zeit $T + t$ von dem Moment des ersten Austrittes an gerechnet in c ankommen. In c' aber, wo die Erde sich dann befindet, wird es erst zur Zeit $T + t + t'$ wahrgenommen werden, da es die Zeit t' braucht, um die Strecke cc' zu durchlaufen. Da nun das Licht um die Zeit t nach dem ersten Austritte des Trabanten von der Erde in c wahrgenommen wurde, so ist die Zwischenzeit zwischen beiden Wahrnehmungen

$$T + t + t' - t = T + t',$$

gleich der wahren Umlaufszeit T plus der Zeit, die das Licht brauchte, um die Strecke cc' zu durchlaufen.

Kennt man daher die wahre Umlaufszeit T und die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, so kann man daraus t', und durch Division von cc' mit t' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes berechnen.

Eine solche einzelne Beobachtung hat man jedoch dazu nicht angewandt, sondern hat die Verzögerung beobachtet, welche nach einer ganzen Reihe von Verfinsterungen bei dem letzten Austritte des Trabanten aus dem Schatten eintritt. Ist so der Austritt des Trabanten aus dem Schatten beobachtet, wenn sich die Erde gerade in B befindet, und berechnet man dann mit den wahren Umlaufszeiten die Zeit des Austrittes, der ungefähr $^1/_2$ Jahr später eintritt, wenn die Erde sich in D befindet, so beobachtet man den Austritt um so viel später als das Licht braucht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen, da die Erde dann gerade um den Durchmesser der Erdbahn weiter vom Jupiter entfernt ist, als zur Zeit der Opposition von Sonne und Jupiter.

Die Beobachtung ergibt dann, dafs der Austritt des Trabanten aus dem Schatten nahezu 16 Minuten später stattfindet, oder dafs das Licht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen, die Zeit von 986,38 Sekunden braucht[1]).

Setzen wir dem Enckeschen Werte der Sonnenparallaxe entsprechend den Durchmesser der Erdbahn gleich 41 370 000 Meilen, so erhalten wir für die Geschwindigkeit des Lichtes, oder die Strecke, durch welche es in einer Sekunde sich fortpflanzt,

$$c = \frac{41\,370\,000}{986{,}38} = 41\,922 \text{ Meilen};$$

mit dem Hansenschen Werte der Sonnenparallaxe dagegen den Wert 40 000 Meilen.

Diese Zahlen sind natürlich mit derselben Unsicherheit behaftet, wie die aus der Aberration abgeleiteten; man sieht indes, dafs sie fast genau mit den letztern übereinstimmen; der Unterschied beträgt nicht zwei Hundertstel des Wertes. Durch die Wahrnehmung von Römer ist somit zweifellos der Beweis geliefert, dafs das Licht, welches die beleuchteten Körper zurückwerfen, mit eben derselben Geschwindigkeit sich fortpflanzt, als das direkt von den selbstleuchtenden Körpern ausgestrahlte.

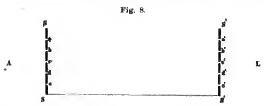
[1]) *Delambre*, Tables écliptiques des Satellites de Jupiter. Paris 1819.

§ 4.

Geschwindigkeit des Lichtes irdischer Lichtquellen. Dafs auch das Licht irdischer Lichtquellen sich mit eben derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, als das der Fixsterne und Planeten, haben in neuerer Zeit die Versuche von Fizeau[1]) und Cornu[2]) sowie von Foucault[3]) und Michelson[4]) gezeigt, denen es gelungen ist, die Geschwindigkeit des Lichtes auf der Erde zu messen.

Das Princip des Fizeauschen Verfahrens ist folgendes. Seien S und S' zwei parallele Schirme, in denen sich eine Anzahl Öffnungen a, b, c .... so angebracht befinden, dafs ein bei A befindliches Auge ein hinter dem zweiten Schirme befindliches Licht L bei passender Stellung der beiden Schirme durch die korrespondierenden Öffnungen $a, a' : b, b'$; ... sehen kann. Werden dann die beiden als fest verbunden gedachten Schirme bei fester Stellung des Auges A und des Lichtes L auf- und abbewegt, so wird bei mäfsiger Geschwindigkeit der Bewegung ein Beobachter bei A das Licht bei L abwechselnd sehen, abwechselnd nicht. Wird der Schirm rascher bewegt, so

Fig. 8.



wird das Licht immerfort wahrgenommen, da ebenso wie der Eindruck des Schalles im Ohr, der des Lichtes im Auge eine Zeitlang dauert und demnach das Auge bei A noch den Eindruck des Lichtes bewahrt, wenn auch ein Zwischenraum zwischen zwei Öffnungen vor dem Auge steht.

Die Sichtbarkeit des Lichtes L durch die beiden bewegten Schirme hindurch rührt in diesem Falle von der grofsen Geschwindigkeit, mit der sich das Licht fortpflanzt. Das Licht passiert die Öffnung c' in dem Augenblicke, in dem c vor dem Auge ist, und legt den Raum $c'c$ so rasch zurück, dafs c noch nicht vor dem Auge vorüber ist, wenn das Licht bei der Öffnung c ankommt.

Wenn aber nun die beiden Schirme so rasch bewegt werden, dafs während der Zeit, in der das Licht von c' nach c sich fortpflanzt, an die Stelle der Öffnung c der Zwischenraum cd getreten ist, so wird das Licht durch den zweiten Schirm nicht mehr durchdringen und der Beobachter in A wird bei dieser Geschwindigkeit der Schirme das Licht L gar nicht

[1]) *Fizeau*, Comptes Rendus de l'Académie des sciences 1849. Poggend. Ann. Bd. LXXIX.

[2]) *Cornu*, Comptes Rendus. T. LXXVI. p. 338. Determination de la vitesse de la lumière d'après des experiences exécutées en 1874 entre l'Observatoire et Monthléry. Extrait des Annales de l'Observatoire de Paris. (Mémoires Tome XIII) Paris 1876.

[3]) *Foucault*, Comptes Rendus LV. 501 und 792. Poggend. Ann. Bd. CXVIII.

[4]) *Michelson*, American Journal of Science and Arts, 3 series Bd. XVIII p. 390. 1879.

wahrnehmen, da immer das durch eine der Öffnungen rechts hindurchtretende Licht auf dem Schirme links statt einer Lücke den folgenden undurchsichtigen Zwischenraum findet.

Werden die Schirme noch rascher bewegt, so dafs in der Zeit, in welcher das Licht, das durch eine Öffnung rechts hindurchgegangen ist, sich zum zweiten Schirme fortpflanzt, an die Stelle der Öffnung c die Öffnung d getreten ist, so kann das Licht durch diese Öffnung hindurchtreten, und das Auge in A wird dasselbe wiederum wahrnehmen.

Je nach der Geschwindigkeit, mit welcher der Schirm bewegt wird, nimmt also ein Beobachter in A das Licht entweder abwechselnd wahr oder bei rascherer Bewegung immerfort, oder bei noch rascherer Bewegung wird das Licht L gar nicht mehr wahrgenommen. Wird die Bewegung noch mehr beschleunigt, so wird das Licht wieder gesehen.

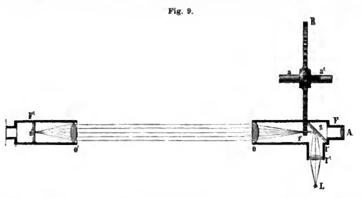
Aus der ersten Verdunklung oder dem folgenden wieder Sichtbarwerden des Lichtes kann man, wenn man den Abstand der Schirme und den der Öffnungen in ihnen, sowie die Geschwindigkeit, mit der die Schirme bewegt werden, kennt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes berechnen. Denn man kann daraus die Zeit berechnen, in welcher an die Stelle der Öffnung c der Zwischenraum cd tritt, und weifs, dafs in dieser Zeit das Licht die Strecke cc' durchlaufen hat.

Der Quotient aus dem durchlaufenen Raume und der Zeit, in welcher der Raum durchlaufen ist, gibt uns die gesuchte Geschwindigkeit.

Um dieses Princip zur Anwendung zu bringen, wandte Fizeau folgendes Verfahren an:

In einer Entfernung von 8633 Meter wurden zwei Fernrohre so aufgestellt, dafs ihre optischen Axen eine gerade Linie bildeten, so dafs man also durch F (Fig. 9) das Objektiv o' des andern Fernrohrs F' sehen konnte.

Fig. 9.



Ein in dem Brennpunkte f des Fernrohrobjektivs angebrachter leuchtender Punkt sendet dann durch das Objektiv o ein Bündel einander paralleler Strahlen auf das Objektiv o'. In diesem werden die ankommenden Strahlen so gebrochen, dafs sie alle in einem Punkte hinter dem Objektive im Brennpunkte desselben vereinigt werden.

Fizeau brachte nun an dem Fernrohre F eine seitliche Röhre rr' an, in deren Innerem sich eine Glaslinse befand; vor die Linse bei L wurde

eine sehr helle Lampenflamme gestellt. Im Innern des Fernrohrs bei s befand sich ein kleiner, zur Hälfte belegter, zur Hälfte durchsichtiger Glasspiegel, welcher unter einem Winkel von 45° gegen die Fernrohraxe geneigt war. Durch die Linse und den kleinen Spiegel s wurde, wie die demnächst zu betrachtenden Reflexions- und Brechungsgesetze näher nachweisen werden, in dem Brennpunkte f des Objektivglases o ein kleines Bildchen der Flamme erzeugt, indem alle von L auf die Linse fallenden Strahlen in f vereinigt werden.

Die von f aus zum Objektiv o sich fortpflanzenden Strahlen werden dann in dem Objektive so gebrochen, dafs sie als ein mit der Fernrohraxe paralleles Strahlenbündel sich zum Objektive o' des zweiten Fernrohres fortpflanzen, dort gebrochen und in dem Brennpunkte desselben ebenfalls zu einem kleinen Bildchen des Lichtes L vereinigt werden. In diesem Brennpunkte befand sich senkrecht zur Fernrohraxe ein kleiner Metallspiegel s', von welchem die dort ankommenden Strahlen zurückgeworfen werden. Das zurückgeworfene Strahlenbündel wird dann von dem Objektive o' ebenfalls parallel gemacht, kehrt zum Objektive o zurück, wird dort gebrochen und in dem Brennpunkte f zu einem neuen Bilde von L vereinigt.

Durch die obere Fernrohrwand ragte in das Innere des Fernrohrs ein gezahntes Rad R, dessen Umdrehungsaxe aa' mit der Axe des Fernrohrs parallel war, und durch dessen Umfang die Fernrohraxe so hindurchging, dafs sie je nach der Stellung des Rades gerade einen Zahn des Rades oder eine zwischen den Zähnen befindliche Lücke traf. Die Zähne des Rades und die Lücken hatten genau die gleiche Breite, und das Rad war so gestellt, dafs der Brennpunkt des Objektives gerade in der vordern dem Objektive zugewandten Fläche des Rades lag.

Steht nun das Rad so, dafs eine Zahnlücke unten ist, dafs also die Axe des Fernrohres durch eine Zahnlücke hindurchgeht, so kann das von L ausgehende, durch o und o' nach s' gelangende, von dort reflektierte und in f vereinigte Licht sich von f aus gegen A hin weiter fortpflanzen, und von A aus durch den unbelegten Teil des Spiegels s hindurch gesehen werden. Das Bild von L erscheint dann als ein kleiner ferner Stern.

Man sieht, das von L ausgehende Licht mufs, um in A wahrgenommen zu werden, zweimal die Zahnlücke des Rades R passieren, einmal um von L aus durch f, o, o' nach s' zu gelangen, dann um von s' durch o', o, f rückwärts nach A zu kommen. Das eine Rad R kann also die Stelle der beiden Schirme vertreten, da, wenn statt der Zahnlücke ein Zahn sich an der Stelle f befindet, weder Licht von L nach s', noch von s' nach A sich fortpflanzen kann.

Wird das Rad R gedreht, so dafs abwechselnd in f sich ein Zahn, abwechselnd eine Zahnlücke befindet, so sieht man von A aus abwechselnd den fernen Stern. Wird die Drehung rascher, so dafs ungefähr 10 Zahnlücken die Stelle f in der Sekunde passieren, so sieht man von A aus wegen der Dauer des Lichteindruckes im Auge den fernen Stern immerwährend. Bei sich immer vergröfsernder Geschwindigkeit des Rades wird der Lichtpunkt allmählich dunkler und bei einer bestimmten sehr grofsen Geschwindigkeit verschwindet er vollständig. Es tritt dann der vorhin betrachtete Fall ein; das Licht, welches durch eine Zahnlücke gegen s' hin sich fortpflanzte, findet bei seiner Rückkehr nach f dort einen Zahn, es kann daher

das ankommende Licht nach A sich nicht fortpflanzen. Passiert die folgende Zahnlücke die Axe des Fernrohrs, so tritt neuerdings nach s' hin Licht aus F aus, da aber unmittelbar vorher ein Zahn in f war, also kein Licht nach s' sich fortpflanzte, kann auch jetzt kein Licht nach A sich bewegen.

Bei noch vergröfserter Rotationsgeschwindigkeit des Rades wird der Lichtpunkt wieder sichtbar, er wird immer heller, und wenn die Rotationsgeschwindigkeit gerade die doppelte der vorigen ist, so ist der Lichtpunkt wieder ebenso hell wie bei der langsamern Rotation, wo circa 10 Zahnlücken in der Sekunde die Fernrohraxe passierten.

Bei weiter vergröfserter Rotationsgeschwindigkeit tritt ein abwechselndes Dunklerwerden und Verschwinden, und wieder Sichtbar- und Hellerwerden des Lichtes ein. Jedesmal, wenn von dem ersten Verschwinden an die Rotationsgeschwindigkeit des Rades, die $2n + 1$ fache wird, ist das Gesichtsfeld dunkel, jedesmal, wenn sie die $2n$fache ist, hell. Im ersten Falle ist an die Stelle der Lücke, wenn das Licht durchtrat, der folgende zweite, dritte ... Zahn, im zweiten an Stelle der das Licht zuerst durchlassenden Lücke die nächstfolgende oder die zweite etc. Lücke getreten.

Das Rad, welches Fizeau zu seinen Versuchen benutzte, hatte 720 Zähne, so dafs also jeder Zahn oder jede Lücke $\frac{1}{1440}$ des Umkreises des Rades betrug. Die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmte er durch die nach Savarts Methode (I. § 154) hervorgebrachten Töne, indem er die Zähne des Rades gegen den Rand einer genäherten Karte schlagen liefs.

Fizeau fand, dafs das Licht zum erstenmale vollständig verschwand, wenn die Rotationsgeschwindigkeit des Rades 12,6 Umdrehungen in der Sekunde betrug. Bei dieser Geschwindigkeit war also, während das Licht von f nach s' und zurück nach f sich bewegte, also einen Weg von $2 \,.\, 8633 = 17\,266$ Metern zurücklegte, an Stelle der ersten Zahnlücke ein Zahn getreten, welcher dem Lichte den Durchtritt versperrte.

Die Zeit t, welche bei dieser Geschwindigkeit der Zahn brauchte, um an die Stelle der Lücke zu treten, war

$$t = \frac{1}{12{,}6 \,.\, 1440} \text{ Sekunde},$$

da die Lücke $\frac{1}{1440}$ des Radumfanges ausmacht. In dieser Zeit legte das Licht den Raum von 17 266 Meter zurück, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist somit

$$c = 17\,266 \,.\, 12{,}6 \,.\, 1440 = 313\,274\,304 \text{ Meter},$$

oder da die geographische Meile (15 auf einen Grad des Äquators) gleich 7420,4 Meter ist,

$$c = 42\,218 \text{ Meilen}.$$

Diese von Fizeau aus 28 Versuchen erhaltene Zahl weicht von der aus der Verfinsterung des Jupiterstrabanten mit der Enckeschen Sonnenparallaxe berechneten nur um etwa 0,5 Procent, von der mit dem gröfsern Werte der Sonnenparallaxe abgeleiteten um etwa 5% ab. Beachtet man nun die Schwierigkeit dieser Messungen und zugleich, dafs ein sehr kleiner Fehler in der Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit auf das schliefsliche Resultat von gröfstem Einflusse ist, da er mit $17\,266 \cdot 1440$ multi-

pliziert wird, so darf man schon aus diesem Versuche schliefsen, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes irdischer Lichtquellen mit jener des direkten oder reflektierten Sternenlichtes durchaus gleich ist.

Dieser Schlufs findet seine volle Bestätigung und sichere Begründung in den Versuchen Cornus, welcher neuerdings nach der Methode von Fizeau die Geschwindigkeit des Lichtes mafs, und Foucaults, dem es gelungen ist, in dem begrenzten Raume eines Zimmers die Geschwindigkeit des Lichtes zu messen.

Cornu hat die Messung der Lichtgeschwindigkeit nach der Methode von Fizeau zum Gegenstand eines ausgedehnten Studiums gemacht. Nach einer Reihe von Vorversuchen stellte er in einer ersten in den Jahren 1871 und 1872 durchgeführten Versuchsreihe die beiden Fernrohre in einer Entfernung von 10 310 Meter auf, das eine, an welchem beobachtet wurde, in einem Pavillon der école polytechnique zu Paris, das andere, in welchem sich der das Licht zurücksendende Spiegel befand, auf dem Mont Valerien.

Als Resultat dieser sich aus mehr als 1000 Versuchen zusammensetzenden Versuchsreihe erhielt Cornu für die Lichtgeschwindigkeit den Wert

$$c = 298\,500 \text{ Kilometer},$$

den er als bis auf erheblich weniger als 1 Prozent genau ansieht. Zugleich schlofs Cornu aus diesen Versuchen, dafs sich durch Anwendung einer gröfsern Entfernung und dementsprechend genauerer Apparate eine erheblich gröfsere Genauigkeit erreichen lasse.

Im Jahre 1874 benutzte deshalb Cornu zu seinen Versuchen eine Entfernung von nahezu 23 Kilometer, das Beobachtungsfernrohr wurde auf der Pariser Sternwarte, das den reflektierenden Spiegel enthaltende auf dem Thurm zu Montlhéry aufgestellt. Die Distanz des Brennpunktes im Beobachtungsfernrohr und des reflektierenden Spiegels ergab sich aus den genauen geodätischen Messungen, bei denen der Thurm zu Montlhéry als trigonometrischer Punkt gedient hatte, zu 22909,75 Meter, ein wohl nicht um 1 Meter fehlerhafter Wert.

Auf eine nähere Beschreibung der Einzelheiten der Versuche und der angewandten Vorsichtsmafsregeln, welche Cornu ausführlich mitteilt, und welche erkennen lassen, dafs wir in den Cornuschen Messungen in der That ein Muster einer Experimentaluntersuchung erhalten haben, können wir hier nicht eingehen. Es möge nur auf einen Punkt aufmerksam gemacht werden.

Da in dem Gesichtsfelde des Fernrohrs immer etwas Licht vorhanden ist, so läfst sich nicht mit Sicherheit erkennen, wann gerade das reflektierte Licht vollständig ausgelöscht ist. Cornu führte deshalb die Beobachtung so, dafs er bei wachsender Geschwindigkeit des rotierenden Zahnrades den Moment zu bestimmen suchte, wann das Licht aufhörte sichtbar zu sein und denjenigen, bei welchem es wieder wahrnehmbar wurde. Nimmt man das Mittel aus diesen beiden Geschwindigkeiten, so erhält man den wahrscheinlich richtigsten Wert der Geschwindigkeit, welcher der vollen Verdunkelung entspricht. Denn wenn auch wegen der nicht vollen Dunkelheit des Gesichtsfeldes das Licht etwas früher nicht mehr gesehen wird, ehe es vollkommen ausgelöscht ist, und etwas später erst wieder wahrgenommen wird, als es bei absoluter Dunkelheit, die gewissermafsen den ersten an dem

Zahn vorhei passierenden Strahl wieder zn erkennen gestattet hätte, gesehen wurde, so hehen sich bei Bildung des Mittels ans den heiden so bestimmten Geschwindigkeiten die Fehler anf. Für das Verschwinden des Lichtes bekommt man eine etwas zu kleine, für das Wiederauftreten eine um ehensoviel zu grofse Geschwindigkeit, die halbe Summe beider gibt dann gerade die Geschwindigkeit des Rades, bei welcher der vorbei passierende Zahn das Licht vollkommen verdeckt.

Man erkennt weiter, dafs ein etwa bei der Geschwindigkeitsbestimmung in dieser Weise begangner Fehler auf die herechnete Lichtgeschwindigkeit einen um so geringeren Einflufs hat, je gröfser die Ordnungszahl der beobachteten Verdunklung ist; wenn man, nach Cornu, als Verdunklung der ersten Ordnung jene hezeichnet, die bei der kleinsten Rotationsgeschwindigkeit des Rades eintritt, als zweiter Ordnung die bei dreifacher, als dritter die bei fünffacher, als $n$ter die bei $2n - 1$ facher Rotationsgeschwindigkeit. Es wurden deshalh die Rotationsgeschwindigkeiten der Zahnräder so grofs wie möglich gemacht.

Um ferner etwaige Ungleichheiten in der Bearheitung der Zähne der verschiedenen bei den Versuchen benutzten gezahnten Räder unschädlich zu machen, war der die Räder in Rotation versetzende Apparat so eingerichtet, dafs die Rotationsrichtung der Räder von dem Beohachter umgekehrt werden konnte, und dafs hei beiden Rotationsrichtungen in derselben Weise beohachtet werden konnte.

Cornu stellte in dieser Weise 624 Beobachtungen an, teils bei Tage, teils bei Nacht. Zn den Tagesheohachtungen wurde Sonnenlicht, zu den Nachtheobachtungen in der Regel Drummondsches Kalklicht verwandt, welches trotz geringerer Helligkeit dem elektrischen Lichte vorzuziehen war, weil es ruhiger und stetiger lenchtete. Zuweilen konnte auch des Nachts eine Petroleumlampe als Lichtqnelle benutzt werden. Die Rotationsgeschwindigkeit der Räder wurde bis zur 22. Ordnung vergröfsert, welche einer Rotationsgeschwindigkeit von 900 Umdrehungen in der Sekunde entsprach.

Aus einer ausführlichen Diskussion der erhaltenen Resultate und der in den Beobachtungen möglichen Fehlerquellen erhält Cornn als Geschwindigkeit des Lichtes den Wert

$$c = 300\,350 \text{ Kilometer}$$

oder, wie sich später ergeben wird, reduziert auf den luftleeren Raum,

$$c = 300\,400 \text{ Kilometer}$$

und die noch vorhandene Unsicherheit dieses Wertes sieht er als $\pm 0{,}001$ des ganzen oder ± 300 Kilometer an. Von der frühern weicht diese Bestimmung um etwa $\frac{3}{4}$ Prozent ab.

In einer leider nur sehr kurzen Diskussion der Cornuschen Resultate gelangte Helmert zu einem etwas kleinern Werte[1]). Er findet nämlich, dafs die aus den Beobachtungen Cornns sich ergehenden Werte für c um so kleiner werden, je gröfser die Rotationsgeschwindigkeit des Rades ist, dafs die Beobachtungen niederer Ordnung meist einen gröfsern, diejenigen höherer

[1]) *Helmert*, Astronomische Nachrichten Nr. 2072.

Ordnung einen kleinern Wert liefern als der aus allen Beobachtungen sich ergehende Mittelwert. Die ans den Beobachtungen der verschiedenen Ordnungen sich ergehenden Werte c liefsen sich darstellen durch

$$c = 299\,990 + \frac{7100}{2n-1} \cdot \text{in Kilometern.}$$

Helmert glaubt, dafs dieser Gang der beobachteten Werte durch einen kleinen systematischen Fehler zu erklären sei. Das konstante Glied der letztern Gleichung ist dann der wahrscheinlichste Wert der sich aus den Cornnschen Messungen ergehenden Geschwindigkeit des Lichtes. Derselbe ist demnach

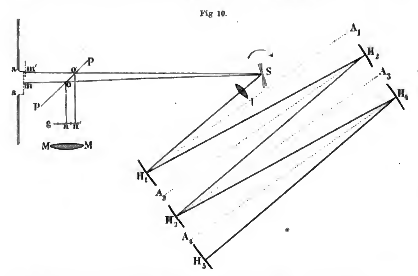
$$c = 299\,990 \text{ Kilometer,}$$

ein Wert, der fast genau 0,5 Prozent gröfser ist, als der von Cornu aus seinen frühern Versuchen abgeleitete.

Fast genau dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, welche Cornu bei seiner ersten Untersuchung erhalten hatte, leitete Foucault schon früher aus seinen Versuchen ab.

Die Versuchsmethode von Foucault beruht auf dem im nächsten Kapitel zu besprechenden Gesetze der Reflexion des Lichtes an ebenen Spiegeln, dafs ein Lichtstrahl von einem Spiegel immer unter demselben Winkel zurückgeworfen wird, unter welchem er den Spiegel trifft, und auf der später zu besprechenden Eigenschaft der Hohlspiegel und Linsen, reelle Bilder von Gegenständen zu liefern, welche ihre Strahlen auf die Spiegel oder Linsen senden. Die Anordnung des Versuches zeigt schematisch Fig. 10. Durch

Fig 10.



eine enge, in dem Fensterladen eines verdunkelten Zimmers angebrachte Öffnung aa tritt, durch einen Heliostaten horizontal reflektiert, ein Bündel Sonnenstrahlen; dasselbe trifft zunächst auf ein mikrometrisches Sehzeichen, welches aus einer Anzahl enger in die Silberschicht eines versilberten Glases

eingeschnittener Spalten besteht. Diese Spalten sind $0{,}1^{mm}$ von einander entfernt. Die durch die engen Spalten getretenen Strahlen treffen in einiger Entfernung auf einen kleinen vertikal aufgestellten Spiegel S, welcher in später zu beschreibender Weise in rasche Rotation um eine vertikale Axe versetzt werden kann. Seitwärts von dem kleinen Spiegel S ist ein Hohlspiegel H_1 so aufgestellt, dafs der kleine Spiegel S in einer bestimmten Lage die ihn treffenden Strahlen dem Hohlspiegel zusendet. Der Abstand des Hohlspiegels von dem Spiegel S war bei den Versuchen Foucaults 4 Meter; er ist kleiner oder höchstens so grofs als der Krümmungsradius des Hohlspiegels H_1. Dieser letztere ist so gestellt, dafs seine Axe, das ist die durch den Mittelpunkt des Hohlspiegels und den Krümmungsmittelpunkt A_1 desselben gelegte gerade Linie mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte von S und H_1 einen gewissen, nicht zu kleinen Winkel bildet. Zwischen dem Spiegel S und H_1 befindet sich, möglichst nahe bei S, eine achromatische Linse so aufgestellt, dafs die von m herkommenden, am Spiegel S reflektierten Strahlen gerade in der Fläche des Hohlspiegels ein reelles Bild des mikrometrischen Sehzeichens bilden.

Wir werden später den Nachweis liefern, dafs das von dem Hohlspiegel unter diesen Umständen entworfene Bild des auf ihn geworfenen reellen Bildes des Sehzeichens genau an der Stelle dieses Bildes liegt, deshalb werden die den Hohlspiegel treffenden Strahlen von diesem an der andern Seite der Axe $H_1\,A_1$ in der Richtung $H_1\,H_2$ zurückgeworfen, so dafs der Winkel $SH_1\,A_1 = H_2\,H_1\,A_1$ ist. Diese zurückgeworfenen Strahlen treffen nun in H_2 einen zweiten Hohlspiegel, dessen Axe derjenigen des ersten Hohlspiegels parallel ist, und dessen Krümmungsradius gleich ist dem Abstande $H_1\,H_2$ dieser beiden Hohlspiegel. Hierdurch wird bewirkt, dafs der zweite Hohlspiegel in H_3 ein reelles Bild des auf H_1 entworfenen Bildes, also ein reelles Bild des Sehzeichens entwirft. In H_3 befindet sich die spiegelnde Fläche eines dritten Hohlspiegels, dessen Axe wieder denjenigen der beiden ersten Hohlspiegel parallel ist. Da nun auch hier wieder das von diesem Hohlspiegel entworfene Bild mit dem Bilde H_3 zusammenfällt, so werden von hier die Strahlen, welche den Hohlspiegel treffen, in der Richtung $H_3\,H_4$ zu einem vierten Hohlspiegel H_4 geworfen, der wieder so gestellt ist, dafs seine Axe mit denen der andern Hohlspiegel parallel ist. Dieser Hohlspiegel entwirft deshalb in H_5, in einer Entfernung $H_4\,H_5$, welche gleich dem Abstande $H_3\,H_4$ ist, nochmals ein reelles Bild des Sehzeichens. Dieses Bild wird nun von der Fläche eines Hohlspiegels aufgenommen, dessen Krümmungsmittelpunkt in H_4 liegt, und dessen Axe parallel der Verbindungslinie $H_4\,H_5$ ist. Auch in dem Spiegel H_5 fällt das von diesem Spiegel entworfene Bild mit dem auf ihn geworfenen Bilde zusammen; da aber hier die Axe des Spiegels H_5 mit der Richtung der auf den Spiegel gesandten Strahlen zusammenfällt, so kehren von H_5 die Strahlen genau in derselben Richtung nach H_4 zurück, in welcher sie von H_4 nach H_5 hingelangten. Weiter kehren deshalb auch die Strahlen genau auf dem Wege, auf welchem sie zu H_4 gelangten, über H_3, H_2, H_1 zur Linse L, dem Spiegel S und von da zu m zurück, und auf m wird von diesen Strahlen ein das ursprüngliche Sehzeichen deckendes reelles Bild des Sehzeichens selbst entworfen. Dafs dieses der Fall sein mufs, werden wir nächstens bei der Lehre von den Linsen nachweisen.



Es gelingt auch leicht, dieses Bild sichtbar zu machen; zu dem Ende stellte Foucault nahe bei *m* in den Gang der Lichtstrahlen eine planparallele Glasplatte, welche unter einem Winkel von 45° gegen die Richtung der Strahlen geneigt war. An dieser findet eine teilweise Reflexion der von *S* zurückkommenden Strahlen nach *on* statt, und infolge dieser wird in *n*, einer Stelle, die ebenso weit von dem Punkte *o* entfernt ist, wie der Punkt *m*, ebenfalls ein reelles Bild erzengt. Dieses Bild fällt dort auf eine mit einer Teilung versehene Glasplatte und wird dort mit einem Mikroskop beobachtet.

Das so beobachtete reelle Bild wird von Strahlen gebildet, welche zweimal den Spiegel *S* passiert haben, einmal auf dem Hinwege zu den Hohlspiegeln und dann nachdem sie den Weg über die einzelnen Hohlspiegel bis H_5 zweimal, hin und zurück, durchlaufen haben.

Wir nahmen bis jetzt an, der Spiegel *S* habe eine bestimmte Lage; alle die eben gemachten Betrachtungen haben aber auch Geltung, wenn der Spiegel rotiert; er nimmt dann bei jeder Rotation einmal die Stellung ein, bei welcher der Gang der Lichtstrahlen der vorhin angegebene ist, es erscheint deshalb bei jeder Rotation einmal das Bild auf der Glasplatte, und so lange die Rotation nur langsam ist, an derselben Stelle, an welcher es bei ruhendem Spiegel erschien. Denn jedesmal dann treffen die von *m* herkommenden Strahlen und ebenso die zurückkehrenden den Spiegel unter demselben Winkel, unter welchem sie den ruhenden Spiegel trafen, und demzufolge mufs das Bild von *m* an derselben Stelle erscheinen. Wenn auch das Bild bei jeder Rotation nur einmal erscheint, so sieht man dasselbe, sobald der Spiegel etwa 10mal in der Sekunde rotiert, wegen der Dauer des Lichteindruckes kontinuierlich.

Anders wird es, wenn der Spiegel sich sehr rasch dreht, so dafs er in der Zeit, während welcher das Licht von *S* nach H_5 und von H_5 wieder nach *S* zurückkehrt, einen mefsbaren Bogen beschreibt. In dem Momente, in welchem der Spiegel die vorhin als ruhende angenommene Lage hat, wird das Licht nach H_1 gesandt; kommt das Licht aber von H_5 über H_1 zurück, so hat sich der Spiegel vielleicht um einen Winkel α gedreht; der einfallende Strahl trifft den Spiegel, wenn er sich in der Richtung des Pfeiles dreht unter einem Einfallswinkel, der um α gröfser ist, als wenn der Spiegel in Ruhe wäre; der zurückgeworfene Strahl verläfst dann den Spiegel ebenfalls unter einem um α gröfsern Winkel; der Winkel $H_1\,S\,m'$ ist somit um 2α gröfser als der Winkel $H_1\,S\,m$, den einfallender und zurückgeworfener Strahl bei ruhendem Spiegel mit einander bildeten. Der Erfolg ist, dafs das von den Spiegeln entworfene Bild des Sehzeichens *m* dieses selbst nicht mehr deckt, sondern dafs ein nach *m'* hin verschobenes Bild erscheint. Die Gröfse dieser Verschiebung ergibt sich unmittelbar aus dem Abstande des Spiegels *S* und dem Winkel α, denn es ist

$$mm' = d = mS \cdot \operatorname{tang} 2\alpha,$$

da, wie wir sahen, der Winkel mSm' gleich 2α ist. Mifst man die Verschiebung *d* und andrerseits die Anzahl von Umdrehungen, welche der Spiegel in einer Sekunde vollführt, so können wir daraus die Zeit ableiten, welche das Licht gebraucht hat, um den Weg von *S* nach H_5 hin und

zurück zu durchlaufen; es ist die Zeit, in welcher der Spiegel sich um den Winkel α gedreht hat.

Ist die Anzahl Umdrehungen des Spiegels in einer Sekunde gleich n, so dreht er sich in einer Sekunde durch den Bogen $2n\pi$; die Zeit, welche er zur Zurücklegung des Bogens α gebraucht, ist somit

$$t = \frac{\alpha}{2n\pi};$$

den Wert von α erhalten wir aus der Verschiebung d und dem Abstande r des Spiegels S vom Sehzeichen m mittels der vorhin aufgestellten Gleichung

$$d = r \cdot \operatorname{tang} 2\alpha.$$

Da der Bogen α immer nur äufserst klein ist, so können wir denselben für die Tangente einsetzen und erhalten

$$\alpha = \frac{d}{2r}$$

und daraus

$$t = \frac{d}{4n\pi \cdot r}.$$

In dieser Zeit legt das Licht den Weg von S nach H_5 und wieder von H_5 nach S zurück; nennen wir diesen Weg $2l$, so erhalten wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes

$$c = \frac{2l}{t} = \frac{8n\pi rl}{d}.$$

Es bedarf somit zur Bestimmung von c der Messungen von d, r, l und n. Die Werte von r und l werden direkt mit genauen Mafsstäben genommen; besonders den Wert von l, der, wie wir später sehen werden, durch die Stellung der Spiegel und ihre Krümmungsradien kontroliert wird, läfst sich so mit grofser Genauigkeit ableiten.

Der Wert von d, der Verschiebung des Bildes, wird auf der Glasplatte g beobachtet; es erscheint dort nämlich das durch die teilweise Reflexion an der Platte pp erzeugte Bild n' genau soviel verschoben von dem Platze, den es bei der Ruhelage einnahm, wie die Verschiebung mm' beträgt, man hat daher mit dem Mikroskop nur diese Verschiebung zu messen, um den Wert von d zu erhalten. Bei seinen Versuchen regulierte Foucault die Rotation des Spiegels so, dafs die Verschiebung $0{,}7^{\text{mm}}$ oder 7 Teilstriche des reellen Bildes betrug.

Um eine solche Verschiebung des Bildes zu erhalten, bedurfte es begreiflicherweise einer sehr grofsen Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels; zur Erzielung derselben hatte Foucault einen besondern Rotationsapparat konstruiert, welchen Fig. 11 darstellt[1]). Der kleine Spiegel S ist auf der Axe DD' einer Turbine befestigt, welche sehr viel Ähnlichkeit mit einer Sirene hat. Die bewegende Kraft des Apparates ist ein konstanter, aus einem mit hohem Druck versehenen Blasebalge hervorströmender Luftstrom. Dieser tritt durch das Rohr a in den Windkasten A, dessen oberer Deckel in einem Kreise schräg eingeschnittene Löcher hat. Über dem Windkasten

[1]) Die Zeichnung und Beschreibung, welche Foucault selbst nicht gegeben hat, ist nach Jamin, Cours de physique, tome III. p. 370.

A befindet sich an der Axe DD' befestigt ein kreisförmiger Kasten C, welcher wie Fig. 12 in einem Horizontalschnitt zeigt, fächerförmig schräg, ähnlich den Schaufeln einer Schiffsschraube gestellte Querwände hat, und dessen Deckel den Zwischenräumen zwischen den Querwänden entsprechend oben ausgeschnitten ist. Der Kasten C und damit die den Spiegel tragende Axe wird so ganz in derselben Weise gedreht, wie die Scheibe der Sirene; der durch die schrägen Schnitte des untern Deckels austretende Luftstrom stöfst gegen die nach der andern Seite schräg gestellten Querwände von C und treibt dieselben vorwärts. Die Zahl der Umdrehungen, die so erreicht werden konnte, war 800 in einer Sekunde.

Damit die Rotation dauernd gleichmäfsig erhalten werden kann, ist durchaus erforderlich, dafs die Rotationsaxe zugleich eine freie Axe des

Fig. 11.

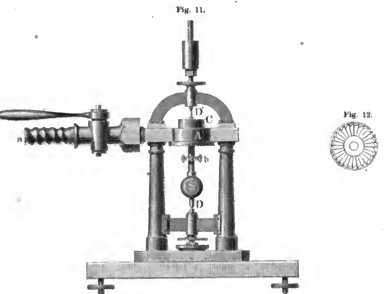


Fig. 12.

Apparates sei, oder dafs sie genau durch den Schwerpunkt der rotierenden Massen gehe. Zu dem Ende ist an der Axe ein kleines Reguliergewicht b angebracht, ein Ring von rechteckigem Querschnitt, durch dessen Ecken schwere vertikale Schrauben geführt sind. Die Regulierung geschieht durch vorsichtig geführte Feilstriche, mit denen an den verschiedenen Schrauben so lange fortgefahren wird, bis bei der Rotation nicht mehr das geringste Schleudern stattfindet.

Um die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels auf das genaueste zu messen, wandte Foucault einen eigenen Kunstgriff an, der darauf beruht, dafs man das Bild bei jeder Rotation des Spiegels nur einmal sieht. Man glaubt es allerdings wegen der Dauer des Lichteindrucks im Auge kontinuierlich zu sehen, aber diese Wahrnehmung setzt sich aus so vielen Einzelwahrnehmungen in der Sekunde zusammen, als der Spiegel Umdrehungen vollführt. Foucault stellte nun unmittelbar vor die das Bild aufnehmende

Glasplatte g eine Scheibe, in deren Rand feine Zähne eingeschnitten waren, so dafs er durch das Mikroskop gleichzeitig das Bild und die Zähne des Rades sehen konnte. Dreht sich die Scheibe, und man beobachtet den Rand bei kontinuierlicher Beleuchtung, so kann man die Zähne nicht erkennen; bei der intermittierenden Beleuchtung, welche das von den Spiegeln zurückkehrende Licht der Scheibe gibt, kann man die Zähne wieder sehen, da in dem kurzen Moment, die jede einzelne Beleuchtung dauert, die Zähne nur einen kleinen Weg zurücklegen. Wird die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe so gewählt, dafs jedesmal in der Zwischenzeit zwischen dem Aufblitzen zweier Bilder ein Zahn das Gesichtsfeld passiert, so ist die Scheibe bei dem zweiten Aufblitzen des Bildes scheinbar wieder genau in derselben Lage als bei dem ersten Aufblitzen, und der Erfolg ist, dafs die Scheibe dem Beobachter ganz still zu stehen scheint. Ist das erreicht, so hat man nur die Anzahl der Zähne der Scheibe mit der Anzahl der Drehungen derselben in der Sekunde zu multiplizieren, um die Anzahl der aufblitzenden Bilder, also die Zahl n der Rotationen des Spiegels zu erhalten. Da man der Scheibe eine grofse Anzahl Zähne geben kann, so ist die Rotation dieser Scheibe nur eine langsame, die durch ein angebrachtes Zählerwerk leicht zu kontrolieren ist.

Diese Art der Zählung bietet gleichmäfsig eine Kontrole, ob die Rotation des Spiegels eine ganz gleichmäfsige ist, denn wenn die Zwischenzeit zwischen je zwei Beleuchtungen verschieden ist, kann das scheinbare Stillstehen der Scheibe nicht eintreten. Die Scheibe scheint rückwärts zu gehen, wenn die Drehung etwas langsamer, vorwärts, wenn sie etwas rascher ist, als vorher angenommen wurde. Die Apparate Foucault's, vom Mechaniker Froment gearbeitet, waren so ausgezeichnet, dafs das scheinbare Stillestehen auf ganze Minuten eintrat, eine Zeit, die hinreichend lang war, um die Verschiebung d mit Genauigkeit zu messen.

Details über seine einzelnen Versuche gibt Foucault nicht an, er teilt nur als schliefsliches Resultat derselben mit, dafs sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des Lichtes der Wert,

$$c = 298\,000\,000 \text{ Meter}$$

oder in geographischen Meilen

$$c = 40\,160 \text{ Meilen}$$

ergebe.

Nach der Foucaultschen Methode mit einer kleinen aber nicht unwesentlichen Abänderung hat im Jahre 1879 Michelson die Lichtgeschwindigkeit bestimmt. Die Verbesserung bestand darin, dafs Michelson eine Linse von sehr grofser Brennweite anwandte und den Spalt m sowie den rotierenden Spiegel so aufstellte, dafs das Licht nach dem Durchtritt durch die Linse fast als paralleles Strahlenbündel weiter ging. Dieses Strahlenbündel wurde in einer beträchtlichen Entfernung, wie bei der Fizeauschen Methode an einem ebenen Spiegel reflektiert und kehrte durch die Linse und über den rotierenden Spiegel zurück. Da das Licht auf diese Weise erheblich gröfsere Strecken zurücklegte, war die Verschiebung des von den zurückkehrenden Strahlen entworfenen Bildes eine erheblich gröfsere, so dafs bei der Messung derselben eine beträchtlich gröfsere Genauigkeit erreicht werden konnte. Die von Michelson in dieser Weise erreichte Verschiebung des

Bildes war ungefähr 200mal gröfser als die von Foucault erhaltene. Als Resnltat aus 100 Versuchsreihen erhielt Michelson

$$c = 299\,820 \text{ Kilometer},$$

eine Zahl, die von der Cornuschen sich um 580 Kilometer, also um fast genau das Doppelte der von Cornu angenommenen Unsicherheit unterscheidet, dagegen mit der von Helmert aus den Cornuschen Beobachtungen abgeleiteten Zahl fast identisch ist. Da Michelson nnr eine kurze Beschreibung seiner Methode gegeben hat, läfst sich das Gewicht der von ihm gegebenen Zahl nicht genau bestimmen; dafs dieser Zahl indes ein grofses Gewicht beizulegen ist, folgt daraus, dafs die in den einzelnen Reihen erhaltenen Werte sich im Maximum nur um 450 Kilometer von einander unterscheiden.

Als den wahrscheinlichsten Wert für die Lichtgeschwindigkeit leitet Todd[1]) aus den Beobachtungen von Foucault, Cornu und Michelson die Zahl

$$c = 299\,920 \text{ Kilometer}$$

ab, die er bis auf $\pm$ 70 Kilometer für sicher hält, so dafs die Geschwindigkeit zwischen 299 990 und 299 850 liegt.

Die nahe Übereinstimmnng zwischen der so gemessenen und aus den astronomischen Beobachtnngen abgeleiteten Geschwindigkeit des Lichtes liefert den sichern Beweis, dafs das Licht, aus welcher Quelle es anch entstammen mag, sich immer mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, dafs die Qnelle, aus der es herrührt, auf die Geschwindigkeit ganz ohne Einflufs ist, ein Satz, der für unsere Auffassung von der Natur des Lichtes von sehr grofser Bedeutung ist.

Dieser Satz gestattet gleichzeitig aus diesen physikalischen Messnngen die Dimensionen des Weltsystems sicherer abzuleiten als aus der astronomischen Bestimmung der Sonnenparallaxe, indem man die aus der Verfinsterung der Jnpiterstrabanten sich ergebende Zeit, welche das Licht braucht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen, diesen berechnet, oder indem man aus der Aberrationskonstanten die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn und aus dieser die Gröfse der Erdbahn berechnet. Indem Todd[2]) die Unsicherheitsgrenzen der astronomischen Beobachtungen disknutiert, findet er für die Sonnenparallaxe den Wert 8,"808 $\pm$ 0,006 und für den mittlern Radius der Erdbahn 149 345 000 Kilometer.

§ 5.

Messung der Lichtstärke. Wenn das Licht von einer Lichtqnelle aus nach allen Richtungen sich fortpflanzt, so tritt eine Schwächung seiner Stärke ein, das heifst die von der Lichtqnelle entfernteren Punkte werden weniger stark beleuchtet. Das ist eine durch so viele bekannte Thatsachen erwiesene Erfahrung, dafs es zu deren Nachweis keines besondern Versuches bedarf.

Je weiter wir uns von einer Lichtqnelle entfernen, um so schwächer wird das Licht, und es fragt sich nnn, nach welchem Gesetze mit der Entfernung das Licht abnimmt.

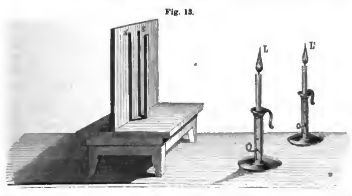
---

[1]) *Todd*, American Journal of Arts and Sciences. III Series vol. XIX. 1880.
[2]) *Todd*, a. a. O.

Man kann Lichtstärken nur messen, indem man die Beleuchtung einer Fläche durch zwei verschiedene Lichter vergleicht, da das Licht, gerade so wie der Schall nur durch die Wahrnehmung mittels des Ohres zum Schall wird, nur durch die Wahrnehmung des Auges gewissermafsen zum Licht wird. Besteht auch die Ursache der Beleuchtung fort, so existiert das Licht für uns nicht, wenn wir das zur Wahrnehmung des Lichtes allein fähige Organ, das Auge, schliefsen. Deshalb gibt es für das Licht nicht so absolute Mafse als für Längen, oder Gewichte; alle Apparate zur Messung der Lichtstärke, die sogenannten Photometer beruhen mehr oder weniger auf subjektiver Schätzung. Das Princip der Photometer ist allgemein folgendes. Zwei an einander grenzende Stücke einer Fläche werden von verschiedenen Lichtquellen beleuchtet, die hellere Lichtquelle wird dann durch Entfernung der Lichtquelle von der Fläche geschwächt, so lange, bis beide Stücke auf das Auge den gleichen Lichteindruck machen. Kennt man dann die Stärken der beiden Lichtquellen aus andern Erfahrungen, so kann man daraus das Gesetz ableiten, nach welchem die Lichtstärken mit der Entfernung abnehmen, und kennt man dieses Gesetz, so kann man rückwärts mit Hülfe desselben die Stärken der Lichtquellen erhalten.

Das Photometer von Rumford[1]) besteht aus einem vertikalen weifsen Schirme, vor welchem in geringer Entfernung ein vertikaler Stab von Holz oder nichtglänzendem Metall aufgestellt ist (Fig. 13). Bringt man in

Fig. 13.



einiger Entfernung von dem Photometer zwei Lichtquellen L und L' an, so entstehen auf dem Schirme nahe bei einander zwei Schatten, S von L und S' von L', an den Stellen, denen die Säule die Lichter verdeckt. Jeder dieser Schatten ist aber von der ihn nicht veranlassenden Lichtquelle, also S' von L und S von L' beleuchtet.

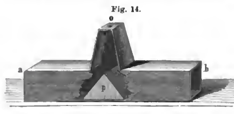
Wenn beide Schatten dem Auge gleich hell erscheinen, so schliefst man daraus, dafs die Stärke des sie beleuchtenden Lichtes dieselbe ist. Denn welches auch sonst die Beleuchtung des Schirmes ist, ob er aufser dem der Lichter noch anderes Licht erhält oder nicht, die beiden Schatten unterscheiden sich nur dadurch, dafs der eine von der einen, der andere von der andern Lichtquelle Licht erhält. Ein Unterschied ihrer Helligkeit

[1]) *Rumford*, Gilberts Annalen XLV und XLVI.

kann deshalb nur daher rühren, dafs das eine Licht heller ist als das andere. Ist der Abstand $S'L = SL'$, so folgt daraus, da die beiden Lichter in gleichen Abständen vom Schirme dieselbe Helligkeit hervorbringen, dafs die Lichter von gleicher Intensität sind. Ist der Abstand der beiden Lichter verschieden, so schliefsen wir daraus auf eine verschiedene Helligkeit der beiden Lichter.

Das Photometer von Ritchie[1]) beruht auf einem ganz ähnlichen Princip. In der Mitte eines parallelepipedischen Kastens *ab* (Fig. 14) ist ein rechtwinkliges hölzernes Prisma so aufgestellt, dafs die Kante, in der sich die Seiten unter einem rechten Winkel schneiden, horizontal und zur Längsrichtung des Kastens senkrecht liegt. Die beiden, gegen die horizontale Richtung um 45° geneigten Flächen sind mit reinem weifsen Papier überzogen. Gerade über der Prismenkante ist in der obern Wand des Kastens ein Loch angebracht, auf welchem ein kurzes Rohr steht, dessen Endfläche bis auf ein kleines, der Gröfse des Auges entsprechendes rundes Loch verschlossen ist. Sieht man durch dieses auf das Prisma *p* hinab, so wird das Gesichtsfeld gerade durch die Prismenkante geschnitten und man sieht zugleich beide Seitenflächen des Prismas.

Fig. 14.



In den innen geschwärzten Kasten kann nur von den offenen Endflächen her Licht einfallen, welches daher die beiden gegen die Axe des Kastens gleich geneigten Seiten gleichmäfsig beleuchtet. Wird nun in einem dunkeln Zimmer jeder der offenen Endflächen des Kastens ein Licht gegenübergestellt, so beleuchtet jedes der Lichter nur eine der Prismenseiten und das bei *O* auf das Prisma hinabschauende Auge übersieht die beiden an einander grenzenden von den verschiedenen Lichtern beleuchteten Flächenstücke. Die Lichter werden so lange verschoben, bis die Beleuchtung der beiden Flächen dem Auge ganz gleich erscheint.

Diese beiden Photometer beruhen also lediglich auf der Schätzung des Beobachters, ob zwei Flächen den gleichen Grad der Beleuchtung geben; die mittels derselben erhaltenen Resultate können daher auf grofse Genauigkeit keinen Anspruch machen. Bessere Resultate gibt unzweifelhaft das Photometer von Bunsen.

Weifses Papier ist nicht durchsichtig, aber durchscheinend; das heifst wenn man einen ausgebreiteten Bogen von hinten beleuchtet, so nimmt man durch das Papier hindurch einiges Licht wahr. Tränkt man das Papier mit Fett, mit Öl oder Stearin, so wird es mehr durchscheinend; ein Stearinfleck in einem sonst nicht befetteten Bogen weifsen Papiers sieht, wenn das Papier von hinten heller beleuchtet ist als von vorn, heller aus als die nicht befettete Umgebung, es erscheint hell auf dunkelm Grunde.

Beleuchtet man aber ein mit Stearin getränktes Papier von vorn, so erscheint es, mit nicht getränktem Papier verglichen, dunkler; ein Stearin-

[1]) *Ritchie,* in Schweiggers Jahrbuch etc. XLVI.

fleck in einem Bogen weifsen Papieres erscheint daher, von vorn stärker beleuchtet als von hinten, dunkel auf hellem Grunde.

Der Grund dieser Erscheinung ist der, dafs befettetes Papier mehr Licht durchläfst, dafür aber in demselben Verhältnisse weniger Licht zurückwirft als das nicht befettete Papier, die Summe des zurückgeworfenen und durchgelassenen Lichtes ist für beide Papiere gleich, und zwar bis auf einen kleinen hier nicht zu beachtenden Bruchteil, welcher absorbiert wird, gleich dem das Papier beleuchtenden Lichte.

Nennen wir daher die Menge des von einer Seite auf das ausgebreitete Papierblatt fallenden Lichtes M, so zerlegt sich diese Menge in zwei Teile, deren einer durchgelassen, deren anderer zurückgeworfen wird; sei ersterer gleich D, letzterer gleich Z, so ist

$$M = D + Z$$

für den nicht befetteten Teil des Papiers. Für den befetteten Teil hat D und Z einen andern Wert D' und Z', aber wiederum ist

$$M = D' + Z'.$$

Lassen wir jetzt auch von der andern Seite her die Lichtmenge M auf das Papier fallen, so zerlegt sich diese gerade so an dem befetteten sowohl als an dem nicht befetteten Papiere.

Sehen wir das Papier von einer Seite an, so gelangt von dem nicht befetteten Papier in unser Auge das von der andern Seite durchgelassene Licht D und das zurückgeworfene Licht Z, von dem befetteten Papier ebenso das durchgelassene D' und das zurückgeworfene Z'. Da nun aber

$$D + Z = D' + Z',$$

so gelangt von dem befetteten Papier dieselbe Lichtmenge in unser Auge als von dem nicht befetteten, der Stearinfleck erscheint daher genau so hell als das umgebende Papier.

Diese Erscheinung benutzt Bunsen in seinem Photometer. Auf einem vertikal stehenden Rahmen wird ein Blatt Papier ausgespannt, in seiner Mitte ein kleiner Stearinfleck gemacht, und hinter denselben ein Licht von konstanter Helligkeit in einer bestimmten Entfernung aufgestellt[1]). Um die geringe Menge des absorbierten Lichtes ganz unschädlich zu machen, wodurch obige Rechnung etwas geändert würde, vergleicht man nicht mit diesem hinter dem Schirme aufgestellten Lichte die Stärke des Lichtes, dessen Intensität man bestimmen will, sondern verfährt folgendermafsen. Man bringt zunächst vor den Schirm das Licht, mit welchem man andere vergleichen will, und stellt es so, dafs der Stearinfleck in der Mitte des Schirmes verschwindet, und ersetzt dann dieses Licht durch das zu untersuchende und bestimmt den Abstand, in welchem man dasselbe von dem Schirme aufstellen mufs, damit wieder der Stearinfleck verschwindet. Dann ist die Beleuchtung des Schirmes von beiden Lichtern genau dieselbe.

[1]) Nach *Töpler* Wiedem. Ann. Bd. VIII stellt man einen solchen durchscheinenden Fleck auf undurchsichtiger Fläche noch besser dadurch her, dafs man zwischen zwei Stücke durchscheinenden Pergamentpapiers eine Scheibe weifsen Papiers legt, welche in der Mitte ein kreisförmiges Loch hat. Durch das zwischengelegte weifse Papier wird die Fläche undurchsichtig, in der Mitte, wo das Papier fehlt, bleibt die doppelte Lage Pergamentpapier durchscheinend.

Denn nennen wir die Lichtmenge, welche der befettete Fleck von dem Lichte durchläfst, welches von dem hinter dem Schirme aufgestellten Lichte auf den Schirm auffällt, a, und diejenige, welche das nicht befettete durchläfst, b, nennen wir ferner die von dem ersten Lichte auf den Schirm fallende Lichtmenge M, und bezeichnen dann die Lichtmenge, welche der befettete Fleck von diesem zurückwirft, mit zM, diejenige, welche das nicht befettete Papier zurückwirft, mit $z'M$, so haben wir, wenn der Fleck nicht sichtbar ist,

$$a + zM = b + z'M.$$

Denn das Verschwinden des Fleckes beweist uns, dafs von dem befetteten Teile des Schirmes gerade so viel Licht in unser Auge kommt als von dem nicht befetteten Flecke. Aus obiger Gleichung folgt

$$M = \frac{a-b}{z'-z}.$$

Ist die Lichtmenge, welche von dem zweiten mit dem ersten zu vergleichenden Lichte auf den Schirm fällt, gleich M', wenn der Fleck wiederum verschwunden ist, so ist wieder die von dem befetteten Papier zurückgeworfene Lichtmenge zM' und die vom umgebenden Papier $z'M'$. Da nun der Fleck verschwindet, so ist wie vorhin

$$a + zM' = b + z'M',$$

$$M' = \frac{a-b}{z'-z}.$$

Da a und b sowie z' und z in diesem Falle denselben Wert haben, wie vorhin, so folgt

$$M = M',$$

oder die von beiden Lichtern auf den Schirm fallende Lichtmenge ist in beiden Fällen dieselbe. Kennt man nun die in beiden Fällen von den Lichtern ausgesandte Lichtmenge, so kann man aus den Abständen, in welchen die Lichter den Schirm gleich stark beleuchten, das Gesetz bestimmen, nach welchem die Lichtwirkung mit der Entfernung von der Lichtquelle abnimmt. Kennt man aber das Gesetz, so kann man daraus das Verhältnis des von beiden Lichtquellen ausgesandten Lichtes bestimmen.

Wenden wir eines dieser Photometer an, um die Lichtwirkungen einer Lichtquelle in den Abständen 1, 2, 3 ... zu vergleichen, so sieht man deutlich, dafs das Licht mit der Entfernung geschwächt wird; denn wenn z. B. beim Bunsenschen Photometer der Fleck verschwindet, wenn das Licht in der Entfernung von 1 Meter vom Schirme angebracht ist, so wird der Fleck dunkel, wenn wir das Licht dem Schirme nähern, ein Beweis, dafs er von vorn mehr beleuchtet wird als von hinten, entfernen wir das Licht, so wird der Fleck heller, ein Beweis, dafs er jetzt von hinten stärker beleuchtet wird als von vorn.

Hierbei zeigt sich aber, dafs der Unterschied in der Beleuchtung um so vernehmlicher ist, je gröfser die Differenz der Abstände des Lichtes im Vergleiche zur Entfernung des Lichtes ist, bei welcher der Fleck verschwand. Das heifst, verschwand der Fleck in einem Falle, wenn die Entfernung des Lichtes vom Schirme ein Meter war, so erscheint derselbe sehr hell auf

dunklem Grunde, wenn wir das Licht in die Entfernung zweier Meter bringen; verschwand der Fleck aber in einem andern Falle, wenn das Licht in der Entfernung von 10 Meter vom Schirme anfgestellt war, so tritt er nur kaum sichtbar hervor, wenn wir das Licht wieder um ein Meter entfernen, also es um $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Entfernung fortrücken.

Wendet man ein Bunsensches Photometer an, in welchem die Lichter auf beiden Seiten von dem Schirme verschoben werden können, so läfst sich leicht zeigen, dafs die Abstände der beiden Lichtquellen vom Schirme, damit der Fleck, wenn wir den Schirm stets von einer Seite betrachten, zum Verschwinden kommt, immer in demselben Verhältnisse stehen müssen. Es folgt daraus, dafs die von einer gegebenen Lichtqnelle auf eine gegebene Fläche fallende Lichtmenge nach irgend einer Potenz der Entfernung der Lichtqnelle von der Fläche abnimmt. Denn damit der Fleck bei der Betrachtung des Schirmes von der einen Seite verschwindet, müssen die von den beiden Lichtquellen auf den Schirm fallenden Lichtmengen in einem konstanten Verhältnisse stehen. Nennen wir nämlich das von der hintern Flamme auf den Schirm fallende Licht M_1, das von der befetteten Stelle durchgelassene Licht, das wir vorhin mit a bezeichneten, dM_1; das von dem nicht befetteten Teile durchgelassene, vorhin mit b bezeichnete, jetzt $d'M_1$, so wird die das Verschwinden des Flecks bedingende Gleichung

$$dM_1 + zM = d'M_1 + z'M$$

$$\frac{M}{M_1} = \frac{d-d'}{z'-z}.$$

Das Verhältnis $\frac{M}{M_1}$ hängt somit nur von der Beschaffenheit des Photometers, welches die Werte d, d', z, z' bedingt, ab, ist also für ein gegebenes Photometer konstant.

Befinden sich bei einem Versuche, bei dem das Verschwinden des Fleckes erreicht ist, die beiden Lichtquellen in der Entfernung r_1 und r von dem Schirme, nnd sind m_1 und m die Lichtmengen, welche die Flammen in der Einheit der Entfernung auf den Schirm des Photometers werfen, so ist, wenn die Lichtwirkung nach irgend einer Potenz der Entfernung abnimmt,

$$M = \frac{m}{r^n}; \quad M_1 = \frac{m_1}{r_1^{\,n}}$$

somit

$$\frac{M}{M_1} = \frac{m r_1^{\,n}}{m_1 r^n}$$

oder

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^n = \frac{m_1}{m} \cdot \frac{d-d'}{z'-z}$$

oder auch

$$\frac{r_1}{r} = \sqrt[n]{\frac{m_1}{m} \cdot \frac{d-d'}{z'-z}}.$$

Unter Voraussetzung, dafs die Flammen bei diesen Versuchen konstante Helligkeit haben, ist die rechte Seite der Gleichung konstant. Ergibt also der Versuch, dafs $\frac{r_1}{r}$ konstant ist, so folgt, dafs die von einer gegebenen

Lichtquelle auf eine gegebene Fläche fallende Lichtmenge nach irgend einer Potenz der Entfernung abnimmt.

In mehreren ausführlichen Versuchsreihen fand Carstaedt diese Konstanz in dem Verhältnisse der Entfernungen der beiden Flammen von dem Schirme, wenn der Fleck verschwand, bestätigt[1]).

Hieraus folgt, dafs die Schwächung des Lichtes nicht einer Vernichtung oder Verschluckung durch die Luft zugeschrieben werden kann, in welcher das Licht sich fortpflanzt. Denn in dem Falle müfste eine Luftschicht von gleicher Dicke immer dieselbe Lichtmenge verschlucken. Würde also das Verschwinden des Fleckes in der Entfernung r_1 der hintern, r der vordern Flamme eintreten, und würde nun etwa durch eine Vergröfserung des Abstandes auf $r_1 + R$ das Licht auf die Hälfte geschwächt, nähme also die Luftschicht R an der hintern Seite des Schirmes die Hälfte des an ihrer Vorderfläche ankommenden Lichtes auf, so müfste das auch an der andern Seite des Schirmes der Fall sein, oder durch eine Vergröfserung des Abstandes r auf $r + R$ müfste auch hier das Licht auf die Hälfte geschwächt werden. Der Fleck müfste also stets wieder verschwinden, wenn r und r_1 um gleiche Gröfsen zugenommen hätten.

Wir müssen daher schliefsen, dafs es in der Natur des Lichtes liegt, dafs die Stärke der Beleuchtung abnimmt, wenn wir uns von der Lichtquelle entfernen.

Die Natur des Lichtes mag sein, welche sie will, so liegt schon in der § 1 entwickelten Thatsache, dafs das Licht von einer Lichtquelle aus nach allen Richtungen geradlinig sich ausbreitet, der Grund für die Schwächung des Lichtes. Denn denken wir uns z. B. eine kugelförmige Lichtquelle, etwa eine glühende Metallkugel, von der in jedem Augenblicke eine gegebene Lichtmenge ausstrahlt, so wird diese Lichtmenge nach einer gewissen Zeit eine Kugelfläche beleuchten, deren Radius gleich ist dem Produkte aus dieser Zeit und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Nach der doppelten Zeit hat sich das Licht nach der Richtung der Kugelradien doppelt so weit entfernt, es beleuchtet eine Kugel vom doppelten Radius. Da nun dieselbe Lichtmenge eine so viel gröfsere Fläche beleuchtet, so ist klar, dafs die Beleuchtung jedes gegebenen Flächenstückes um so viel schwächer ist als diese Fläche, auf der sich das Licht verbreitet, gröfser ist. Denn wir dürfen es wohl als einen Grundsatz ansehen, dafs die Helligkeit der Beleuchtung einfach proportional ist der Lichtmenge, welche eine Fläche erhält. Die Fläche einer Kugel vom doppelten Radius hat die vierfache Gröfse. In der Kugel vom doppelten Radius wird ein gegebenes Flächenstück deshalb nur ein Viertel der Strahlen erhalten, welche es in der Kugel vom Radius 1 erhielt, da sich dieselbe Lichtmenge über eine Fläche von vierfacher Gröfse verbreitet. Die Helligkeit der Beleuchtung wird daher nur $\frac{1}{4}$ sein. Allgemein, verbreitet sich das Licht über eine Fläche vom Radius r, so ist die Gröfse der Kugel proportional r^2, jedes Flächenstück erhält daher nur $\frac{1}{r^2}$ Licht von dem, welches es in der Kugel vom Radius 1

[1]) *Carstaedt*, Poggend. Ann. Bd. CL. Es beruht indes, wie obige Entwicklung zeigt, auf einem Irrtume, wenn Carstaedt glaubt, auf diese Weise zeigen zu können, dafs die Lichtstärke nach dem Quadrate der Entfernungen abnähme. Der Wert des Exponenten n läfst sich durch derartige Versuche nicht bestimmen.

erhalten würde, die Helligkeit der Beleuchtung ist daher nur $\frac{1}{r^2}$. Es folgt daraus, dafs die Lichtstärke bei einer Entfernung von der Lichtquelle abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung wachsen.

Man kann diesen Satz mit Hülfe der vorhin erwähnten Photometer wenigstens annähernd experimentell nachweisen. Denn nach dem Grundsatze, dafs eine Fläche in demselben Verhältnisse stärker beleuchtet wird, als sie mehr Licht empfängt und nach der gewifs berechtigten Annahme, dafs n gleiche Lichter zusammen $n$mal so viel Licht aussenden als jedes einzelne, wird eine Fläche von n Lichtern im Abstande 1 $n$mal mehr Licht empfangen als von einem Lichte.

Wenn wir das Bunsensche Photometer einmal mit einem Lichte beleuchten und den senkrechten Abstand von der Mitte des Schirmes bestimmen, in welchem das Licht aufgestellt werden mufs, damit der Fleck verschwindet, und dann n Lichter parallel unmittelbar neben einander stellen, so dafs die Ebene der Flammen der des Schirmes parallel ist, so finden wir, dafs jetzt der Abstand, in dem wir diese Lichter aufstellen müssen, damit der Fleck verschwindet, sich zu dem Abstande im ersten Falle verhält wie die Quadratwurzel von n zu 1. Vier Lichter bringen also in der doppelten, neun in der dreifachen, sechzehn in der vierfachen Entfernung den Fleck zum Verschwinden.

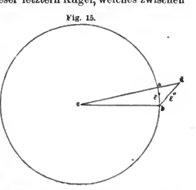
Da 4, 9, 16 Lichter, welche nach obigem Grundsatze in der Entfernung 1 eine Fläche 4, 9, 16mal so stark beleuchten als ein Licht, in der 2, 3, 4fachen Entfernung dieselbe Helligkeit hervorbringen, wie ein Licht in der einfachen Entfernung, so folgt, dafs die Lichtstärken abnehmen, wie die Quadrate der Entfernungen von der Lichtquelle wachsen.

Man wird jedoch bei einem solchen Versuche das Gesetz nur annähernd bestätigt finden, da die Voraussetzungen, unter denen das Gesetz theoretisch abgeleitet wurde, in dem Versuche nicht erfüllt sind.

Wir setzten nämlich voraus, dafs das Licht von einer glühenden Kugel ausstrahle und eine Kugelfläche beleuchte.

Jedes Flächenelement ε' (Fig. 15) dieser letztern Kugel, welches zwischen den Radien ca und cb liegt, erhält das in dem Strahlenkegel cab sich fortpflanzende Licht. Nehmen wir die Kugel, welche das Licht ausströmt, so klein an, dafs wir sie als leuchtenden Punkt betrachten können, und das Element ε' so klein, dafs wir die Strahlen ac und cb als parallel betrachten können, so steht das Element ε' auf den es beleuchtenden Strahlen senkrecht. Das Flächenelement ε'', welches ebensoweit von c entfernt ist als ε', aber mit ε' irgend einen Winkel α bildet, und welches von einem Kegel umschrieben wird, dessen Spitze c und dessen Basis ε' ist, erhält nun gerade soviel Licht als das Flächenelement ε'. Die Lichtmenge, welche dann der Teil dieses Elementes erhält, welcher dem Elemente ε' an Gröfse gleich ist, ist aber soviel

Fig. 15.



kleiner als die Lichtmenge m, welche ε' erhielt, als das Flächenelement ε'', über welches sich die Lichtmenge m jetzt ausbreitet, gröſser ist wie ε'. Die Lichtmenge ist daher $m \cdot \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$. Der Quotient $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ ist gleich dem Cosinus des Winkels abd, welchen ε'' mit ε' bildet. Dieser Winkel ist aber gleich dem, welcher die Richtung der das Flächenelement treffenden Lichtstrahlen mit der auf ε'' senkrechten Richtung bildet. Nennen wir diese Senkrechte das Einfallslot, und den Winkel, welchen die Strahlen mit dem Einfallslote bilden, den Einfallswinkel, so ergibt sich daraus, daſs die Beleuchtung, welche eine Fläche erfährt, nicht nur umgekehrt proportional ist dem Quadrate des Abstandes der beleuchteten Fläche von der Lichtquelle, sondern auch proportional ist dem Cosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen.

Daſs der Einfallswinkel der Lichtstrahlen auf die Intensität der Beleuchtung von Einfluſs ist, davon kann man sich durch einen Versuch mit dem Bunsenschen Photometer überzeugen. Macht man den Schirm um eine vertikale Axe drehbar, welche durch den Stearinfleck hindurchgeht, und sorgt man dafür, daſs das hinter dem Schirme angebrachte Licht immer in der Höhe des Fleckes und in der zur Schirmfläche senkrechten durch den Fleck gehenden Richtung bleibt, so tritt bei einer Drehung des Schirmes der Fleck wieder hell auf dunklem Grunde hervor, wenn derselbe verschwand, als das Licht vor dem Schirme so gestellt war, daſs eine von dem Lichte auf die Ebene des Schirmes herabgelassene Senkrechte den Fleck traf. Das Hervortreten des Fleckes hell auf dunklem Grunde beweist, daſs die Beleuchtung der Vorderfläche des Schirmes mit dem Wachsen des Einfallswinkels abgenommen hat.

Wie dieser Umstand auf den vorhin erwähnten Versuch störend einwirken kann, sieht man leicht; die von einem Lichte ausgehenden Strahlen treffen den Schirm alle merklich parallel, wenn wir aber nun vier oder neun Flammen neben einander aufstellen, so bilden die von den äuſsersten Flammen zum Schirm sich fortpflanzenden Strahlen mit dem Einfallslote schon merkliche Winkel. Die Wirkung der äuſsern Strahlen ist daher eine andere als die der centralen; man sieht, wie aus diesem Grunde bei dem Versuche sich die Wirkung der Strahlen nicht einfach summiert, wie wir es voraussetzten.

Auch der Winkel, unter welchem die Lichtstrahlen die Oberfläche eines leuchtenden Körpers verlassen, ist von Einfluſs auf die Helligkeit, welche sie auf der beleuchteten Fläche erzengen. Es ist eine bekannte Thatsache, daſs eine glühende Kugel uns als eine ganz gleichmäſsig glühende Scheibe erscheint. Ist K Fig. 16 eine solche Kugel, von der sich in groſser Entfernung das Auge befindet, so sehen wir die Kugel als kreisförmige Scheibe vom Durchmesser pp. Da uns diese Scheibe als ganz gleichförmig leuchtend erscheint, so folgt, daſs die sehr kleinen Segmente ab, cd, deren ersteres parallel zu pp ist, während das andere mit pp den Winkel α bildet, in das weit entfernte Auge A die gleiche Lichtmenge senden, wenn die Projektionen $c'd'$ von cd und $a'b'$ von ab von gleicher Gröſse sind.

Nun ist aber $$cd = \frac{c'd'}{\cos\alpha} = \frac{a'b'}{\cos\alpha}$$

und $$ab = a'b'.$$

Das uns gleich hell erscheinende Segment *cd*, das mit *pp* den Winkel α bildet, ist also im Verhältnis von 1 zu cos α gröfser wie *ab*; ein Stück dieses Segmentes, welches genau die Gröfse von *ab* hat, also gleich $cd \cdot \cos \alpha$ ist, sendet uns nun auch soviel weniger Lichtstrahlen zu, als es kleiner ist wie *cd*, es wird daher eine gegebene Fläche in demselben Verhältnisse weniger beleuchten.

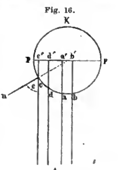


Fig. 16.

Der Winkel α ist gleich dem Winkel *e*, welchen die von *cd* nach *A* gesandten Lichtstrahlen mit der zu der kleinen Fläche *cd* senkrechten Richtung *cn* bilden. Nennen wir diesen Winkel den Ausflufswinkel, so folgt aus dem Obigen, dafs die Beleuchtung, welche eine gegebene Fläche von einer leuchtenden Fläche erhält, proportional ist dem Cosinus des Ausflufswinkels der Lichtstrahlen[1]).

Wenn wir demnach das theoretisch abgeleitete Gesetz über die Abnahme der Lichtstärke mit der Entfernung von der Lichtquelle experimentell prüfen wollen, oder dasselbe zur Vergleichung der Stärke zweier Lichtquellen, etwa zweier leuchtender Flammen benutzen wollen, müssen wir darauf achten, dafs sowohl die Einfallswinkel als die Ausstrahlungswinkel bei den Versuchen denselben Wert haben.

§ 6.

Über die Natur des Lichtes. Emissionshypothese[2]). In den bisherigen Entwicklungen haben wir es durchaus unentschieden gelassen, welches das Wesen des Lichtes ist und nur die Thatsachen betrachtet, welche sich uns bei ungestörter Verbreitung des Lichtes darbieten. Selbst die Entwicklung des Gesetzes, nach welchem die Lichtintensität abnimmt, wenn wir uns von der Lichtquelle entfernen, stützt sich nur auf die Thatsache, dafs das Licht von einem Mittelpunkte aus nach allen Richtungen sich geradlinig ausbreitet. Es fragt sich nun, was ist es, was sich fortpflanzt und ausbreitet, und zu uns gelangt, uns die Empfindung der Helligkeit gibt.

Es gibt zwei bestimmte und denkbare Vorstellungsarten über das, was

---

[1]) *Lambert*. Photometria etc. Augsburg 1760. *Lambert* selbst und später *Beer* in seinem „Grundrifs des photometrischen Kalküls", Braunschweig 1854, suchen auch dieses Gesetz ähnlich wie die beiden andern aus dem Wesen der Lichtausbreitung abzuleiten. *Zöllner* (Photometrische Untersuchungen, Leipzig 1865) macht indes mit Recht darauf aufmerksam, dafs dieses Gesetz nur ein rein empirisches ist, und sich lediglich auf die auch in obiger Ableitung zu Grunde gelegte Beobachtung gründet, dafs eine leuchtende Kugel oder ein leuchtender Cylinder, etwa ein glühender Draht, senkrecht zur Axe betrachtet, als gleichmäfsig leuchtende Flächen erscheinen. Es hat dieses Gesetz, wie der nächste Paragraph zeigt, eine ganz bestimmte Beschaffenheit der leuchtenden Körper zur Voraussetzung.

[2]) *Newton*, Optice liber I. Genevae et Lausannae 1740.
Herschel, „On Light". Auch übersetzt von *Schmidt*, Stuttgart 1831.
Biot, Traité de Physique experimentale et mathématique. Paris 1810. Auch übersetzt von *Fechner*. Leipzig 1829. Bd. IV.

dem Lichte zu Grunde liegt. Entweder, und das ist das Naheliegendste, ist das, was im Lichte sich fortpflanzt, ein und derselbe Körper, welcher nach und nach an den verschiedenen Stellen seiner Bahn auftritt, oder es ist ein Bewegungszustand, der in einer Reihe von Körpern, welche die Bahn der Lichtstrahlen ausfüllen, und von denen jeder innerhalb gewisser Grenzen sich bewegt, allmählich fortschreitet. Beispiele beider Arten fortschreitender Bewegung haben wir kennen gelernt; in dem geworfenen Körper, der nach und nach an den verschiedenen Stellen seiner Bahn sich befindet, für die erste Art; in der dem Schalle zu Grunde liegenden Wellenbewegung, bei der nach und nach die schwingende Bewegung der ihren Ort im Raume nicht verlassenden Teile der tönenden Körper an den verschiedenen Stellen der Bahn des Schalles auftrat, ein ausgedehntes Beispiel für die fortschreitende Bewegung der zweiten Art.

Beide Bewegungsarten lassen sich zur Erklärung der Lichterscheinungen anwenden; die erste liegt der Newtonschen Emissionshypothese zu Grunde, die letztere der von Huyghens zuerst aufgestellten Undulationstheorie. Es wird ein Teil unserer Aufgabe in der Behandlung der Lehre vom Lichte sein, diese Hypothesen gegen einander abzuwägen, um so zu entscheiden, was wir als das Wesen des Lichtes anzusehen haben.

Newton sieht das Licht an als materielle Teilchen, welche von den leuchtenden Körpern ausgeschlendert werden und denselben Gesetzen folgen, wie die geworfenen Körper. Wenn diese Körperteilchen in unser Auge dringen und auf die Netzhaut stofsen, so erhalten wir die Empfindung des Lichtes. Diese Lichtteilchen sind mit anziehenden und abstofsenden Kräften begabt, und werden auch von den Körpern bald angezogen, bald abgestofsen. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist die der Fortpflanzung des Lichtes.

Die bisher betrachteten Erscheinungen stehen mit dieser Annahme im Einklang. Nur die leuchtenden Körper enthalten solche Teilchen, oder sind durch irgend einen in ihnen vorgehenden Procefs imstande, sie auszuwerfen. Wenn aber die von einem leuchtenden Körper ausgehenden Lichtteilchen auf einen dunkeln Körper treffen, werden sie von diesem teils angezogen, teils wieder abgestofsen und die von den dunkeln Körpern wieder ausgestofsenen Teilchen machen uns dieselben sichtbar.

An den leuchtenden Körpern sowie an den beleuchteten unterschieden wir verschiedene Helligkeit und verschiedene Farbe. Nach der Newtonschen Hypothese rührt der verschiedene Grad der Helligkeit der Körper her von der verschiedenen Menge Licht, welche dieselben in gleichen Zeiten auswerfen; in demselben Verhältnisse, als sie mehr Licht aussenden, erscheinen sie stärker leuchtend.

Um die verschiedene Farbe des Lichtes zu erklären, nimmt die Hypothese an, dafs die verschiedenen Lichter verschiedene Arten von Lichtteilchen aussenden; jeder Farbe entspricht eine bestimmte Art der Lichtteilchen, die grün leuchtenden Körper entsenden Lichtteilchen, welche uns den Eindruck des grünen Lichtes machen, die blau leuchtenden solche Lichtteilchen, welche unserem Auge den Eindruck des blauen Lichtes machen. Worin dieser Unterschied der Lichtteilchen besteht, ist unbestimmt, gewisse Eigenschaften der einzelnen wird die Betrachtung der gestörten Fortpflanzung des Lichtes erkennen lassen.

Bei ungehinderter Ausbreitung pflanzt das Licht sich in geraden Linien fort. Dies ist eine notwendige Folge der Annahme, dafs das Licht aus geworfenen Körperteilchen bestehe. Denn vermöge der Trägheit der Materie beharrt ein Körper in seiner Bahn, bis äufsere Kräfte ihn daraus ablenken. So lange die Lichtteilchen daher in ihrer Ausbreitung nicht gestört werden, müssen sie in der Richtung sich weiter bewegen, in der sie ursprünglich angestofsen wnrden, ihre Bahn mufs daher eine gerade Linie sein.

Um die grofse Geschwindigkeit des Lichtes zn erklären, müssen wir annehmen, dafs die Lichtteilchen mit sehr grofser Kraft ausgestofsen werden, und nm es zu hegreifen, dafs die Lichtteilchen trotz ihrer grofsen Geschwindigkeit hei ihrem Stofse auf andere Körper keine mechanische Wirkung äufsern, müssen wir unterstellen, dafs die Lichtteilchen von äufserster Feinheit und Kleinheit sind.

Die Verzögerung in der Verfinsterung der Jnpiterstrabanten, die Aberration des Lichtes, sowie die Versnche von Fizeau, Cornu, Foncault und Michelson sind der unmittelbare Ausdruck der Annahme, dafs sich alle Lichtteilchen, aus welcher Quelle sie anch stammen, mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen. Diese Thatsache bietet der Emissionshypothese eine grofse Schwierigkeit. Denn wenn anch die Lichtteilchen durch irgend einen Procefs von den leuchtenden Körpern ausgeworfen werden, so müssen sie doch nach den Gesetzen der allgemeinen Massenanziehung von den Körpern, welche sie ausgeworfen haben, angezogen werden; ist die Masse der Körper nun verschieden, so mufs auch die Anziehung derselben auf die ausgeschleuderten Lichtteile und somit die Verzögerung der letzteren eine verschiedene sein. Welches daher auch die Geschwindigkeit ist, welche den Lichtteilchen durch den Ansstofsungsprocefs erteilt ist, so mnfs doch die endliche Geschwindigkeit derselben, mit welcher sie zu uns gelangen, je nach der Masse der sie aussendenden Körper eine verschiedene sein, wenn man nicht die ganz willkürliche nnd unberechtigte Annahme machen will, dafs die ausstofsenden Kräfte zu der Masse des aussendenden Körpers in einem ganz bestimmten Verhältnisse stehen. Diese Schwierigkeit, welche die Emissionshypothese bietet, kann nur durch die Annahme gehoben werden, dafs die kleinen Teilchen ans den leuchtenden Körpern mit sehr verschiedenen Geschwindigkeiten ausgesandt werden, dafs aher unter diesen Geschwindigkeiten nur eine sei, welche unserem Gesichtsorgan angemessen sei, und dafs nnr die mit dieser Geschwindigkeit unser Auge treffenden Lichtteilchen uns die Empfindung des Lichtes geben.

Das Gesetz, nach welchem die Lichtstärke mit der Entfernung von der Lichtquelle abnimmt, ist eine notwendige Folge der Emissionstheorie. Denn jede Lichtquelle sendet darnach in einer bestimmten Zeit eine bestimmte Menge von Teilchen aus; diese verbreiten sich über immer gröfsere Kugelflächen. Die gröfsern Flächen in der Entfernung r von der Lichtquelle erhalten also dieselhe Anzahl Lichtteilchen wie die kleinere im Abstande 1. Eine Fläche von gegebener Gröfse empfängt daher in der letztern Kugelfläche in demselben Verhältnisse mehr Lichtteilchen, als diese selbst kleiner ist wie die entferntere Kugel. Das Verhältnis der Gröfsen ist aber das umgekehrte der Quadrate der Radien oder der Abstände der einzelnen Flächen von dem leuchtenden Mittelpunkte; in demselben Verhältnisse mufs also die Beleuchtung der verschieden entfernten Flächen stehen.



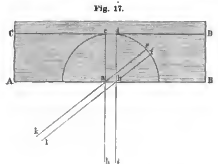
Die Entwicklungen, mittels deren der Nachweis geführt wurde, dafs die Beleuchtung einer Fläche abhänge von dem Einfallswinkel, unter welchem die Lichtstrahlen die beleuchteten Flächen treffen, lassen sich unmittelbar in die Sprache der Emissionshypothese übertragen, auch dieser Einflufs ist daher eine notwendige Folge dieser Theorie.

Anders jedoch verhält es sich mit dem Einflufs des Ausstrahlungswinkels; den Grund, weshalb das Licht unter schiefem Winkel geringer als unter rechtem Winkel ausstrahle, gibt sie nicht. Das ist jedoch kein Mangel oder Vorwurf derselben, da sie nur die Frage zu beantworten sucht, was das ist, was von den leuchtenden Körpern ausgehend uns als Licht erscheint, nicht aber, durch welchen Procefs diese Lichtteilchen ausgeschleudert werden.

Mit Hülfe einer von Fourier[1]) aufgestellten Hypothese ist es jedoch leicht, dieses Gesetz als in der Natur der Strahlung begründet zu erkennen; man hat nur anzunehmen, dafs das Licht nicht aus der geometrischen Oberfläche des leuchtenden Körpers, sondern aus einer gewissen Tiefe hervordringt, so dafs alle Punkte bis zu einer gewissen Tiefe unterhalb der Oberfläche Lichtteilchen ausschleudern.

Sei AB Fig. 17 die Oberfläche eines leuchtenden Körpers und ab ein Flächenelement, dessen Strahlung untersucht wird. Nach der Annahme von Fourier gehen nun von ab nicht nur von diesem Elemente ausgesandte Strahlen aus, sondern auch solche, welche aus einer gewissen Tiefe kommen. Ist CD die am weitesten von der Oberfläche entfernte Schicht, aus welcher noch Strahlen nach aufsen gelangen können, so werden alle Elemente, welche innerhalb einer um den Mittelpunkt von ab beschriebenen Halbkugel liegen, deren Radius gleich ist dem senkrechten Abstande von AB und CD, durch das Element von AB Strahlen aussenden. Um die Intensität der von ab nach den verschiedenen Richtungen ausgehenden Strahlen zu vergleichen, mufs man die Strahlenbündel vergleichen, deren gerade oder schiefe Basis ab ist, also z. B. $hicd$ und $kefl$. Die einzelnen Strahlen jedes Bündels haben gleiche Intensität, indem jeder Strahl alle von den einzelnen auf dem entsprechenden Radius der Halbkugel liegenden Körperelementen ausgesandten Lichtteilchen enthält. Daraus folgt dann, dafs die Intensitäten der von demselben Element nach den verschiedenen Richtungen ausgesandten Strahlenbündel sich verhalten müssen, wie die Querschnitte der betreffenden Bündel. Diese Querschnitte verhalten sich aber wie die Cosinus der Ausstrahlungswinkel.

Fig. 17.



Soweit demnach die Hypothese von Fourier Gültigkeit hat, ist das Gesetz, nach welchem die Intensität der Strahlung einer leuchtenden Fläche

[1]) *Fourier*, Annales de chim. et de phys. t. VI.

proportional dem Cosinus der Ausstrahlung abnimmt, in der Natur des Strahlungsvorganges begründet.

Eine weitere Prüfung der Fourierschen Hypothese ist erst an einer andern Stelle, bei Untersuchung der Wärmestrahlung, für welche Fourier sie zunächst aufstellte, möglich[1]).

§ 7.

Undulationstheorie. Die andere Vorstellungsart über das Wesen des Lichtes wurde fast gleichzeitig mit der Newtonschen von Huyghens[2]) entwickelt. Durch Newtons Theorie lange verdunkelt, fand sie im 18. Jahrhundert fast nur an Euler[3]) einen Verteidiger. In unserem Jahrhundert verschafften ihr jedoch die Arbeiten Youngs[4]), Fresnels[5]), Cauchys[6]) u. a. den Sieg über die Newtonsche Hypothese. Die Voraussetzung, welche ihr zu Grunde liegt, ist die, dafs der ganze Raum mit einem unendlich feinen elastischen Fluidum, dem Äther, angefüllt sei, und dafs das Licht eine schwingende Bewegung dieses Äthers sei, welche nach den Gesetzen der Wellenbewegung sich fortpflanzt. Diese Theorie setzt also das Licht in die innigste Analogie mit dem Schalle, jedoch mit dem Unterschiede, dafs der Schall eine Wellenbewegung der Luft ist, das Licht eine Wellenbewegung jenes äufserst feinen hypothetischen Fluidums, des Lichtäthers, welcher den sonst so genannten leeren Raum ausfüllend eine Verbindung zwischen den leuchtenden Gestirnen und uns herstellt, welcher aber ebenso an unserer Erde sich befindet, indem er in die von der ponderabeln Materie gelassenen Räume sich legend alle Körper erfüllt. Der Procefs des Leuchtens besteht dann in einer Erregung der schwingenden Bewegung des Äthers, welche bis zu unserem Auge fortgepflanzt durch die Stöfse des bewegten in unserem Auge befindlichen Äthers uns die Empfindung des Lichtes erteilt.

Gerade wie beim Schall die Amplitude der schwingenden Bewegung die Intensität des Schalles bestimmt, so bestimmt auch die Amplitude der Ätherschwingungen die Intensität des Lichtes und aus den dort entwickelten Gründen ist die Intensität des Lichtes dem Quadrate der Amplitude proportional.

Die verschiedene Zahl der in der Zeiteinheit unser Ohr treffenden Stöfse der schwingenden Luft bestimmt beim Schall die Höhe des gehörten Tones, beim Licht bewirkt die Verschiedenheit der in der Sekunde stattfindenden

---

[1]) Man sehe im III. Bande § 19.

[2]) *Huyghens*, Traité de la lumière. Chap. I. Leiden 1690.

[3]) *Euler*, Nova theoria lucis et colorum. Opusc. var. Berlin 1746. Briefe an eine deutsche Prinzessin, übersetzt von *Kries*. Leipzig 1792.

[4]) *Young*, On Theory of light and Colours. Philosoph. Transact. for 1802. Course of lectures in natural philosophy and the mechanical arts. London 1807.

[5]) *Fresnel*, Sur la lumière. Supplément à la traduction française de la cinquième édition du traité de chimie de Thomson par Riffault. Paris 1822, übers. in Poggend. Annalen. Bd. III, V, XII. Aufserdem Fresnels Arbeiten über die Beugung, die Polarisation etc., welche wir alle im Verlaufe dieses Teiles einzeln kennen lernen werden. Die sämtlichen optischen Arbeiten Fresnels sind zusammengestellt in den Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel. T. I. u. II. Paris 1866 u. 1868.

[6]) *Cauchy*, Mémoire sur la dispersion de la lumière. Prag 1836.

Schwingungszahl den Unterschied der Farbe. Die langsamsten Schwingungen machen den Eindruck des roten, schnellere den des grünen, die schnellsten den des violetten Lichtes.

Ehe wir die bisher betrachteten Lichterscheinnngen mit dieser Hypothese vergleichen, müssen wir zunächst die Frage beantworten, ob denn die Erscheinungen der Planetenbewegung es nns gestatten, den sogenannten leeren Raum uns mit dem Äther angefüllt zu denken.

Die Planeten bewegen sich bekanntlich seit Jahrtausenden in immer denselben Bahnen um die Sonne und legen diese Bahnen in immer derselben Zeit zurück.

Wir müssen daraus schliefsen, dafs sie sich in einem Raume bewegen, der ihrer Bewegung keinen Widerstand entgegensetzt. Denn bewegten sie sich in einem widerstehenden Mittel, so würde dieses in jedem Augenblicke die nach der Tangente der Bahn an der Stelle, an der sie sich befinden, gerichtete Bewegung hemmen, also ihre tangentiale Geschwindigkeit verringern. Nach den Entwickelungen des dritten Kapitels im ersten Abschnitte des ersten Teiles würde diese Störung der tangentialen Geschwindigkeit der Bewegung eine Annäherung der Planeten an den anziehenden Mittelpunkt zur Folge haben müssen, die Abstände der Planeten von der Sonne müfsten also allmählich kleiner werden, und damit die Umlaufszeit der Planeten abnehmen, da nach dem dritten Kepplerschen Gesetze die Quadrate der Umlaufzeiten sich verhalten wie die Kuben der mittleren Entfernung. Die Unveränderlichkeit der Planetenbahnen und der Zeit, in welcher die Planeten dieselben zurücklegen, beweist demnach, dafs in dem Weltenraume kein Mittel vorhanden ist, welches der Planetenbewegung merklich widersteht.

Diese Thatsache ist jedoch kein Beweis für die Unzulänglichkeit der Annahme des Lichtäthers. Denn bekanntlich nimmt der Widerstand, den ein Mittel der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, ab, wenn die Dichtigkeit des Mittels gegen die des Körpers nur klein ist und zwar um so mehr, je kleiner die Dichtigkeit des Mittels im Verhältnis zu jener der bewegten Körper ist. Um daher durch die erwähnte Thatsache in der Annahme des Lichtäthers nicht gehindert zu sein, müssen wir dem Äther eine im Verhältnis zu jener der Planeten unendliche Feinheit zuschreiben, eine Annahme, zu der wir übrigens auch durch die optischen Phänomene geführt werden, und welche ebenso berechtigt ist als die Annahme der Emissionshypothese, welche den von den leuchtenden Körpern ausgeschleuderten Lichtteilchen eine für uns unendliche Feinheit zuschreibt.

Wir sehen demnach, dafs der Annahme des Lichtäthers und somit der Grundlage der Huyghens'schen Hypothese keine mechanische Schwierigkeit entgegensteht.

Wenn demnach sämtliche Lichterscheinungen aus dieser Annahme sich ableiten lassen, so werden wir zwischen beiden Hypothesen wählen können und diejenige als die richtige betrachten, welche die Lichterscheinungen auf die einfachste und ungezwungenste Weise erklärt.

Die bisher betrachteten Erscheinungen der ungestörten Ausbreitung des Lichtes werden wir nun allesamt mit Hülfe unserer Entwickelungen im ersten Kapitel des dritten Abschnittes des ersten Teils als notwendige Folge der Huyghens'schen Annahme erkennen.

Denn wir sahen dort, dafs bei ungestörter Ausbreitung einer Wellenbewegung durch ein isotropes Punktsystem die Bewegung sich auf den Radien immer mehr sich vergröfsernder Kugeln ausbreiten mufs, dafs also eine Wellenbewegung von dem erregenden Mittelpunkte aus nach allen Richtungen sich geradlinig ausbreiten mufs, wie wir es am Lichte erkannt haben. Nach der Lehre von der Wellenbewegung ist die Geschwindigkeit, mit welcher eine Wellenbewegung sich fortpflanzt, bestimmt durch die Gleichung

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin C eine Konstante, e die Elasticität und d die Dichtigkeit des Mittels, des Punktsystems, ist, in welchem die Wellenbewegung sich fortpflanzt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt also lediglich von der Natur des Mittels, seiner Elasticität und Dichtigkeit ab, von keinem andern Umstande, es mufs also in einem und demselben Mittel jede Wellenbewegung, woher sie auch stamme, sich mit eben derselben Geschwindigkeit fortpflanzen. Die Undulationstheorie fordert demnach, dafs das Licht der Sonne oder der Fixsterne oder irgend einer Lichtquelle sich mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanze, sie fordert also das aus Römers und Bradleys Beobachtungen, sowie aus den Versuchen von Fizeau, Cornu, Foucault und Michelson hergeleitete Resultat. Darin müssen wir einen grofsen Vorzug dieser Theorie vor der Emissionstheorie erkennen, welche dieses Resultat nur mit Hülfe einer neuen Annahme zu erklären imstande ist.

Die Erscheinung der Aberration des Lichtes, welche durch die gleichzeitige und von einander unabhängige Bewegung der Erde und des Lichtes bedingt ist, folgt notwendig aus der Emissionstheorie, die von den Sternen ausgeschleuderten Lichtteilchen bewegen sich notwendig unabhängig von der Erde. Um diese Erscheinung mit der Wellentheorie in Einklang zu bringen, müssen wir annehmen, dafs der an der Erde befindliche Äther nicht an der Bewegung der Erde teilnehme, sondern dafs der Äther die Körper frei durchdringe, oder dafs, wie Thomas Young[1]) sagt, der Lichtäther alle materiellen Körper mit geringem oder gar keinem Widerstand durchdringt, etwa so wie der Wind durch das Laub eines Baumes hindurchgeht. Diese Annahme hat bei der unendlichen Feinheit des Äthers, welche wir annehmen müssen, nichts Auffallendes. Nehmen wir dieses an, so fordert auch die Undulationstheorie das Phänomen der Aberration, da dann in dem ruhenden Äther die Fortpflanzungsrichtung der Lichtwellen durch die Bewegung der Erde keine Änderung erfahren kann.

Die Abnahme der Lichtintensität mit Entfernung von der Lichtquelle mufs in der Undulationstheorie nach demselben Gesetze erfolgen wie in der Emissionstheorie, da die Undulationstheorie die Lichtstärke als abhängig ansieht von der Stärke des Stofses, welchen die bewegten Ätherteilchen gegen die Netzhaut des Auges ausführen. Die Stärke des Stofses wird aber gemessen durch die lebendige Kraft der Ätherteilchen, das Produkt aus der bewegten Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit der Ätherteilchen. Ganz dieselben Betrachtungen, welche in der Lehre vom Schall

[1]) *Th. Young*, Experiments and Calculations relative to Physical Optics. Philosophical Transactions 1803.

uns zu dem Resultate führten, dafs die Geschwindigkeit der bewegten Luftteilchen bei ungehinderter Ausbreitung des Schalles den Abständen derselben von der Quelle des Schalles umgekehrt proportional sei, führen uns bei Annahme der Undulationstheorie des Lichtes zu dem Resultate, dafs die Geschwindigkeit der bewegten Ätherteile dem Abstande derselben von der Lichtquelle umgekehrt proportional sei. Wie also die Stärke des Schalles abnimmt, wie die Quadrate der Entfernungen von der Schallquelle wachsen, so die Intensität des Lichtes, wie die Quadrate der Entfernungen von der Lichtquelle wachsen.

Auch der Einflufs des Einfallswinkels, unter welchem das Licht eine beleuchtete Fläche trifft, auf die Beleuchtung ist eine notwendige Folge der Undulationstheorie. Denn ist AB (Fig. 18) eine begrenzte Lichtwelle, welche wir als eine ebene annehmen, so verhält sich in einer gegen AB geneigten Ebene CB die Masse des von der ankommenden Welle zu bewegenden Äthers zu dem in der Welle bewegten Äther wie die Gröfse der Oberflächen, oder wenn wir die in AB bewegte Äthermasse mit m bezeichnen, die in CB zu bewegende mit m', so ist

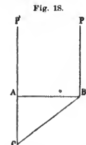


Fig. 18.

$$m : m' = AB : CB,$$

$$m : m' = \cos CBA : 1.$$

Ist nun die Oscillationsgeschwindigkeit, wenn die Ätherteilchen durch die Gleichgewichtslage gehen, in AB gleich v, in CB gleich v', so ist nach dem schon früher angewandten Satze, dafs die lebendige Kraft des bewegten Systems konstant ist, wo wir auch die Bewegung des Systems betrachten, vorausgesetzt, dafs nur innere Kräfte thätig sind,

$$mv^2 = m' v'^2,$$

oder wenn wir $CBA = \alpha$ setzen,

$$mv^2 = \frac{m}{\cos \alpha} v'^2$$

und daraus

$$v'^2 = v^2 . \cos \alpha.$$

Die Quadrate der Geschwindigkeit, mit der in der geneigten Ebene CB und in der Ebene AB die Ätherteilchen durch die Gleichgewichtslage hindurchgehen, verhalten sich wie $\cos \alpha$ zu 1. Ein mit AB gleich grofses Stück der Fläche CB besitzt die gleiche Äthermasse m, die lebendige Kraft der schwingenden Bewegung ist daher in demselben

$$mv'^2 = mv^2 \cdot \cos \alpha,$$

oder die Intensität der Beleuchtung in zweien gegen eine ankommende Wellenebene verschieden geneigten Flächen ist proportional dem Cosinus des Neigungswinkels. Nennen wir auch hier wieder wie früher die zur Wellenebene senkrechten Richtungen die Lichtstrahlen, so fällt, wie man sieht, dieser Satz mit dem frühern zusammen, nach welchem die Beleuchtung einer Fläche dem Cosinus des Einfallswinkels proportional ist.

Das dritte, die Lichtintensität bestimmende Gesetz wird auch unter Annahme der Undulationstheorie von der Fourierschen Hypothese gerade

so gut erklärt, wie unter Annahme der Emissionstheorie. Denn nach dieser Hypothese werden Wellen von gleicher Ausdehnung, nach welcher Richtung sie auch die lenchtende Fläche verlassen, absolut gleich. Eine Fläche, welche sich zur Einheit verhält wie 1 : cos α, sendet aber unter einem Ausstrahlungswinkel α eine Welle von derselben Gröfse aus, wie die Fläche 1 unter dem Ausstrahlungswinkel Null, die Lichtmenge, welche die gröfsere Fläche in geneigter Richtung aussendet, ist somit dieselbe, welche die kleinere in senkrechter ausstrahlt.

Die Erscheinungen, welche uns das Licht bei ungestörter Ausbreitung darbietet, lassen sich somit nach beiden Theorien ziemlich gleich gut erklären, sie geben uns somit keinen Aufschlufs über das Wesen des Lichtes, sondern lassen beide Erklärungsweisen als möglich erscheinen[1]).

Zweites Kapitel.

Von der gestörten Ausbreitung des Lichtes, Reflexion und Brechung.

§ 8.

Zurückwerfung des Lichtes an ebenen Flächen. Wenn ein Lichtstrahl bei seiner Fortpflanzung an einen nicht leuchtenden Körper trifft, so wird er an seiner geradlinigen Ausbreitung im allgemeinen gehindert und erfährt Änderungen, welche je nach der Beschaffenheit des nicht lenchtenden Körpers verschieden sind. Zunächst bewirkt das den Körper treffende Licht, dafs derselbe sichtbar wird, es wird also ein Teil des auffallenden Lichtes von dem Körper nach allen Richtungen hin ansgesandt, nachdem es von ihm z. B. in der Farbe so modificiert ist, dafs wir es als von dem Körper herrührend ansehen und die ursprüngliche Quelle des Lichtes nicht mehr erkennen können.

Ist die Oberfläche des Körpers glatt, so sehen wir, dafs immer von dem Körper nach einer durch die Richtung des einfallenden Lichtes bestimmten Richtung mehr Licht als nach allen andern zurückgeworfen wird; scheint z. B. die Sonne auf einen polierten Tisch, so sieht man stets nach einer Richtung von dem Tische Strahlen ausgehen. Dieses Licht heifst regelmäfsig zurückgeworfen im Gegensatz zu dem nach allen Richtungen unregelmäfsig zurückgeworfenen oder zerstreuten Licht.

Bei einigen Körpern sieht man nun unmittelbar noch eine weitere Zerlegung des Lichtes, es tritt bei diesen ein Teil des Lichtes in die Körper hinein und durch dieselben hindurch. Die nicht selbstlenchtenden Körper teilen sich darnach in zwei Klassen, in die undurchsichtigen und die durchsichtigen. Erstere lassen das Licht nicht durch, ein solcher Körper verdunkelt, zwischen das Auge und die Lichtquelle gebracht, dieselbe vollständig, die durchsichtigen Körper dagegen entziehen uns den Anblick der Lichtquelle nicht.

---

[1]) Die historische Entwickelung der beiden streitigen Theorien siehe *Lloyd*, Abrifs der Geschichte der Optik, übersetzt von *Kloden*. Berlin 1836.

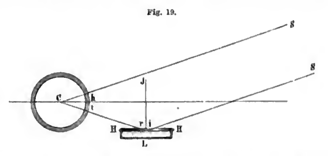
Wenn das Licht von einer ebenen Fläche zurückgeworfen wird, und wir sehen in der Richtung des zurückgeworfenen Lichtes gegen die Fläche hin, so ist die Fläche selbst um so unsichtbarer, je mehr Licht sie reflektiert und anstatt der reflektierenden Fläche sehen wir hinter derselben ein Bild der Lichtquelle. Wenn wir nun zunächst nach der Richtung fragen, in welcher die Strahlen regelmäfsig zurückgeworfen werden, so ergeben sich für die Zurückwerfung an ebenen Flächen folgende zwei Gesetze:

1) Der zurückgeworfene Strahl liegt mit dem einfallenden in derselben Ebene, welche durch den einfallenden Lichtstrahl und die im Punkte, wo der Strahl die Fläche trifft, errichtete Senkrechte, das Einfallslot, bestimmt wird. Der zurückgeworfene und einfallende Lichtstrahl befinden sich an entgegengesetzten Seiten des Einfallslotes.

2) Der Winkel, welchen der zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslote bildet, ist gleich dem, welchen der ankommende Lichtstrahl mit dem Einfallslote bildet. Letzterer wird der Einfallswinkel, ersterer der Reflexionswinkel genannt.

Das genaueste Mittel zum Nachweis dieser Gesetze geben uns die astronomischen Beobachtungen. Bestimmt man mittels eines vertikalen Kreises die Höhe eines Sternes über dem Horizont und zugleich die Tiefe des Spiegelbildes unter einem künstlichen Horizont, einer flachen, mit Quecksilber gefüllten Schale, deren Oberfläche immer genau horizontal steht, so findet man die Tiefe des Bildes unter dem Horizont, den Winkel t, immer genau gleich der Höhe h des Sternes über dem Horizont. Wegen der sehr grofsen Entfernung des Sternes sind die Strahlen SL und SC parallel oder der Winkel h ist gleich dem Winkel SLH. Ferner ist der Winkel t als

Fig. 19.



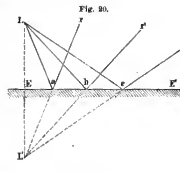
Wechselwinkel gleich dem Winkel CLH, und da $t = h$ ist, so folgt $SLH = CLH$ oder auch $i = r$. Und da das Fernrohr bei den Beobachtungen nur um die Axe C in der Vertikalebene gedreht ist, so folgt aus diesem Versuche zugleich, dafs der reflektierte Strahl mit dem einfallenden in derselben Ebene liegt und dafs beide mit dem Einfallslote, nur an entgegengesetzten Seiten, gleiche Winkel bilden.

Man kann es als eine unmittelbare Folge dieses Gesetzes oder auch als einen neuen experimentellen Beweis für dasselbe ansehen, dafs die an einem Spiegel reflektierten Strahlen von einem Punkte hinter dem Spiegel auszugehen scheinen, der genau ebensoweit hinter demselben liegt, als der leuchtende Punkt vor demselben, dafs demnach das Bild eines leuchtenden

Punktes genau so weit hinter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt vor demselben.

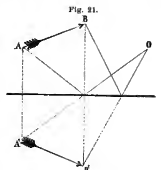
Dafs wir überhaupt ein Bild des leuchtenden Punktes sehen, beweist uns, dafs alle von dem Spiegel ausgehende Strahlen so sich verbreiten, als kämen sie von einem Punkte L' hinter dem Spiegel; denn nach der Erfahrung, dafs das Licht sich in geraden Linien von der Lichtquelle ausbreitet, versetzen wir die letztere in die Richtung, in welcher die Strahlen zuletzt unser Auge treffen, und deshalb an den Punkt, der allen den unser Auge treffenden Strahlen gemeinsam ist, an den Punkt, wo sie in der That oder verlängert sich schneiden. Nehmen wir es nun als durch die tägliche Erfahrung festgestellt an, dafs der senkrechte Abstand LE des Punktes L vom Spiegel gleich ist dem senkrechten Abstande $L'E$ des Punktes L' vom Spiegel, so folgt unmittelbar, dafs die Dreiecke $LaE \sim L'aE$, $LbE \sim L'bE \ldots$ und daraus, dafs die Winkel LaE und raE', LbE und $r'bE' \ldots$ und somit auch die Winkel, welche die einfallenden und reflektierten Strahlen mit dem Einfallslote bilden, einander gleich sind.

Fig. 20.



Andrerseits kann man diesen Satz aus dem Reflexionsgesetze sofort ableiten. Denn zunächst folgt aus demselben, dafs der Bildpunkt L', von dem aus die Strahlen zu divergieren scheinen, auf der Senkrechten LE, die von L auf den Spiegel gezogen ist, liegen mufs, da die senkrecht in der Richtung LE auf den Spiegel fallenden Strahlen nach dem Reflexionsgesetz in derselben Richtung zurückgeworfen werden. Da nun der Bildpunkt dort liegt, wo die rückwärts verlängerten Strahlen LE und ra sich schneiden, so folgt aus der Deckung der Dreiecke LaE und $L'aE$, die nach dem sogenannten zweiten Kriterium der Deckung, Gleichheit einer Seite Ea und der beiden anliegenden Winkel, kongruent sind, dafs $LE = L'E$, oder dafs das Bild des leuchtenden Punktes ebensoweit senkrecht hinter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt vor ihm.

Fig. 21.



In dieser Form ausgesprochen, gibt uns das Reflexionsgesetz sofort eine Konstruktion, um die Bilder von Gegenständen in einem ebenen Spiegel zu erhalten.

Ist AB (Fig. 21) eine leuchtende Linie, so erscheint dieselbe als $A'B'$ im Spiegel, so dafs das Bild ganz symmetrisch mit dem Gegenstande gegen die spiegelnde Fläche liegt. Der Punkt A befindet sich dem Spiegel am nächsten, ebenso der Punkt A' des Bildes, die Enden B und B' sind in Bild und Gegenstand nach derselben Seite gerichtet.

Es ist unmittelbar nach dem Vorigen klar, dafs diese Lage des Bildes

sich ergibt, wenn wir von den betreffenden Punkten der Linie Senkrechte auf den Spiegel ziehen und diese jenseits des Spiegels um den Abstand der das Licht aussendenden Punkte verlängern. Die Richtung, nach der das bei O befindliche Auge das Bild wahrnimmt, ist durch die von den einzelnen Bildpunkten zum Punkte O gezogenen Linien bestimmt.

Dabei ist es gleichgültig, ob die zur Konstruktion des Bildes benutzten Linien AA' den Spiegel treffen oder nicht, wir sehen immer ein Bild des Gegenstandes, sobald zwei von dem Punkte O, in dem das Auge sich befindet, und von dem Punkte A zu einem Punkte des Spiegels gezogene Linien mit dem Einfallslote an der Stelle gleiche Winkel bilden.

§ 9.

Physikalische Erklärung des Reflexionsgesetzes. Beide von uns mitgeteilte Theorien über das Wesen des Lichtes sind geeignet, das Reflexionsgesetz als im Wesen des Lichtes begründet erscheinen zu lassen. Dafs es nach der Undulationstheorie notwendig ist, folgt unmittelbar nach den Entwickelungen des dritten Abschnittes im ersten Teile, wenn wir die Annahme machen, dafs die Dichtigkeit oder die Elasticität des Äthers, oder beide in den verschiedenen Körpern eine verschiedene ist, eine Annahme, zu der wir gewifs berechtigt sind.

Denn ebenso, wie zwischen den einzelnen Ätherteilchen anziehende und abstofsende Kräfte thätig sind, so müssen auch zwischen dem Äther und den Molekülen der materiellen Körper ebensolche Kräfte thätig sein. Daraus folgt dann notwendig, dafs die Dichtigkeit oder Elasticität des Äthers oder beide Eigenschaften im Innern der Körper je nach der Beschaffenheit der Körper verschieden sein müssen. Zwei an einander grenzende Körper, z. B. die Luft und irgend ein nicht leuchtender Körper, sind daher nach unserer frühern Bezeichnung Punktsysteme verschiedener Beschaffenheit. Eine an der Grenze zweier Punktsysteme ankommende schwingende Bewegung mufs aber, wie wir dann weiter sahen, stets reflektiert werden, das heifst, es mufs sich von der Grenze aus eine Wellenbewegung rückwärts in dem ersten Mittel ausbreiten.

Ferner sahen wir ganz allgemein, dafs eine an einer ebenen Grenzfläche ankommende kugelförmige Welle stets so in das erste Mittel zurückkehrt, als käme sie von einem Wellenmittelpunkte, der ebenso weit hinter der Fläche liegt, als der wirkliche Mittelpunkt vor der Fläche. Wir sahen, das Reflexionsgesetz des Lichtes in der einen Form ist genau dieses früher für die Wellenbewegung abgeleitete Gesetz.

Als eine Folge dieses Gesetzes oder als eine andere Form desselben erhielten wir den Satz, dafs eine Wellenbewegung so reflektiert wird, dafs der ankommende und reflektierte Wellenstrahl mit dem Einfallslote gleiche Winkel bilden; dies ist zugleich die andere Form des Gesetzes, nach welchem das Licht reflektiert wird[1]).

Wir brauchen zu den Entwicklungen des § 134, Teil I, nichts mehr hinzuzufügen, um das Reflexionsgesetz als im Wesen des Lichtes begründet

[1]) *Huyghens*, Traité de la lumière. Chap. III. *Fresnel*, Erklärung der Reflexion nach der Undulationstheorie. Poggend. Annal. XXX. Oeuvres complètes. T. 1. p. 211.

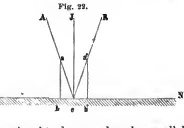
zu erkennen, wenn wir das Licht als eine Wellenbewegung des Äthers ansehen.

Zur Erklärung der Erscheinungen der Reflexion des Lichtes nach der Emissionstheorie hat man angenommen, die Lichtteilchen und die Moleküle der Körper übten eine gegenseitige Wirkung auf einander aus. Diese Kraft kann eine anziehende oder eine abstofsende sein. Ist die Entfernung kleiner als eine gewisse Grenze, so ist die Kraft nach Newtons Annahme allemal anziehend bis zur Berührung, jenseits dieser Sphäre ist aber ebenso gewifs eine andere, in welcher die Kraft immer abstofsend ist. Die absoluten Intensitäten sind verschieden für die verschiedenen Körper, die Funktion der Entfernung, das heifst, die Art und Weise, mit der die Kraft nach der Entfernung der materiellen und Lichtteilchen von einander sich ändert, ist für alle Körper dieselbe.

Welcher Art übrigens diese Abhängigkeit ist, läfst sich nicht angeben, nur das ist sicher, dafs die Entfernungen, in der die Kräfte wirksam sind, überhaupt nur unmefsbar klein sind, dafs die Kräfte unmerklich werden, sobald eine mefsbare Entfernung zwischen den Lichtteilchen und den Molekülen der materiellen Körper besteht. Die Entfernung der materiellen Körperteilchen selbst ist aber gegen die Gröfse ihrer Wirkungssphären selbst sehr gering.

Mit Hülfe dieser Annahmen sind wir imstande, das Reflexionsgesetz an vollkommen ebenen Flächen als auch in der Emissionstheorie begründet zu erkennen. Denn denken wir uns irgend ein Lichtteilchen in der Richtung Ae gegen eine vollkommen ebene Fläche sich hinbewegen, so können wir die Geschwindigkeit desselben in zwei zu einander senkrechte Komponenten zerlegen, deren eine ab senkrecht, deren andere be parallel ist der reflektierenden Fläche MN.

Fig. 22.



Da nun sämtliche in der Fläche MN liegenden Körperteilchen, soweit sie überhaupt auf das Lichtteilchen einwirken, wenn es in die unmittelbare Nähe der Fläche gekommen ist, gleich stark das Lichtteilchen anziehen oder abstofsen, so ist klar, dafs die Anziehung oder Abstofsung der Körperteile auf das Licht senkrecht zur Fläche MN gerichtet sein mufs, da es nach allen in der Ebene MN möglichen Richtungen zugleich ganz gleich stark angezogen und abgestofsen wird.

Die parallele Komponente der Geschwindigkeit der Lichtteilchen wird daher auch innerhalb der Wirkungssphäre der Moleküle der Körper durchaus ungeändert bleiben, und nur die zu MN senkrechte Komponente eine Änderung erfahren. Ehe die Lichtteilchen in die Anziehungssphäre der Körpermoleküle kommen, haben sie die Abstofsungssphäre zu passieren, in welcher die senkrecht gegen die Fläche MN gerichtete Kraft vermindert wird. Nun ist es möglich, dafs in dieser Abstofsungssphäre durch die Wirkung der Körpermoleküle die senkrechte Geschwindigkeit der Lichtteilchen ganz vernichtet wird; diese Lichtteilchen dringen dann gar nicht

in die Anziehungssphäre ein, sie werden daher, da die Abstofsung fortdanert, so lange die Lichtteilchen innerhalb der abstofsenden Sphäre sich befinden, die abstofsende Kraft also noch thätig ist, nachdem schon die senkrecht gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit vernichtet ist, von der Fläche zurückgestofsen. Da nun ferner auf dem Rückwege aus dieser Sphäre die Lichtteilchen ebenso lange und ebendenselben abstofsenden Kräften ausgesetzt sind, welche die gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit vernichteten, so müssen sie von denselben eine gegen die Fläche senkrechte von ihr fort gerichtete Geschwindigkeit erhalten, welche derjenigen, mit welcher sie sich gegen die Fläche hin bewegten, an Gröfse genau gleich ist.

Aus der behaltenen mit der Fläche parallelen Geschwindigkeit eb' und dieser senkrechten von der Fläche fortgerichteten $b'\ a'$ resultiert nach den Gesetzen der Mechanik, gerade wie beim Stofs der Körper, eine von der Fläche fortgerichtete Bewegung, welche gegen das Einfallslot aber an der entgegengesetzten Seite dieselbe Neigung hat, als der einfallende Lichtstrahl. Da ferner die Änderung der Geschwindigkeit nur die normale Geschwindigkeit betraf, so mufs der reflektierte Strahl in der durch den einfallenden Lichtstrahl und das Einfallslot bestimmten Ebene liegen, und da ferner die parallele Geschwindigkeit ungeändert, die normale der des einfallenden Lichtes an Gröfse genau gleich ist, so mufs die Geschwindigkeit des reflektierten Lichtes der des einfallenden Lichtes gleich sein.

Zwei Schwierigkeiten bleiben aber bei dieser Ableitung des Reflexionsgesetzes noch bestehen. Zunächst bedarf es der Annahme, dafs die Fläche wenigstens innerhalb der Wirkungssphäre der Moleküle des Körpers vollkommen eben sei, eine Annahme, welche für alle noch so glatt polierten reflektierenden Flächen gewifs nicht besteht; denn der Akt des Polierens besteht in einem Abschleifen der Oberfläche mit feinem Pulver, und der Erfolg dieses Abschleifens kann nur der sein, dafs die grofsen Unebenheiten fortgenommen, dafür aber die Fläche eine Anzahl sehr feiner Risse erhalten hat, welche in Bezug auf die Gröfse der Lichtteilchen noch sehr grofs sind. Um diese Schwierigkeit zu heben, dient die erwähnte Annahme, dafs die Wirkungssphäre der Moleküle gegen ihren Abstand sehr grofs ist, und dafs eben dadurch eine gleichmäfsige Anziehungs- und Abstofsungssphäre entsteht. Die Unebenheiten äufsern ihren Einflufs aber doch und zwar dadurch, dafs auch die glatteste Fläche Licht unregelmäfsig zurückwirft und dadurch selbst sichtbar wird.

Die andere Schwierigkeit fordert indes zu ihrer Hinwegräumung eine neue Hypothese. Wir sahen nämlich vorhin, dafs beim Auftreffen eines Lichtstrahles niemals alles Licht zurückgeworfen wird, sondern immer ein Teil in das zweite Mittel eintritt. Da nun aber alle Lichtteilchen mit gleicher Geschwindigkeit auf der Fläche auftreffen, und wenigstens die Lichtteilchen gleicher Farbe auch in ganz gleicher Weise von den Molekülen der Körper affiziert werden, so ist es nach dem Bisherigen absolut nicht abzusehen, wie es dann möglich ist, dafs ein Teil des Lichtes zurückgeworfen und ein anderer gebrochen wird; es ist vielmehr notwendig, wenn alle unter den gleichen Umständen sich gegen die Fläche hinbewegen, dafs entweder alle Lichtteilchen zurückgeworfen oder alle in den Körper hineingezogen werden.

Zur Hebung dieser Schwierigkeit legte Newton den Lichtteilchen eine eigentümliche Beschaffenheit bei, welche er Anwandlungen des leichtern Durchgehens und des leichtern Zurückgeworfenwerdens nannte. Er glaubte, dafs jedes Lichtteilchen während seines Weges in abwechselnd periodische Zustände versetzt werde, vermöge deren es in dem einen Zustande leichter den anziehenden, in dem andern leichter den abstofsenden Kräften der Moleküle folge; in dem einen also leichter in den Körper eindringe, in dem andern leichter von ihm zurückgeworfen werde. Die an der Grenze in einem Lichtstrahle ankommenden Lichtteilchen sind in den verschiedenen Zuständen, sie werden daher teils zurückgeworfen, teils in den Körper hineingezogen[1]).

Mit Hülfe dieser Annahme wird also die Möglichkeit einer Teilung des Lichtes an der Grenze gezeigt, und das Reflexionsgesetz, soweit es die Richtung und Lage des reflektierten Strahles betrifft, erklärt. Die Richtung des reflektierten Lichtes ist jedoch nicht das Einzige, was bei der Reflexion zu beachten ist, sondern auch seine Intensität, die Frage nach dem quantitativen Verhältnis der Teilung des Lichtes bei Brechung und Reflexion. Wir werden diese an einer andern Stelle betrachten, wenn wir die Mittel kennen, um diese Frage experimentell zu untersuchen. Hier werde nur bemerkt, dafs die Intensität des reflektierten Lichtes mit dem Einfallswinkel zunimmt, und dafs sie je nach der Beschaffenheit des reflektierenden Mittels anders ist. Eine polierte Glastafel reflektiert Licht bei jeder Incidenz, eine mattgeschliffene bei kleinen Incidenzwinkeln gar nicht, bei grofsen gibt sie ein deutliches, wenn auch schwaches Bild einer Lichtquelle. Um diese Erscheinnng zu erklären, bedurfte Newton noch einer weitern Hypothese, dafs nämlich auch die Schiefe, unter welcher ein Lichtstrahl auf eine reflektierende Fläche auffällt, von bestimmendem Einflufs auf die Reflexionsfähigkeit ist.

Wenn nun auch beide Theorien imstande sind, die Reflexion des Lichtes zu erklären, so werden wir doch nicht umhin können, schon hier einer der beiden Theorien, der Wellentheorie, den Vorzug zu geben. Es ist das Kennzeichen einer guten Hypothese, dafs sie aus einem einzigen obern Grundsatze ohne Zuhülfenahme neuer Annahmen die zusammengehörigen Erscheinungen, zu deren Erklärung sie dienen soll, ableiten kann. Dieses Kennzeichen bietet uns schon an dieser Stelle die Wellentheorie, sie bedarf zur Erklärung der Reflexionserscheinungen nur der Annahme, welche durch unsere Kenntnis der in der Materie vorhandenen Kräfte sich uns von selbst aufdrängt, der Annahme, dafs die uns schon längst bekannten anziehenden Kräfte der Materie sich auch auf den Äther erstrecken, und dafs demnach die Dichte oder Elasticität des Äthers in den verschiedenen Körpern eine verschiedene sei. Die Emissionstheorie dagegen bedarf selbst zur Erklärung der Richtung des reflektierten Lichtes zweier neuer Hypothesen, die wir nur als willkürliche und speciell für diese Erscheinungen ersonnene bezeichnen können, die Hypothese über den Wechsel der anziehenden und abstofsenden Kräfte und diejenige der Anwandlungen. Wenn wir uns daher auch hier noch nicht definitiv für die eine oder andere Theorie entscheiden, so wird uns doch die Undulationstheorie als die wahrscheinlich richtigere erscheinen.

[1]) *Newton*, Optice liber II, pars III, propositio IX ff. — *Herschel*, On Light. § 526 ff. — *Biot*, Lehrbuch der Experimentalphysik, übers. von Fechner. 4. Band.

§ 10.

Anwendung der Spiegelung an ebenen Flächen. Die Spiegelung des Lichtes an ebenen Spiegeln wird vielfach zu physikalischen, astronomischen und andern Apparaten angewandt, teils um den Lichtstrahlen eine bestimmte Richtung zu erteilen, teils zu Meſsapparaten.

Ersteres geschieht vorzüglich mittels des Heliostaten. Man bedarf oft zu physikalisch-optischen Versuchen parallelen sehr intensiven Lichtes in einem sonst dunkeln Raume. Die hauptsächlichste und zu manchen Versuchen unentbehrliche Lichtquelle, welche uns solches liefert, ist die Sonne; macht man in den von der Sonne beschienenen Laden eines sonst dunklen Zimmers eine Öffnung, so tritt durch diese in das Zimmer ein Bündel paralleler Sonnenstrahlen. Indes ist es schwierig, diese direkt zu den Versuchen zu brauchen, da diese Strahlen nur in einer bestimmten und noch dazu mit dem Stande der Sonne veränderlichen Richtung in das Zimmer treten. Sowohl um diesen Strahlen eine beliebige Richtung zu geben, als auch, um sie in der einmal gegebenen Richtung festzuhalten, dient der Heliostat. Derselbe besteht einfach aus einem ebenen Spiegel, am besten von poliertem Metall oder schwarzem Glase, welcher vor dem Fensterladen so befestigt wird, daſs er nach zwei zu einander senkrechten Richtungen drehbar ist. Entweder geschieht die Drehung mit der Hand durch eine gezahnte Scheibe und eine Schraube ohne Ende, welche an die in der Ebene des Spiegels liegende Axe desselben eingreift oder durch ein Uhrwerk. Eine Drehung des Spiegels ändert die Richtung des Einfallslotes, und man sieht, wie man dadurch bewirken kann, daſs die in immer anderer Richtung einfallenden Sonnenstrahlen stets nach derselben Richtung zurückgeworfen werden, indem man dafür sorgt, daſs die zur Spiegelebene senkrechte Richtung, die Normale derselben immer in der durch die einfallenden Sonnenstrahlen und die Richtung, nach der sie reflektiert werden sollen, bestimmten Ebene liegt, und zugleich den Winkel, den die Sonnenstrahlen mit jener festen Richtung bilden, halbiert.

Die Einrichtung eines mit der Hand zu stellenden Heliostaten zeigt Fig. 23. Eine viereckige mit einer groſsen kreisrunden Öffnung versehene

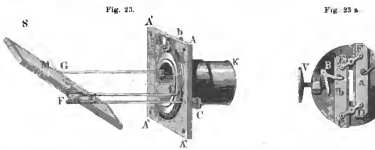


Fig. 23. Fig. 23 a.

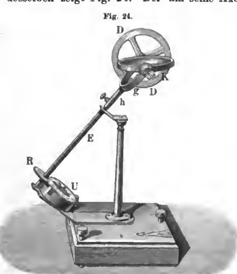
Messingscheibe wird in dem Laden eines Fensters befestigt. In der kreisförmigen Öffnung befindet sich eine Röhre EK fest angebracht, welche bei E so weit aus der Scheibe AA''' hervorsteht, daſs der auf seiner äuſsern Seite mit Zähnen versehene Ring DE darauf gesteckt werden kann. Dieser Ring trägt an den beiden Stangen DF und EG den Spiegel M. Durch das

mit dem Kopfe *b* gedrehte kleine Zahnrad *B* kann der gezahnte Ring und damit der Spiegel um *MK* als Axe gedreht werden. Der Spiegel für sich ist um *FG* als Axe drehbar; diese Drehung wird an dem Knopfe *C* bewirkt, der die in die Stange *CF* eingeschnittene Schraube, welche in die Scheibe *F* eingreift, dreht. Der Spiegel ist somit um die zwei zu einander senkrechten Axen *MK* nnd *FG* drehbar, er kann deshalb immer so gestellt werden, dafs das Einfallslot den Winkel, welchen *MK* mit der Richtung *SM* der einfallenden Sonnenstrahlen bildet, halbiert, so dafs also die Sonnenstrahlen stets in der Richtung *MK* zurückgeworfen werden.

Da man in den meisten Fällen nur schmale Bündel Licht benutzen will, werden vor die Röhre *K* Kapseln gesetzt mit verschiedenen Öffnungen, kreisförmigen oder schmalen rechteckigen; ein sehr bequemes Mittel, um schmale Lichtbündel zu erhalten, zeigt Fig. 23 a. Zwei rechteckige Platten *a* und *b*, welche in den einander zugewandten Seiten in scharfen Schneiden enden, sind an den gleicharmigen Hebeln *CD* und *EF* befestigt, welche sich in vertikaler Ebene um ihre Mitte drehen können. Wird *a* gehoben, *b* gesenkt, so nähern sich die Schneiden, wird *b* gehoben, *a* gesenkt, so entfernen sich die Schneiden. Erstere Bewegung wird von der Feder *A*, letztere durch den Winkelhebel *B* bewirkt, der durch Drehung der mit dem Kopf *V* versehenen Schraube bewegt wird.

Von den mit Uhrwerk versehenen Heliostaten ist wohl der einfachste der Meyersteinsche, der die Sonnenstrahlen nach einer festen Richtung, derjenigen der Weltachse reflektiert; durch einen Hülfsspiegel, der fest aufgestellt wird, kann man dann die Strahlen nach einer beliebigen Richtung reflektieren. Die Einrichtung desselben zeigt Fig. 24. Der um seine Axe drehbare Stab *E* trägt nahe seinem untern Ende ein Zahnrad *R*, in welches ein Rad des Uhrwerkes *U* eingreift. Das Uhrwerk ist so reguliert, dafs der Stab in 24 Stunden sich einmal um seine Axe dreht. Der Stab *E* wird der Richtung der Weltaxe parallel gestellt, so dafs also sein oberes Ende gegen den Nordpol gerichtet ist.

Fig. 24.



Auf den Stab *E* wird eine Hülse *h* gesteckt, welche die den Spiegel tragende Gabel *g* trägt. Die Hülse ist um die Axe des Stabes und der Spiegel um eine zur Axe des Stabes *E* senkrechte Axe drehbar. Man stellt nun zunächst die Gabel so, dafs die durch das Einfallslot des Spiegels und die Axe von *E* bestimmte Ebene zugleich die Sonnenstrahlen aufnimmt, und klemmt die Hülse so fest.

Dann dreht man den Spiegel um die zu *E* senkrechte Axe mit Hülfe

des Knopfes K so, dafs die Strahlen parallel E, also parallel der Weltaxe reflektiert werden.

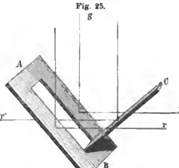
Ist das erreicht, so werden die Strahlen, wenn man das Uhrwerk gehen läfst, stets in der Richtung der Weltaxe reflektiert, da das Einfallslot des Spiegels sich dann genau so schnell um die Weltaxe dreht wie die Sonne; die durch die Sonnenstrahlen und die Weltaxe gelegte Ebene nimmt stets das Einfallslot des Spiegels in sich auf, und der von den Sonnenstrahlen und der Weltaxe gebildete Winkel wird stets von dem Einfallslot des Spiegels halbiert.

Zur bequemern Einstellung des Spiegels gegen die Weltaxe ist der Apparat mit einem geteilten Kreise DD versehen, dem sogenannten Deklinationskreis, auf dessen Teilung ein mit der Spiegelaxe fest verbundener und der Spiegelebene paralleler Zeiger einsteht. Die Teilung auf dem Kreise ist so aufgetragen, dafs der Zeiger auf 0 steht, wenn die Spiegelebene dem Stabe E, also der Weltaxe parallel ist. Ist dann an einem bestimmten Tage die Deklination der Sonne gleich d, positiv wenn dieselbe nördlich, negativ wenn sie südlich ist, so ergibt sich unmittelbar, dafs der Winkel, den die Spiegelebene mit der Weltaxe bilden mufs, gleich $45^0 + \frac{1}{2} d$ ist. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche mufs also der Spiegel mit E einen Winkel von 45^0 bilden, der Winkel ist gröfser im Sommer, kleiner im Winter.

Wenn man zwei Spiegel unter einem rechten Winkel zusammensetzt, so dafs die innern Flächen des Winkels die reflektierenden Flächen sind, und die Spiegel so einem Bündel paralleler Lichtstrahlen entgegensetzt, dafs die einfallenden Lichtstrahlen den Winkel halbieren, so bewegen sich die von beiden Spiegeln reflektierten Strahlen gerade nach entgegengesetzten Richtungen.

Haben die Spiegel die Fig. 25 dargestellte Zusammensetzung, so werden die von S aus auf den Spiegel AB fallenden Strahlen nach r, die auf CB fallenden Strahlen nach r' geworfen.

Fig. 25.



Dieser Satz ist von Gauss in seinem Heliotropen zum Signalgeben bei geodätischen Messungen benutzt worden.

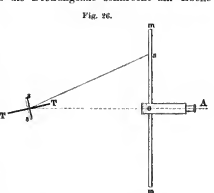
Eine solche Spiegelkombination wird vor das Objektiv eines Fernrohrs angebracht, dessen Axe durch eine im Spiegel C befindliche Öffnung hindurchgeht, und welches auf den Ort eingestellt ist, wohin man signalisieren will. Die Spiegelkombination kann nun nach allen möglichen Richtungen hin gedreht werden, demnach auch so, dafs, welches auch der Stand der Sonne ist, die einfallenden Sonnenstrahlen den Winkel der beiden Spiegel halbieren, und zugleich die Strahlen, welche von dem einen Spiegel reflektiert werden, in die Axe des Fernrohrs geworfen werden. Ist das der Fall, so werden die von dem andern Spiegel reflektierten Strahlen nach dem Orte hingeworfen, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist. Man kann daher nach diesem Orte beliebige Lichtblitze hinsenden und auf diese Weise beliebige Signale geben.

Das Reflexionsgoniometer von Wollaston, welches dazu dient, die Winkel zu messen, welche zwei Krystall- oder Prismenflächen mit einander bilden, ist ebenfalls eine Anwendung der Spiegelung. Vor der Axe eines Rohres und um eine die Axe des Rohres schneidende und zu ihr senkrechte, mit der Kante, in welcher sich die beiden Flächen schneiden, parallele Axe drehbar, wird der zu untersuchende Körper so aufgestellt, dafs von einer seiner Flächen das Bild eines fernen Gegenstandes in die Axe des Rohres geworfen wird. Darauf wird der Körper um seine Axe gedreht, so lange, bis das Bild desselben Gegenstandes durch Reflexion an der zweiten Fläche in die Axe des Rohres geworfen wird. Dann steht die zweite Fläche gerade so, wie vorhin die erste, und der Winkel, um welchen man den Körper gedreht hat, ist das Supplement des Winkels, den die beiden Flächen mit einander bilden.

Eine Anwendung der Spiegelungsgesetze, um kleine Winkel zu messen, um welche sich bei der Torsion ein Faden oder ein um eine vertikale Axe drehbarer Magnet gedreht hat, ist zuerst von Gaus bei seinen magnetischen Beobachtungen, die wir im vierten Teile besprechen werden, angewandt worden.

An die Drehungsaxe des drehbaren Körpers TT wird ein ebener Spiegel befestigt (Fig. 26) ss, wo wir uns die Drehungsaxe senkrecht zur Ebene der Zeichnung denken. In einiger Entfernung davon ist dem Spiegel ein Fernrohr gegenübergestellt, unter welchem ein Mafsstab mm so angebracht ist, dafs, wenn der Spiegel ss in seiner Ruhelage ist, der Beobachter bei A durch das Fernrohr hindurch in dem Spiegel den Nullpunkt der Teilung gespiegelt sieht. Dreht sich der Spiegel um irgend einen kleinen Winkel, so sieht man von A aus in dem Spiegel das Bild irgend eines andern Teilstriches a. Aus dem Abstand dieses Teilstriches oa vom Nullpunkte der Skala und der Entfernung os des Mafsstabes vom Spiegel kann man dann leicht den Winkel berechnen, um welchen sich der Spiegel gedreht hat. Der einfallende Lichtstrahl as bildet mit dem reflektierten ss einen Winkel 2α, dessen Tangente gleich ist

Fig. 26.



$$\text{tang } 2\alpha = \frac{oa}{os}.$$

Jeder der beiden Strahlen as und os bildet mit dem Einfallslote des Spiegels den Winkel α. In der Ruhelage, als der Nullpunkt der Skala gespiegelt wurde, fiel der einfallende Strahl os mit dem reflektierten so und beide mit dem Einfallslote zusammen. In der abgelenkten Lage bildet die Richtung der Spiegelnormale mit der frühern Richtung derselben os den Winkel α, um diesen Winkel hat sich also der Spiegel und mit ihm der Stab TT gedreht. Der Stab hat sich also um die Hälfte desjenigen Winkels

gedreht, dessen Tangente gleich dem Quotienten der beiden Abstände oa und as ist, welche beide mit sehr grofser Genauigkeit gemessen werden können.

Auf dem gleichen Princip beruht die Verwendung des rotierenden Spiegels zur Beobachtung der vibrierenden Flammen zur Analyse des Klanges, die wir in der Lehre vom Schalle erwähnten, sowie zu ähnlichen Beobachtungen. Denn ebenso wie das in der Richtung Ao Fig. 26 in den Spiegel blickende Auge bei einer Drehung des Spiegels nach und nach immer andere Teilstriche der Skala sieht, so wird das von dem Nullpunkt der Skala auf den Spiegel treffende Licht nach immer andern Richtungen zurückgeworfen. Das Bild des Nullpunktes erscheint deshalb einem Auge, welches aus hinreichend kleiner und daher ein grofses Gesichtsfeld bietender Entfernung in den Spiegel blickt, auf einem Kreise mit dem Radius os um den Winkel 2α verschoben, wenn der Spiegel um den Winkel α gedreht ist. Verändert nun etwa ein bei o angebrachtes Licht während der Drehung seine Gröfse oder Farbe, so sieht man diese Veränderungen neben einander und, wenn diese Veränderungen rasch genug erfolgen, gleichzeitig. Der rotierende Spiegel zeigt uns also den zeitlichen Verlauf einer Lichterscheinung räumlich neben einander gelegt und ist deshalb ein ausgezeichnetes Mittel zur Untersuchung solcher Lichterscheinungen, welche einen so raschen Verlauf haben, dafs wir die nach einander folgenden Veränderungen nicht auffassen können.

Ebenso ist der rotierende Spiegel ein vortreffliches Mittel zur Messung der Dauer sehr rasch vorüber gehender Lichterscheinungen, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels kennt. Eine bei o aufblitzende Lichterscheinung, die so lange dauert, dafs während derselben der Spiegel den Winkel α beschreibt, erscheint im Spiegelbild als Bogen von der Länge 2α. Eine Messung der Länge dieses Bogens gibt uns daher das Mittel die Gröfse der Drehung des Spiegels während der Dauer der Lichterscheinung zu bestimmen; die Dauer der Lichterscheinung ist dann ein ebenso grofser Bruchteil der Umdrehungszeit des Spiegels als der gefundene Drehungsbogen ein Bruchteil des Kreisumfanges ist.

Der Spiegelsextant von Hadley, der den Zweck hat, durch eine einzige Beobachtung den Winkel zu messen, den die von dem Beobachter nach zwei festen Punkten gehenden Richtungen mit einander bilden, beruht auf einem ganz ähnlichen Princip.

An einer Stelle des festen Radius CA eines Kreissektors CAB (Fig. 27), der gewöhnlich den sechsten Teil des Kreisumfanges beträgt, ist ein ebenes Spiegelchen s, parallel dem Radius CB und senkrecht zur Ebene des Kreissektors befestigt. Dem Spiegel gegenüber ist ein Fernrohr F mit Fadenkreuz so angebracht, dafs ein in der Richtung CA oder Cs auf den Spiegel fallender Strahl nach F parallel der Fernrohraxe reflektiert wird. Der Spiegel s und das Fernrohr F sind auf dem Apparate fest angebracht.

Um den Mittelpunkt C des Kreissektors CAB dreht sich eine Alhidade CD, die einen auf der Ebene des Kreissektors senkrechten kleinen Planspiegel trägt, der mit der Alhidade um die durch seine Ebene hindurchgehende, zur Ebene des Sektors in C senkrechte Axe drehbar ist. Bei einer Drehung der Alhidade wird also die Spiegelebene oder Spiegelnormale um denselben Winkel gedreht. Der Kreisbogen AB ist von B an, wo der Null-

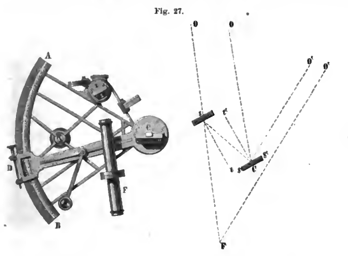
punkt der Teilung ist, in halbe Grade geteilt, die halben Grade sind jedoch meist als ganze bezeichnet, indem dann bei einer Beobachtung die abgelesenen Zahlen sofort den gesuchten Winkel angeben.

An der Alhidade ist ein Nonius angebracht, der Bruchteile des Grades gibt.

Wenn der Nullpunkt des an dem beweglichen Radius befestigten Nonius auf dem Nullpunkt der Teilung steht, so sind die beiden Spiegel *s* und *s'* einander parallel; diese Stellung wird ihnen beim Beginne jeder Messung gegeben.

Um nun den Winkel zu bestimmen, welchen die nach zwei entfernten Punkten *O* und *O'* gezogenen Richtungslinien *FO* und *FO'* (man sehe die Nebenfigur) bei *F* mit einander bilden, wird der Sextant so vor dem Auge

Fig. 27.



gehalten, dafs die Fernrohraxe parallel mit *FO* ist, und die Ebene des Kreissektors mit der durch *FO* und *FO'* gelegten Ebene zusammenfällt. Der Spiegel *s* besteht aus einer planparallelen Glasplatte, deren untere Hälfte belegt, deren obere Hälfte jedoch durchsichtig ist. Durch die obere durchsichtige Hälfte sieht man dann, wenn man durch das Fernrohr blickt, den Ort *O*, zugleich aber auch in der belegten Hälfte des Glases in dem Spiegel durch doppelte Reflexion bei *s'* und *s* das Spiegelbild desselben Punktes *O*. Denn die von dem fernen Punkte *O* ausgehenden und den Spiegel *s'* treffenden Strahlen sind parallel den Strahlen *OF*, welche direkt das Fernrohr treffen. Diese Strahlen werden nach *Cs* und von *s* nach *F* reflektiert, da der Winkel $Fsc = scO$ und somit die Spiegelnormale *ct'* den Winkel *sCO* ebenso halbiert, wie die mit ihr parallele Spiegelnormale *st* des Spiegels *s* den Winkel *Fsc*.

Wird dann der Spiegel *s'* mit der Alhidade *CD* so weit gedreht, dafs man jetzt von *F* aus in dem Spiegel *s* unmittelbar unter dem direkt gesehenen Punkte *O* das Spiegelbild des Punktes *O'* sieht, sowie man vorher das Spiegelbild des Punktes *O* sah, so ist der Winkel *OFO'* gleich dem

Doppelten des Winkels, um welchen man die Alhidade gedreht hat. Sind also, wie vorhin erwähnt, auf der Teilung die halben Grade als ganze gezählt, so ergibt eine einfache Ablesung den gesuchten Winkel OFO'.

Damit man nämlich in F durch die Reflexion bei s' und s die von O' kommenden Strahlen wahrnehme, mufs der Spiegel s' so weit gedreht werden, dafs die Strahlen $O'C$ nach cs reflektiert werden, also so weit, dafs die Spiegelnormale Ct' den Winkel $O'Cs$ halbiert. Nennen wir den Winkel, den die Strahlen OC mit Cs bilden, x, und den Winkel, den die Strahlen $O'C$ mit OC bilden, den Winkel, den wir suchen, y, so ist der Winkel

$$O'Cs = x + y.$$

In der anfänglichen Lage halbierte die Spiegelnormale den Winkel x oder

$$sCt' = \tfrac{1}{2}x,$$

nachdem wir den Spiegel und somit die Spiegelnormale um den an der Teilung abzulesenden Winkel α gedreht hatten, bis er in s das Bild von O' lieferte, halbiert sie den Winkel $x + y$, oder

$$sCt' + \alpha = \tfrac{1}{2}(x + y)$$

und darans folgt

$$2\alpha = y.$$

Da nun der Winkel $O'CO = y$ gleich ist dem gesnchten Winkel $O'FO$, so gibt uns die Verdoppelnng des Winkels, nm welchen wir die Alhidade gedreht haben, den gesuchten Winkel.

Der Spiegelsextant dient besonders zu geographischen Ortsbestimmungen mittels der Messungen von Sternhöhen, wenn man, wie auf Reisen, nicht imstande ist, genauere astronomische Beobachtungen zn machen[1]).

Wenn man zwei Spiegel unter irgend einem spitzen Winkel zusammensetzt, so erhält man von einem zwischen denselben angebrachten leuchtenden Punkte stets mehrere Bilder, indem gewissermafsen die Bilder des einen Spiegels in dem andern Spiegel nochmals reflektiert werden und so zu neuen Bildern Anlafs geben. Sind z. B. CA und CB (Fig. 28) zwei unter einem Winkel von 60^0 gegen einander geneigte Spiegel, so erhält man 5 Bilder von einem zwischen denselben liegenden leuchtenden Punkte L, welche alle auf dem Umfange eines mit dem Radius CL beschriebenen Kreises liegen, und welche mit dem leuchtenden Punkte zusammen die 6 Ecken eines in den Kreis beschriebenen Sechseckes bilden, das ein regelmäfsiges Kreissechseck wird, wenn L auf der Halbierungslinie des Winkels ACB liegt.

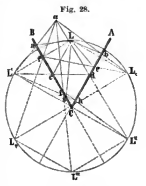
Der Spiegel CB gibt von L zunächst das Bild L', welches ebenso weit hinter CB wie L vor CB liegt; von L' gibt der Spiegel CA das Bild L'' und von diesem CB das Bild L'''. Der Spiegel CA liefert von L das Bild $L_{,}$, von diesem CB das Bild $L_{,,}$ und davon CA wieder L'''.

Wie die Bilder entstehen, sieht man, wenn man den Gang der von L ausgebenden und bei a das Auge treffenden Strahlen verfolgt. La und Lb werden direkt nach a reflektiert, sie geben die Bilder L' und $L_{,}$. Lc gelangt nach einer zweiten Reflexion bei d, Le nach einer zweiten Reflexion bei f ins Auge bei a, sie geben daher die Bilder L'' und $L_{,,}$. Lg schliefs-

[1]) Man sehe *Bohnenberger*, geographische Ortsbestimmungen vorzüglich mittels des Spiegelsextanten, 2. Aufl., besorgt von Jahn. Göttingen 1852.

lich wird zunächst nach h und von dort nach i und weiter nach a reflektiert, es gibt L''' als Bild von L'' und auch von $L_{''}$.

Dafs die Bilder auf dem Umfange eines Kreises liegen, folgt unmittelbar daraus, dafs jedes Bild so weit hinter dem Spiegel liegt, wie der es erzeugende Punkt vor dem Spiegel. Zwei von dem leuchtenden Punkte und seinem Bilde nach einem Punkte des Spiegels gezogene Gerade müssen daher gleich sein. Es müssen daher auch die nach dem beiden Spiegeln gemeinschaftlichen Punkte C gezogenen Geraden oder $CL = CL' = CL_{,}$ und ebenso $CL'' = CL', CL''' = CL'', CL_{''} = CL_{,} = CL'''$ sein, oder alle Punkte L müssen gleich weit von C entfernt sein. Die Bilder liegen demnach alle auf dem mit CL um C beschriebenen Kreise.



Dafs in diesem Falle gerade 5 Bilder entstehen müssen, oder dafs L''' das Bild von L'' und $L_{''}$ ist, somit kein neues Bild mehr erzeugen kann, erhält man auf folgende Weise. Ist der Winkelabstand des Punktes L von CB oder der Winkel $LCB = \varphi$, so ist $LCA = 60^0 - \varphi$. Der Winkel LCL' ist dann, da die Kreissehne LL' von CB halbiert wird, gleich 2φ und $LCL_{,} = 120^0 - 2\varphi$. Der Winkel $L'CA$, der Winkelabstand des Punktes L' vom Spiegel CA, der das Bild L'' entwirft, ist $60^0 + \varphi$, also $L'CL'' = 2 \,.\, L'CA = 120^0 + 2\varphi$. Der Winkel $L''CL$, oder der Winkelabstand der Punkte L'' und L ist dann 120^0. Von L'' erzeugt der Spiegel CB das Bild L'''. Der Winkel $L''CB$ ist $120^0 + \varphi$, demnach $L''CL''' = 240^0 + 2\varphi$ und ziehen wir davon den Winkelabstand der Punkte L'' und L ab, so erhalten wir als Abstand des dritten Bildes L''' von L $120^0 + 2\varphi$.

Andrerseits erzeugt CB ein zweites Bild von $L_{,}$. Der Winkel $L_{,}CB$ gleich $L_{,}CL + LCB$ ist gleich $120^0 - 2\varphi + \varphi = 120^0 - \varphi$. Der Winkel $BCL_{''}$ ist daher ebenfalls $120^0 - \varphi$. Von $L_{''}$ erzeugt nun CA ein drittes Bild, dessen Winkelabstand ACL''' von AC gleich ist dem Winkel $ACL_{''} = 120^0 - \varphi + BCA$ gleich $180^0 - \varphi$. Der Winkelabstand dieses Punktes von L ist daher $ACL''' + LCA$ gleich $180^0 - \varphi + 60^0 - \varphi = 240^0 - 2\varphi$.

Das Bild L''' des Punktes L'' liegt von L nach links herum in einem Abstande $120^0 + 2\varphi$, das Bild L''' des Punktes $L_{''}$ nach rechts herum in $240^0 - 2\varphi$. Die Summe beider ist aber 360^0, das heifst, beide Bilder liegen an demselben Punkte des Kreisumfanges. Ist φ gleich 30^0, so ist der Winkelabstand aller Bilder 60^0.

Ist nun allgemein der Winkel, den die beiden Spiegel mit einander bilden, $\frac{1}{n}$ des Kreisumfanges, so ist, wenn n eine ganze Zahl ist, die Anzahl der Bilder, wie man in ganz gleicher Weise erhält, $n - 1$.

Die Vervielfachung der Bilder wird in dem Brewsterschen Kaleidoskop angewandt, um mittels weniger bunter Glasstückchen die mannigfachsten symmetrischen Figuren zu erhalten. Die Einrichtung des vielfach verbreiteten Apparates darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden.

§ 11.

Reflexion an krummen Flächen. Krumme Flächen können wir als eine Reihenfolge gegen einander geneigter kleiner Ebenen bezeichnen, indem in jedem Punkte ein unendlich kleines Stück der Fläche mit der an diesem Punkte an die krumme Fläche gelegten Berührungsebene zusammenfällt. Das Reflexionsgesetz mufs daher für krumme Flächen dasselbe sein, wie für ebene, die Reflexion geht so vor sich, als fände sie an den Berührungsebenen statt, welche den verschiedenen Punkten der reflektierenden Fläche entsprechen.

Der reflektierte Lichtstrahl liegt daher in derjenigen Ebene, welche durch den einfallenden Lichtstrahl und das Einfallslot, die zu dem betreffenden Punkte gehörige Normale der Fläche, bestimmt wird, und bildet mit dieser Normale denselben Winkel, wie der einfallende Lichtstrahl. Der Unterschied zwischen der Reflexion an ebenen und krummen Flächen besteht nur darin, dafs an ebenen Flächen die Einfallslote alle parallel sind, während sie an krummen Flächen alle verschiedene Richtungen haben, welche von der Natur der krummen Fläche bestimmt sind. Die Richtung, nach welcher die eine krumme Fläche treffenden Strahlen von derselben zurückgeworfen werden, hängt daher von dem Gesetze ab, nach welchem die Fläche gekrümmt ist, und kann, wenn dieses Gesetz bekannt ist, durch Rechnung oder Konstruktion bestimmt werden. Die Lösung dieser Aufgabe gehört daher mehr in das Gebiet der Geometrie als der Physik; wir wollen sie daher auch nicht in ihrer allgemeinsten Form behandeln, sondern nur die Reflexion an kugelförmigen Spiegeln etwas ausführlicher betrachten, da sie die einzigen sind, welche wir später benutzen werden, und da sie fast ausschliefslich in der praktischen Optik angewandt werden.

Bei der Kugel fallen bekanntlich, da der an irgend einen Punkt derselben gezogene Radius auf der an denselben Punkt gelegten Berührungsebene senkrecht steht, die Normalen mit den Radien zusammen. Für einen die Kugel in irgend einem Punkte treffenden Lichtstrahl ist daher der an diesen Punkt gezogene Radius das Einfallslot.

Sei MN (Fig. 29) ein Durchschnitt durch eine entweder an ihrer konvexen oder an ihrer konkaven Seite spiegelnde Kugelfläche, C ihr Mittelpunkt und Q ein leuchtender Punkt, der im Abstande QC von dem Mittelpunkte des Spiegels einen Strahlenkegel auf den Spiegel sendet.

Die Richtung des von irgend einem Punkte J des Durchschnitts zurückgeworfenen Strahles wird bestimmt sein, wenn wir aufser dem Punkte J noch den Punkt D kennen, in welchem der Strahl JR entweder wirklich oder rückwärts verlängert, die Verbindungslinie QC des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel schneidet. Wir bestimmen diesen Punkt am bequemsten dadurch, dafs wir seinen Abstand CD vom Mittelpunkte oder Sd vom Scheitel S bestimmen. Zur Bestimmung von CD haben wir folgende Proportionen

$$CD : CJ = \sin DJC : \sin CDJ \ldots (1)$$

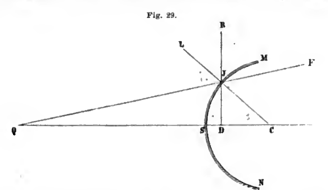
$$QC : CJ = \sin CJQ : \sin CQJ \ldots (2)$$

und indem wir die erste durch die zweite dividieren

$$\frac{CD}{QC} = \frac{\sin CQJ}{\sin CDJ} \cdot \frac{\sin DJC}{\sin CJQ}.$$

Nun ist zunächst $DJC = QJL$, da CJD der Scheitelwinkel des Reflexionswinkels, dieser aber dem Einfallswinkel gleich ist, deshalb ist CJQ Nebenwinkel von DJC und somit $\sin DJC = \sin CJQ$. Nennen wir

Fig. 29.



den Abstand des Punktes D vom Mittelpunkt $CD = g$, den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte $QC = b$, den Radius $CJ = r$, den Einfallswinkel $QJL = i$, und den Winkel DCJ, der die Lage des Punktes J auf der Kugel bestimmt, β, so haben wir zunächst

$$\sin CQJ = \sin (LJQ - LCQ) = \sin (i - \beta)$$
$$\sin CDJ = \sin QDJ = \sin (DCJ + CJD) = \sin (i + \beta),$$

somit

$$\frac{g}{b} = \frac{\sin (i - \beta)}{\sin (i + \beta)} = \frac{\sin i \,.\, \cos \beta - \cos i \,.\, \sin \beta}{\sin i \,.\, \cos \beta + \cos i \,.\, \sin \beta}$$
$$\frac{g}{b} + 1 = \frac{g + b}{b} = \frac{2 \,.\, \sin i \,.\, \cos \beta}{\sin (i + \beta)}.$$

Nun ist nach (1)

$$\frac{\sin i}{\sin (i + \beta)} = \frac{g}{r};$$

demnach

$$\frac{g + b}{b} = \frac{2g \,.\, \cos \beta}{r}$$
$$g = \frac{b \,.\, r}{2b \,.\, \cos \beta - r} \ldots \text{I.}$$

Da wir bei dieser Entwicklung Q als den leuchtenden und D als den Punkt betrachtet haben, in welchem der reflektierte Strahl die Axe schneidet, so gilt dieser Ausdruck zunächst nur für solche Kugelspiegel, die dem Lichte ihre konvexe Seite darbieten; es ist indes leicht, den Nachweis zu liefern, dafs der Ausdruck ganz in derselben Weise seine Gültigkeit hat, wenn das Licht auf die konkave Seite der Kugel fällt. Ist nämlich D der leuchtende Punkt, DJ der einfallende Lichtstrahl, so ist JF der reflektierte

Strahl; und da JF die Verlängerung von QJ ist, so schneidet der reflektierte Strahl die Axe im Punkte Q. Während wir also vorhin CD durch CQ ausdrücken mufsten, müssen wir jetzt CQ durch CD bestimmen. Die obigen Gleichungen bleiben also ganz dieselben, wir haben sie nur anstatt nach CD jetzt nach CQ aufzulösen, oder was dasselbe ist nach b. Wir erhalten dann

$$b = \frac{g \cdot r}{2g \cdot \cos\beta - r} \cdots \text{II}.$$

Setzen wir ein für allemal den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte gleich b, den Abstand des Punktes, in welchem der reflektierte Strahl die Axe schneidet, vom Mittelpunkte gleich g, so haben wir in der Gleichung II die Zeichen g und b mit einander zu vertauschen, und wir erhalten

$$g = \frac{b \cdot r}{2b \cdot \cos\beta - r},$$

ein Ausdruck, der mit dem Ausdruck I identisch ist. Ein und dieselbe Gleichung liefert uns sowohl für konvexe als konkave spiegelnde Kugelflächen den Abstand vom Mittelpunkt, in welchem der reflektierte Strahl die Axe der spiegelnden Fläche, das heifst die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel schneidet.

Wie man sieht hängt dieser Abstand wesentlich von drei Gröfsen ab, von dem Radius der spiegelnden Kugel, der Entfernung des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte, und von der Stelle, an welcher der Spiegel von dem einfallenden Strahl getroffen wird.

Was zunächst den letzten Umstand angeht, so sieht man, dafs je weiter der spiegelnde Punkt von der Axe entfernt ist, je gröfser der Winkel β ist, um so gröfser auch g wird, dafs also der reflektierte Strahl die Axe um so weiter vom Mittelpunkte schneidet, je weiter der spiegelnde Punkt des Spiegels von der Axe entfernt ist.

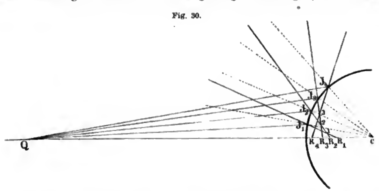
Nur jene Strahlen, für welche der Winkel β denselben Wert hat, schneiden nach der Reflexion die Axe in demselben Punkte; es sind das die Strahlen, welche den Spiegel auf einem zur Axe senkrechten Kreise treffen, wie ihn z. B. der Punkt J Fig. 29 beschreibt, wenn wir uns die Figur um die Axe des Spiegels, QC, gedreht denken. Alle diesen Kreis treffenden Strahlen schneiden sich nach der Reflexion im Punkte D, man nennt daher den Punkt D den Brennpunkt des betreffenden Ringes.

Da die Brennpunkte der einzelnen Ringe dem Spiegel um so näher rücken, je weiter der spiegelnde Punkt von der Axe entfernt ist, so müssen die von verschiedenen Ringen kommenden Strahlen sich schneiden, und zwar in immer andern Punkten; oder betrachten wir wieder nur einen Durchschnitt durch die Kugelfläche, so wird ein Strahl J_1 nach der Reflexion von einem unmittelbar neben ihm reflektierten Strahl J_2 in einem Punkte 1 geschnitten. Der Strahl J_2 wird von J_3 nach der Reflexion in einem Punkte 2 geschnitten, der dem Punkte 1 sehr nahe liegt, und ebenso wird J_3 von dem Strahle J_4 in einem Punkte 3 geschnitten. Diese Punkte, in welchen sich die einzelnen Strahlen schneiden, ordnen sich auf bestimmten Linien, welche den Namen der Brennlinien führen. Da nämlich diese Linien aus einer stetigen Reihe von Punkten gebildet werden, in welchen sich mehrere

Strahlen schneiden, so ist die Helligkeit dort gröfser als in dem übrigen in der Nähe des Spiegels liegenden Raume, sie treten deshalb hell vor ihrer Umgebung hervor.

Um die Gestalt der Brennlinien zu erhalten, hat man die einzelnen Schnittpunkte ihrer Lage nach, oder die Gleichung der krummen Linie aufzusuchen, welche der geometrische Ort dieser Punkte ist. Die Ableitung dieser Gleichung erfordert ziemlich langwierige Rechnungen; wir können

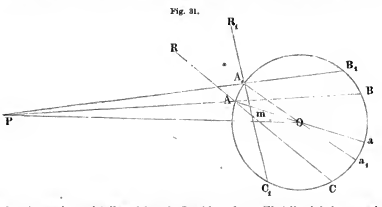
Fig. 30.



indes durch Bestimmung der Abstände der Punkte 1 . . . von den spiegelnden Punkten J_1 . . . leicht zu einem Ausdruck gelangen, der uns wenigstens dann, wenn der leuchtende Punkt unendlich weit entfernt ist, die spiegelnde Fläche also von parallelen Strahlen getroffen wird, die Gestalt der Brennlinie ohne Mühe zu bestimmen gestattet.

Sei Fig. 31 der Kreis ein Durchschnitt durch eine Kugel, welche entweder auf ihrer konvexen oder ihrer konkaven Seite spiegelnd ist, und P ein leuchtender Punkt, der seine Strahlen auf die Kugel sendet; seien PA

Fig. 31.



und PA_1 zwei unmittelbar folgende Strahlen, deren Einfallswinkel so wenig von einander verschieden sind, dafs wir den Bogen AA' als gerade betrachten dürfen, und seien AC und A_1 C_1 die in der Zeichnung rückwärts verlängerten reflektierten Strahlen, die sich im Punkte m schneiden; wir

haben den Abstand Am gleich f zu bestimmen. Da die Dreiecke AmA_1 und C_1mC wegen Gleichheit aller Winkel ähnlich sind, so haben wir zunächst die Proportion

$$Am : C_1m = AA_1 : CC_1 \,.\,.\,(1)$$

Verlängern wir nun die einfallenden Strahlen, bis sie in B resp. B_1 den Kreis auf der andern Seite schneiden, so sind ebenfalls wegen Gleichheit aller Winkel die Dreiecke PAA_1 und PB_1B ähnlich, somit

$$AA_1 : BB_1 = PA : PB_1 \,.\,.\,(2)$$

Nun stehen als Peripheriewinkel auf den Bogen Ba der Einfallswinkel, auf Ca der Reflexionswinkel des Strahles PA, auf B_1a_1 der Einfallswinkel, auf C_1a_1 der Reflexionswinkel des Strahles PA_1; es ist deshalb

$$B_1a_1 = C_1a_1;\; Ba = Ca$$
$$B_1a_1 - Ba = C_1a_1 - Ca;\; BB_1 + aa_1 = CC_1 - aa_1$$
$$BB_1 + 2aa_1 = CC_1.$$

Da weiter aa_1 und AA_1 die Bogen gleicher Scheitelwinkel sind, so ist $aa_1 = AA_1$ und $CC_1 = BB_1 + 2AA_1$. Damit erhalten wir aus Gleichung 2

$$AA_1 : BB_1 + 2AA_1 = AA_1 : CC_1 = PA : PB_1 + 2PA$$

und daraus nach 1

$$Am : C_1m + Am = PA : PB_1 + 3PA.$$

Da schließlich C_1m von Cm, PA_1 von PA nur unendlich wenig verschieden ist, so wird

$$Am = AC \cdot \frac{PA}{PB + 3PA} = AC \cdot \frac{PA}{AB + 4PA}$$

oder wenn wir den Abstand des leuchtenden Punktes von seinem Spiegelpunkte $PA = a$, die Sehne AB und die ihr gleiche AC mit s bezeichnen,

$$f = s \cdot \frac{a}{s + 4a}.$$

Wir haben bei dieser Ableitung die konvexe Seite der Kugel als spiegelnd angenommen; ist die Kugel auf der konkaven Seite spiegelnd, findet also die Reflexion bei B statt, so erhalten wir durch eine ganz gleiche Ableitung für f den Ausdruck

$$f = s \cdot \frac{a}{4a - s},$$

wenn a dann den Abstand PB, also wieder den Abstand des leuchtenden Punktes von dem Punkte des Spiegels bedeutet, wo der einfallende Strahl reflektiert wird. Um die Brennlinie zu konstruieren, hätten wir auf jedem reflektierten Strahl den Abstand f aufzutragen, und die so erhaltenen einzelnen Punkte m zu konstruieren.

Sehr leicht ist diese Linie zu konstruieren, wenn die einfallenden Strahlen parallel werden, wenn also für alle Strahlen a gleich und zwar gleich unendlich wird. Schreiben wir nämlich den Ausdruck für f in der Form

$$f = \frac{s}{\frac{s}{a} + 4} \text{ oder } \frac{s}{4 - \frac{s}{a}},$$

so sieht man sofort, dafs $\frac{s}{a} = o$, da $a = \infty$, und es wird in beiden Fällen

$$f = \frac{s}{4};$$

oder wir haben auf dem reflektierten Strahle jedesmal ein Viertel der zum einfallenden Strahle gehörigen Sehne abzutragen, um den betreffenden Punkt der Brennlinie zu erhalten.

Um sofort ein Viertel der betreffenden Sehne zu bekommen, haben wir nur Fig. 32 den zum Einfallspunkt A gehörigen Radius OA in vier gleiche Teile zu teilen, und um den $\frac{1}{4}r$ von A auf dem Radius entfernten Punkt o einen Kreis mit $\frac{r}{4}$ zu ziehen, so dafs er den spiegelnden Kreis tangiert. Dieser Kreis schneidet in m von dem reflektierten Strahle $\frac{1}{4}s$ ab; somit ist m der diesem reflektierten Strahle angehörige Punkt der Brennlinie.

Fig. 32.

Denn zunächst ist $Am = Ae$. Verbindet man nun den Punkt t, in welchem der Radius OA den kleinen Kreis schneidet, mit e, und zieht $Of \perp AA_1$, so sind OfA und teA rechtwinklige ähnliche Dreiecke, somit $Ae : Af = At : AO$; oder da $At = \frac{1}{2}AO$, so ist $Ae = \frac{1}{2}Af = \frac{1}{4}AA_1$ und deshalb auch $Am = \frac{1}{4}AC$.

Wir können so die Brennlinie Punkt für Punkt bestimmen, indem wir für eine Reihe von einfallenden Strahlen dieselbe Konstruktion wiederholen; wir können aber hiernach auch die Brennlinie durch eine stetige Bewegung konstruieren. Ziehen wir nämlich um den Mittelpunkt O einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}r$, der den kleinen Kreis in t tangiert, und denken uns den kleinen Kreis auf dem mittlern Kreise rollen, so beschreibt der Punkt m des kleinen Kreises, dessen Lage wir vorhin bestimmten, die Brennlinie, denn dieser Punkt schneidet in jeder Lage des Kreises von dem Strahle, welcher an dem Punkte reflektiert ist, in welchem der kleine Kreis den Spiegel tangiert, die Länge $\frac{1}{4}s$ ab. Es ergiebt sich das unmittelbar daraus, dafs die Länge des Bogens tm gleich ist der des Bogens ts; denn

im Winkelmafs ist der Bogen tm doppelt so grofs als ts, da auf tm derselbe Winkel als Peripheriewinkel steht, wie auf ts als Centriwinkel. Da nun der Radius des kleinen Kreises gleich der Hälfte des andern Kreises ist, so ist die Länge von ts gleich der von tm. Die Lage des Punktes m ist somit dadurch charakterisiert, dafs er auf dem kleinen Kreise von dem Tangierungspunkt stets so weit entfernt ist, wie der Tangierungspunkt selbst auf dem gröfsern Kreise von der Axe. Daraus ergibt sich aber, dafs die Brennlinie jene Kurve ist, welche der Punkt des kleinen Kreises beschreibt, welcher den Punkt s des gröfsern Kreises berührt, wenn sich der kleine Kreis auf der Axe des Spiegels befindet.

Die Brennlinie ist somit eine Epicykloide, wie sie ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn er auf einem Kreise von doppelt so grofsem Radius rollt, und wie sie Fig. 32 dargestellt ist, auf der einen Seite Es_1E_1, wie sie von der konkaven, auf der andern EsE_1, wie sie von der konvexen Seite eines spiegelnden Halbkreises erzeugt wird.

Denken wir uns die Fig. 32 um die Axe S_1OS gedreht, so beschreibt die Epicykloide eine Rotationsfläche, und diese ist die Brennfläche, welche eine reflektierende Kugel oder Halbkugel erzeugt.

Ähnlich wird die Form der Brennlinie und Brennfläche bei spiegelnden Kugelflächen auch dann, wenn der leuchtende Punkt nicht unendlich weit entfernt ist, sie bekommt immer eine der Epicykloide ähnliche Gestalt, und die Spitze der Kurve liegt immer in der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes und des Mittelpunktes, in einem Abstande vom Spiegel, der abhängig ist von der Entfernung des leuchtenden Punktes vom Spiegel. Bei parallel einfallenden Strahlen ist, da für den in der Axe einfallenden Strahl immer $s = 2r$ ist, der Abstand $s\,S$ oder $s_1\,S_1$ gleich $\frac{1}{2}r$. Rückt der leuchtende Punkt näher, so entfernt sich die Spitze der Brennlinie vom Spiegel bei konkaven spiegelnden Flächen, sie nähert sich bei konvexen; ihr Abstand ist gegeben im letzten Falle durch

$$f = \frac{ra}{2a + r},$$

im ersten Falle durch

$$f = \frac{ra}{2a - r}.$$

Es ergibt sich somit, dafs eine spiegelnde Kugelfläche im allgemeinen kein Bild eines leuchtenden Punktes liefert, wie das ein ebener Spiegel thut, da sich die Strahlen nach der Reflexion nicht alle wieder in einem Punkte schneiden. Es ist vielmehr im allgemeinen jeder Punkt der Brennfläche ein Bild des leuchtenden Punktes, da in jedem Punkte derselben sich reflektierte Strahlen schneiden. Denn wenn unser Auge von den Strahlen getroffen wird, welche sich in dem betreffenden Punkte schneiden, so sehen wir dort einen leuchtenden Punkt, der das Bild des ursprünglich leuchtenden Punktes ist.

Nur in einem Falle bekommen wir ein einziges Bild des leuchtenden Punktes, indem dann die Brennfläche sich auf einen Punkt reduciert, wenn nämlich der leuchtende Punkt im Mittelpunkte der spiegelnden Kugel selbst liegt, ein Fall, der im allgemeinen praktisch nur bei einer spiegelnden

Hohlkugel vorkommt. Für diese Lage des leuchtenden Punktes ist nämlich $a = r$, s stets gleich $2r$, somit

$$f = \frac{2r \cdot r}{4r - 2r} = r;$$

die reflektierten Strahlen schneiden sich alle im Mittelpunkte des Spiegels, dort ist also ein einziges Bild des leuchtenden Punktes. Dafs dieses der Fall sein mufs, ergibt sich auch schon daraus, dafs wenn der leuchtende Punkt im Mittelpunkt liegt, alle Strahlen den Spiegel in der Richtung des Einfallslotes treffen, somit in derselben Richtung zurückgeworfen werden.

Um diesen Fall bei konvexen Spiegeln zu realisieren, müssen die Strahlen so auf die Kugelfläche fallen, dafs sie vor der Reflexion passend verlängert sich im Mittelpunkte schneiden, der leuchtende Punkt mufs also ein virtueller im Abstande des Radius hinter dem Spiegel liegender sein. In der Gleichung für f müssen wir, um dieses auszudrücken, für a einsetzen $- r$, wir erhalten dann für f ebenfalls r.

Mit sehr grofser Annäherung dasselbe, das heifst ebenfalls einen Bildpunkt eines leuchtenden Punktes können wir von Kugelspiegeln erhalten, wenn wir nur ein sehr kleines Segment der Kugel als spiegelnde Fläche benutzen. Ein allerdings strenge genommen unendlich kleines bei S oder S_1, Fig. 32, liegendes Segment der Kugel erzeugt von der Brennlinie nur die Spitze s oder s_1, somit nur einen bestimmten Bildpunkt eines leuchtenden Punktes. Aber auch dann, wenn der Spiegel nicht unendlich klein, wenn die Öffnung des Spiegels, das ist der Winkel, den die äufsersten Radien des Spiegels mit einander bilden, nur wenige Grade beträgt, wird nur ein so kleiner Teil der Brennfläche erzeugt, dafs, wo wir auch das Auge halten, das Bild des leuchtenden Punktes immer fast genau an derselben Stelle, bei s oder s_1 erscheint.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir also auch von kugelförmigen Spiegeln Bilder von leuchtenden Punkten, welche in der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte des Spiegels liegen, und deren Abstand von dem Spiegel bei konvexen Spiegeln gegeben ist durch

$$f = \frac{ra}{2a + r},$$

bei konkaven durch

$$f = \frac{ra}{2a - r}.$$

Dasselbe Resultat liefert uns die im Anfange dieses Paragraphen abgeleitete Gleichung für den Punkt, in welchem die reflektierten Strahlen die Axe schneiden, dessen Abstand vom Mittelpunkt gegeben ist durch

$$g = \frac{br}{2b \cdot \cos\beta - r}.$$

Denn wenn die Öffnung des Spiegels oder β nur wenige Grade beträgt, dürfen wir ohne merklichen Fehler $\cos\beta$ stets gleich 1 setzen; dann wird aber

$$g = \frac{br}{2b - r}$$

oder alle Strahlen, welche von einem so kleinen Kugelsegmente reflektiert werden, schneiden die Axe in demselben Punkte, dieser ist somit der Bild-

punkt des leuchtenden Punktes. Dafs dieser Ausdruck uns dieselbe Lage des Bildpunktes gibt, wie die aus den Brennlinien abgeleiteten, läfst sich leicht zeigen. Ist nämlich Fig. 33 wieder Q der leuchtende Punkt, wenn die konvexe Seite des Kugelsegmentes spiegelnd ist, D der Bildpunkt, dessen Abstand CD vom Mittelpunkte gleich g ist, so ist, wenn wir auch jetzt $DS = f$, $QS = a$ setzen,

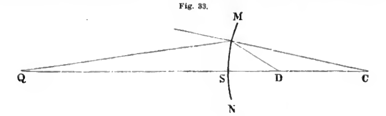
$$f + g = r,\ g = r - f$$
$$a + r = b,$$

und setzen wir diese Werte für g und b in die Gleichung für g, so wird

$$f = \frac{ra}{2a + r}.$$

Ist die konkave Seite der Fläche spiegelnd und D der leuchtende, Q der Bildpunkt, so haben wir in der vorstehenden Gleichung nur f und a mit

Fig. 33.



einander zu vertauschen, da dann $SD = a$ und $SQ = f$ wird. Dann ist

$$a = \frac{rf}{2f + r}$$

und daraus

$$f = -\frac{ar}{2a - r}.$$

Da wir vorhin a positiv rechneten, wenn der leuchtende Punkt auf der konvexen, f positiv rechneten, wenn der Bildpunkt auf der konkaven Seite des Spiegels lag, so folgt, da wir einfach f und a vertauschten, dafs in der letzten Gleichung a positiv ist, wenn der leuchtende Punkt auf der konkaven Seite, dagegen f positiv ist, wenn der Bildpunkt auf der konvexen Seite liegt. Da nun bei konkaven Spiegeln der Bildpunkt meist auf der konkaven Seite liegt, wollen wir der gröfsern Bequemlichkeit wegen f positiv rechnen, wenn der Bildpunkt auf der konkaven Seite liegt; wir haben dazu in der letzten Gleichung rechts nur das Vorzeichen zu ändern und halten dann

$$f = \frac{ar}{2a - r}.$$

Auf die eine oder andere Weise finden wir also, dafs kleine Kugelspiegel Bildpunkte entwerfen, welche in der Spitze der Brennfläche liegen.

§ 12.

Kugelförmige Konvexspiegel. Bilder. Untersuchen wir jetzt die Lage der Bilder von Kugelspiegeln mit hinreichend kleiner Öffnung genauer, und nehmen wir dabei zunächst an, die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte sei zugleich die Rotationsaxe, um welche wir einen Durchschnitt des Spiegels rotiert denken können, um die spiegelnde Kugelfläche zu erzeugen. Man nennt dann die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes und des Mittelpunktes die Hauptaxe oder Axe des Spiegels und den Punkt, wo diese den Spiegel schneidet, den Scheitel des Spiegels. Der für den Abstand des Bildpunktes vom Mittelpunkte gefundene Wert

$$g = \frac{br}{2b - r}$$

zeigt, dafs so lange $b > r$, also der leuchtende Punkt sich vor dem Spiegel befindet, g immer kleiner als r ist, somit ist der Bildpunkt eines reellen leuchtenden Punktes immer virtuell; es verhält sich in dieser Beziehung der Konvexspiegel wie ein ebener Spiegel. Der Abstand des Bildpunktes vom Spiegel ist aber im allgemeinen ein anderer als der Abstand des leuchtenden Punktes. Man erkennt das unmittelbar aus der Gleichung für f

$$f = \frac{ar}{2a + r} = \frac{r}{2 + \frac{r}{a}},$$

denn nach dieser ist immer $f < \frac{r}{2}$, aufser wenn $a = \infty$, also paralleles Licht einfällt. In dem Falle wird einfach $f = \frac{r}{2}$, oder der Vereinigungspunkt paralleler den Spiegel treffender Strahlen liegt in dem Halbierungspunkte des Radius. Man nennt diesen Punkt deshalb den Brennpunkt oder Hauptbrennpunkt des Spiegels. Für alle Werte von a, die kleiner sind, liegt der Bildpunkt zwischen Hauptbrennpunkt und Spiegel, und da mit abnehmendem a der Wert von f abnimmt, so rückt der Bildpunkt dem Spiegel um so näher, je näher auch der leuchtende Punkt dem Spiegel rückt. Ist schliefslich $a = o$, liegt der leuchtende Punkt also unmittelbar auf dem Spiegel selbst, so fällt der Bildpunkt mit ihm zusammen, denn dann wird auch $f = o$.

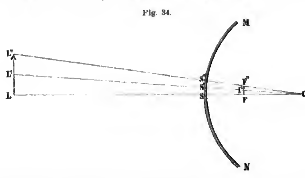
Nur wenn die leuchtenden Punkte virtuell werden, dafs heifst die Strahlen nach einem hinter dem Spiegel liegenden Punkte konvergieren, können wir reelle Bildpunkte erhalten, denn mit a ändert auch f sein Vorzeichen; da wir nun den Wert von f positiv gesetzt haben, wenn der Bildpunkt hinter dem Spiegel liegt, auf der konkaven Seite, so bedeutet ein negativer Wert von f, dafs der Bildpunkt vor dem Spiegel liegt, also hier ein reeller ist. Indem nun a auf der negativen Seite von o bis $\frac{r}{2}$ wächst, nimmt f von o bis ∞ zu, es rückt also der Bildpunkt vom Spiegel immer weiter fort, bis schliefslich die Strahlen als parallele zurückkehren, wenn die einfallenden Strahlen nach dem Hauptbrennpunkte konvergieren.

Für leuchtende Punkte, welche aufserhalb der Hauptaxe des Spiegels liegen, gelten ganz dieselben Sätze über die Lage der Bildpunkte, nur mit

dem Unterschiede, dafs sie anstatt auf die Hauptaxe auf die Verbindungslinien dieser leuchtenden Punkte mit dem Mittelpunkte, die sogenannten Nebenaxen, sich beziehen. Wir müssen demnach die Entfernungen g oder f auf diesen nehmen.

Ist demnach L, L', L'' Fig. 34 eine leuchtende Linie, die wir senkrecht zur Axe LC nehmen, so werden die Strahlen, welche der Punkt L''

Fig. 34.



auf den Spiegel sendet, so reflektiert, als kämen sie von einem Punkte F'', welcher so auf der Nebenaxe CL'' liegt, dafs

$$CF'' = \frac{CL'' \cdot r}{2CL'' - r},$$

während die von L ausgehenden Strahlen in F vereinigt werden, so dafs

$$CF = \frac{CL \cdot r}{2CL - r}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, wenn wir den Winkel $L''CL = \alpha$ setzen,

$$\frac{CF''}{CL''} = \frac{r}{2CL'' - r} = \frac{r \cdot \cos \alpha}{2CL - r \cos \alpha};$$

da aber bei der vorausgesetzten kleinen Öffnung des Spiegels $\cos \alpha$ nur sehr wenig von 1 verschieden ist, können wir ohne merklichen Fehler

$$\frac{r \cdot \cos \alpha}{2CL - r \cos \alpha} = \frac{r}{2CL - r}$$

und damit

$$CL'' : CF'' = CL : CF$$

setzen; oder der Bildpunkt F'' liegt senkrecht über dem Bildpunkte F, wie L'' senkrecht über L liegt. Gleiches gilt von allen zwischen L und L'' liegenden Punkten, sie geben zwischen F und F'' auf FF'' liegende Bildpunkte.

Die einzelnen Bildpunkte folgen sich einander wie die Axen $L''C$, $L'C$, LC, und da diese sich folgen wie die leuchtenden Punkte und sich erst jenseits der Bildpunkte schneiden, so folgt, dafs die gegenseitige Lage der Bildpunkte ähnlich ist derjenigen der leuchtenden Punkte.

Es folgt daraus, dafs ein sphärischer Konvexspiegel ein aufrechtstehendes Bild hinter dem Spiegel von leuchtenden Gegenständen vor dem Spiegel liefert.

Da das Bild in dem Winkel $L''CL$ näher beim Scheitel liegt als der Gegenstand LL'', so folgt, dafs FF'' kleiner ist als LL''.

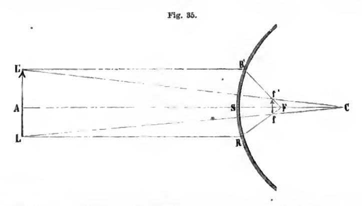
Das Bild, welches ein Konvexspiegel von vor ihm befindlichen leuchtenden Gegenständen liefert, ist somit ein aufrechtstehendes verkleinertes Bild.

Mit Hülfe der beiden Sätze, dafs der Bildpunkt eines leuchtenden Punktes auf der dem Punkte angehörigen Nebenaxe liegt, und dafs der Hauptaxe parallele Strahlen nach der Reflexion den Hauptbrennpunkt schneiden, läfst sich leicht für jeden leuchtenden Punkt der Bildpunkt konstruieren.

Ist LL' Fig. 35 eine leuchtende Linie, die irgendwo vor dem Spiegel liegt, so liegt der Bildpunkt von L auf LC, und der von L' auf $L'C$.

Die von L und L' ausgehenden der Hauptaxe parallelen Strahlen LR und $L'R'$ schneiden nun nach der Reflexion die Hauptaxe in dem Hauptbrennpunkte F. Verbinden wir daher R und R' mit F, so sind die Punkte f und f' die gesuchten Bildpunkte von L und L', und ff' ist das aufrechte verkleinerte Bild von LL'.

Fig. 35.



Diese Sätze über die Reflexion an sphärischen Konvexspiegeln finden in der Erfahrung ihre volle Bestätigung. Solche Spiegel, wie z. B. die in den Gärten oft aufgestellten Kugeln von dunkelm Glase liefern aufrecht stehende verkleinerte Bilder der aufsen befindlichen Gegenstände. Die Bilder sind regelmäfsig, so lange die Gegenstände weit entfernt sind, so dafs der von den Axen der äufsersten Strahlenkegel eingeschlossene Teil des Spiegels nur klein ist. Sobald aber die Entfernung der Gegenstände vom Spiegel gegen ihre Dimensionen nur klein ist, sind die Bilder verzerrt, wie man sich leicht überzeugt, wenn man sich selbst in einem derartigen Spiegel betrachtet.

§ 13.

Reflexion an kugelförmigen Hohlspiegeln; Bilder. In ganz ähnlicher Weise, wie wir es für die konvexen spiegelnden Flächen gethan haben, können wir die Lage der Bildpunkte und Bilder für Hohlspiegel erhalten. Bei hinreichend kleiner Öffnung des Spiegels sahen wir, dafs alle von einem Punkte der Hauptaxe ausgehenden Strahlen sich wieder nach

der Reflexion in einem Punkte der Hauptaxe schneiden, dessen Abstand vom Mittelpunkt gegeben war durch

$$g = \frac{br}{2b - r}.$$

Für den Abstand dieses Punktes vom Spiegelscheitel erhielten wir, indem wir die Abstände des Bildpunktes auf der konkaven Seite mit dem positiven Vorzeichen versahen:

$$f = \frac{ar}{2a - r}.$$

Der auf diese Weise bestimmte Schnittpunkt der reflektierten Strahlen ist der Bildpunkt des leuchtenden Punktes; die Lage desselben hängt wiederum wesentlich ab von der Lage des leuchtenden Punktes und je nach der letztern kann der Bildpunkt ein reeller sein, die reflektierten Strahlen schneiden sich wirklich, oder ein virtueller, der Bildpunkt liegt hinter dem Spiegel, wie bei ebenen oder konvexen Spiegeln.

Nehmen wir zunächst an, der leuchtende Punkt sei unendlich weit entfernt, es treffen den Spiegel parallele Strahlen, so wird f nach der Gleichung

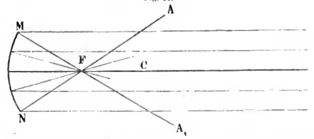
$$f = \frac{r}{2 - \frac{r}{a}},$$

da $\frac{r}{a} = \frac{r}{\infty} = o$ ist,

$$f = \frac{r}{2}.$$

Der Axe parallele Strahlen schneiden sich nach der Reflexion also auf der konkaven Seite des Spiegels in der Mitte zwischen Mittelpunkt und Spiegel; die Lage des Hauptbrennpunktes ist also hier genau dieselbe, wie bei den Konvexspiegeln. Da aber jetzt dieser Punkt auf derselben Seite liegt, von welcher die Strahlen kommen, so ist der Hauptbrennpunkt ein reeller. Lassen wir z. B. die Strahlen der Sonne auf einen Hohlspiegel fallen, so sehen wir in dem Hauptbrennpunkt ein reelles Bild der Sonne, wenn wir unser Auge in der Richtung des reflektierten Strahlenbündels halten, also innerhalb des Kegels FAA' Fig. 36, innerhalb dessen sich die reflektierten Strahlen fortpflanzen. Darin unterscheidet sich ein solches

Fig. 36.



reelles Bild von einem wirklich leuchtenden Punkte, dafs wir letztern von allen Seiten sehen können, sobald nur kein Schirm zwischen Auge und Lichtquelle ist, während wir das reelle Bild nur von solchen Punkten aus

sehen, nach welchen hin die dasselbe bildenden Strahlen sich fortpflanzen. Will man das reelle Bild auch von andern Punkten sehen, mufs man bewirken, dafs sich von demselben auch dorthin die Strahlen ausbreiten. Am besten geschieht das durch die später zu besprechende unregelmäfsige Reflexion, indem man in F einen nicht polierten Gegenstand, etwa einen kleinen Papierschirm hält.

Wird der Abstand a des leuchtenden Punktes kleiner, so wächst f, der Abstand des Bildpunktes vom Spiegel, da dann in dem Ausdruck für f der Quotient $\frac{r}{a}$ gröfser und damit der Nenner kleiner wird. Nimmt a von ∞ bis r ab, rückt also der leuchtende Punkt allmählich bis zum Mittelpunkte, so wächst f von $\frac{r}{2}$ bis r, der Bildpunkt rückt also vom Hauptbrennpunkt bis zum Mittelpunkt. Im Mittelpunkt fällt, wie wir schon früher erwähnten, der leuchtende Punkt und sein Bild zusammen.

Rückt der leuchtende Punkt dem Spiegel noch näher als der Mittelpunkt, so rückt der Bildpunkt über den Mittelpunkt hinaus, f wird gröfser als r, denn dann wird $\frac{r}{a} > 1$, somit der Nenner des Ausdruckes für $f < 1$. Der Bildpunkt rückt bis in unendliche Entfernung, die Strahlen werden nach der Reflexion einander und der Axe parallel, wenn $a = \frac{r}{2}$ wird, denn dann wird

$$f = \frac{r}{2 - 2} = \infty.$$

Die Lage der Bildpunkte, wenn die leuchtenden Punkte zwischen Mittelpunkt und Hauptbrennpunkt liegen, ergibt sich unmittelbar aus der Gleichheit der Einfalls- und Reflexionswinkel; sie liegen dort, wo ein leuchtender Punkt sich befinden müfste, um an der Stelle des jetzt leuchtenden Punktes seinen Bildpunkt zu haben. Das läfst auch die Gleichung für f unmittelbar erkennen, wenn wir den reciproken Wert von f bilden

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a};$$

setzen wir für a irgend einen Wert ein, so erhalten wir einen bestimmten Wert für f. Setzen wir aber jetzt diesen für f gefundenen Wert als a ein, so ergibt die Form der Gleichung, dafs jetzt f den Wert bekommt, der vorher für a angenommen wurde. Leuchtende Punkte und Bildpunkte sind also konjugierte Punkte, so dafs jedesmal, wenn der eine der leuchtende ist, der andere dessen Bild wird.

Wird $a < \frac{r}{2}$, rückt also der leuchtende Punkt zwischen Hauptbrennpunkt und Spiegel, so wird $\frac{r}{a} > 2$, somit der Wert für f negativ. Da nun ein positives f bedeutet, dafs der Brennpunkt auf der konkaven Seite des Spiegels liegt, so bedeutet ein negatives, dafs der Bildpunkt auf der konvexen Seite, also jetzt hinter dem Spiegel liegt. Sobald also die leuchtenden Punkte zwischen dem Hauptbrennpunkte und dem Spiegel liegen, sind die Bilder, wie bei den ebenen Spiegeln, virtuelle. Die Lage hängt aber auch hier wesentlich von dem Abstande des leuchtenden Punktes vom Spiegel

ab; das virtuelle Bild rückt mit Annäherung des leuchtenden Punktes an den Spiegel aus unendlicher Entfernung bis zum Spiegel, so dafs wenn $a = 0$ wird, auch f gleich 0 wird. In der Spiegelfläche fallen also leuchtender Punkt und Bild zusammen. Wenn man deshalb, wie bei den Versuchen von Foucault, zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit mit einem Hohlspiegel in die Fläche eines zweiten ein reelles Bild wirft, so werden die Strahlen so zurückgeworfen, als wenn das reelle Bild selbst seine Strahlen aussende, wie wir das § 4 erwähnten.

Die Lage der virtuellen Bilder bei Hohlspiegeln läfst sich unmittelbar durch die Sätze über die Konvexspiegel bestimmen; das virtuelle Bild liegt an der Stelle hinter dem Spiegel, wo ein leuchtender Punkt sich befinden müfste, um, wenn die konvexe Seite der Kugel spiegelnd wäre, seinen Bildpunkt dort zu erzeugen. Es ergibt sich das so unmittelbar aus den aufgestellten Gleichungen, dafs es überflüssig ist die Rechnungen hier durchzuführen.

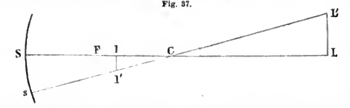
Lassen wir die leuchtenden Punkte virtuell werden, das heifst, senden wir Strahlen auf den Spiegel, die sich erst hinter demselben schneiden, so werden die Bildpunkte wieder reell. In der Gleichung für f wird dann a negativ, also

$$f = \frac{-ar}{-2a - r} = \frac{ar}{2a + r},$$

die Gleichung wird also für ein negatives a identisch mit jener für konvexe Flächen. Die Bildpunkte von virtuellen leuchtenden Punkten liegen also genau an derselben Stelle, wie die Bildpunkte reeller leuchtender Punkte, wenn die konvexe Seite der Fläche spiegelnd ist.

Was hier betreffs der Bildpunkte von leuchtenden Punkten, die auf der Hauptaxe liegen, entwickelt worden ist, läfst sich sofort auch auf leuchtende Punkte übertragen, die aufserhalb der Hauptaxe liegen; jedoch müssen wir auch hier, wie bei Konvexspiegeln, die Sätze auf die zu jenen Punkten gehörigen Nebenaxen beziehen. So ist z. B. Fig. 37 l' der Bild-

Fig. 37.



punkt des Punktes L', und der Abstand $l's$ vom Spiegel aus der Gleichung gegeben

$$l's = \frac{r}{2 - \frac{r}{L's}}.$$

Fällen wir nun eine Senkrechte von L' auf die Hauptaxe, so ist die Lage des Bildpunktes von L, dem Fufspunkte dieser Senkrechten, nämlich l gegeben durch

$$lS = \frac{r}{2 - \frac{r}{LS}}.$$

Durch eine der im vorigen Paragraphen ganz analoge Rechnung gelangt man auch hier leicht zu dem Satze

$$ll' : lC = LL' : LC \ldots \text{(a)}$$

oder die Punkte l und l' liegen in einer zur Axe senkrechten Geraden. Sind alle Punkte der Linie LL' leuchtend, so liegen die Bildpunkte sämtlich auf ll', somit ist ll' das Bild von LL'; dieses Bild ist indes ein umgekehrtes. Denn da der Bildpunkt eines aufser der Hauptaxe liegenden Punktes auf der betreffenden Nebenaxe liegt, und zwar so lange der Bildpunkt ein reeller ist, auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunkts als der leuchtende Punkt, und da alle Axen sich im Mittelpunkte schneiden, so folgt, dafs die leuchtenden Punkte und ihre Bildpunkte auch auf der entgegengesetzten Seite der Hauptaxe liegen, in Abständen, die sich verhalten, wie die Abstände der leuchtenden Punkte von der Axe.

Ist der Bildpunkt dagegen ein virtueller, so liegt er auf seiner Nebenaxe auf derselben Seite des Mittelpunktes, wie der leuchtende Punkt, deshalb auch auf derselben Seite der Hauptaxe. Die virtuellen Bilder sind also wie bei den Konvexspiegeln aufrechte.

Zur Konstruktion der Bilder können wir hier dieselbe Methode anwenden, wie bei den Konvexspiegeln, da auch hier die beiden Sätze bestehen, dafs der Brennpunkt eines Punktes auf der ihm zugehörigen Nebenaxe liegt, und dafs die der Hauptaxe parallelen Strahlen die Hauptaxe nach der Reflexion im Hauptbrennpunkte schneiden.

Ist demnach $LL'L''$ Fig. 38 eine leuchtende Linie, C der Mittelpunkt des Spiegels, so liefert die angegebene Konstruktion das umgekehrte

Fig. 38.

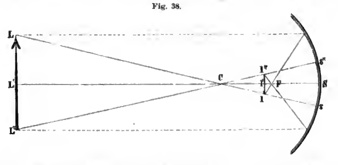


Bild $ll'l'$, welches zwischen dem Mittelpunkte C und dem Hauptbrennpunkte F liegt.

Aus der Lage des Bildes und der oben hingeschriebenen Gleichung (a), nach der sich die Gröfse des Bildes zu der des Gegenstandes verhält wie die respektiven Abstände vom Mittelpunkt, ergibt sich, dafs die Bilder von aufserhalb des Mittelpunkts liegenden leuchtenden Gegenständen verkleinerte sind.

Ist ll'' die leuchtende Linie, so ist LL'' das Bild, wie sich nach dem Frühern unmittelbar ergibt. Das Bild eines zwischen Mittelpunkt und Hauptbrennpunkt liegenden Gegenstandes liegt aufserhalb des Mittelpunktes es ist umgekehrt und vergröfsert.

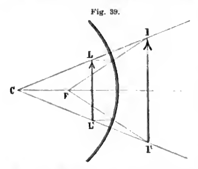
Je näher der leuchtende Gegenstand dem Mittelpunkte rückt, um so näher rückt ihm auch das Bild; rückt der Gegenstand in den Mittelpunkt, so entsteht dort ein demselben an Gröfse gleiches und umgekehrtes Bild.

Liegt der leuchtende Gegenstand seitlich von der Hauptaxe in der Nähe des Mittelpunktes, so erzeugt der Spiegel an der andern Seite der Hauptaxe in der Nähe des Mittelpunktes und nahezu in derselben Entfernung ein reelles Bild. Dadurch ist die in § 4 besprochene Spiegelanordnung bei dem Versuche Foucaults zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit erklärt.

Rückt der Gegenstand in den Brennpunkt, so rückt das Bild ins Unendliche, es verschwindet; rückt der Gegenstand dem Spiegel noch näher, so erscheint wieder ein Bild, aber jetzt ein virtuelles aufrechtstehendes hinter dem Spiegel.

So gibt die leuchtende Linie LL' Fig. 39 das vergröfserte aufrechtstehende Bild ll'. Es wird überflüssig sein, dasselbe näher zu entwickeln, da sich die Beschaffenheit des Bildes aus den bisherigen Betrachtungen zur Genüge ergibt, und da Lage und Gröfse desselben nach der angegebenen Konstruktion und dem eben entwickelten Satze sich unmittelbar ergehen. Gegenstand und Bild verhalten sich genau wie Bild und Gegenstand bei Konvexspiegeln.

Fig. 39.



Man kann leicht die hier abgeleiteten Sätze durch den Versuch bestätigen. Stellt man eine Kerze vor einem Hohlspiegel so auf, dafs ungefähr die Mitte der Flamme auf der Hauptaxe des Spiegels und vom Spiegel weiter entfernt als der Hauptbrennpunkt sich befindet, und bringt man in dem nach der Entfernung der Kerze und dem Radius des Spiegels berechneten Abstand des Bildes einen kleinen Schirm an, so erhält man auf demselben ein umgekehrtes Bild der Flamme, welches nach allen Seiten sichtbar ist, da das auf den Schirm fallende Licht unregelmäfsig zerstreut wird. Will man das Bild direkt ohne Schirm sehen, so mufs man das Auge so stellen, dafs es von den reflektierten Strahlen getroffen wird.

Rückt die Flamme dem Spiegel näher als der Hauptbrennpunkt, so erhält man ein vergröfsertes aufrechtstehendes Bild hinter dem Spiegel.

§ 14.

Sphärische Aberration. Die in den beiden letzten Paragraphen gemachte Voraussetzung, dafs die Spiegel so klein seien, dafs wesentlich die Spitze der Brennlinie allein aufträte, oder dafs wir die Öffnung des Spiegels so klein setzen dürfen, dafs cos β gleich 1 angenommen werden darf, läfst sich in der Praxis nicht erreichen. Der Erfolg davon ist, dafs man als Bild des leuchtenden Punktes nicht genau einen leuchtenden Punkt bekommt, sondern einen sogenannten Brennraum, in welchem sich die einzelnen vom Spiegel herkommenden Strahlenkegel schneiden. So schneiden sich die

vom Spiegel bis etwa zum Punkte J Fig. 40 reflektierten Strahlen im Punkte f der Axe, dessen Lage durch die Gleichung gegeben ist (§ 11)

$$Cf = \frac{br}{2b - r},$$

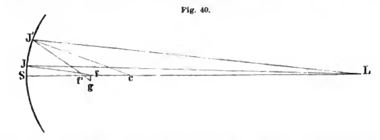
während die anf den Ring J' treffenden Strahlen sich im Punkte f' der Axe schneiden, der hier, wo der Winkel $J'CS = \beta$ noch nicht 20° beträgt, nach der Gleichung

$$Cf' = \frac{br}{2b \cos\beta - r}$$

dem Spiegel schon merklich näher liegt als der Punkt f.

In dem Abstand ff' schneiden sich nun die zwischen J und J' den Spiegel treffenden Strahlen, so dafs dieser ganze Abstand mehr Strahlen

Fig. 40.



erhält als die übrigen Punkte der Axe. Der Abstand ff' derjenigen Punkte der Axe, in welchen sich die reflektierten centralen und Randstrahlen schneiden, nennt man die Länge des Brennraums, oder die Längenabweichung des Spiegels. Diese Länge ist

$$Cf' - Cf = \frac{2bbr\,(1 - \cos\beta)}{4bb\,.\,\cos\beta - 2br\,(1 + \cos\beta) + rr},$$

sie hängt also ab von dem Abstand des leuchtenden Punktes und von β der Öffnung des Spiegels. Sehr leicht ist die Gröfse derselben für parallele Strahlen zu bestimmen. Dort ist $b = \infty$

$$ff' = r\left(\frac{1 - \cos\beta}{2\,.\,\cos\beta}\right),$$

also für $\beta = 20^0$ gleich 0,03 r.

Da die reflektierten Strahlen von ihren Brennpunkten aus sich kegelförmig ausbreiten, so umgeben die Strahlen, welche von dem Rande näher liegenden Kreisen ausgehen, den Brennpunkt f der mittlern Strahlen als leuchtende Kreise, ein im Brennpunkte f senkrecht zur Axe aufgestellter kleiner Schirm wird daher als Bild des leuchtenden Punktes L nicht einen scharf begrenzten leuchtenden Punkt, sondern einen kleinen leuchtenden Kreis zeigen. Den Radius dieses Kreises oder die Gröfse fg, um welche sich der zurückgeworfene Strahl $J'f'g$ im Brennpunkte der mittleren Strahlen von der Axe entfernt, nennt man die Seitenabweichung.

Die Gröfse der Seitenabweichung ergibt sich einfach aus der Gleichung

$$\frac{fg}{ff'} = \text{tang}\; gf'f = \text{tang}\,(i + \beta).$$

Für parallele Strahlen wird der Einfallswinkel der Randstrahlen gleich β, somit

$$\frac{fg}{ff'} = \operatorname{tang} 2\beta.$$

Hauptsächlich die Seitenabweichung ist es, welche bei der Erzeugung der Bilder durch sphärische Spiegel störend wirkt; während nämlich infolge der Längenabweichung nur die Lichtstärke der Bilder etwas geschwächt wird, erzeugt die Seitenabweichung Undeutlichkeit der Bilder. Denn da durch dieselbe das Bild jedes leuchtenden Punktes ein Kreis wird, so fallen die Bilder benachbarter Punkte teilweise über einander und stören so eins das andere.

Man kann die Abweichung infolge der Kugelgestalt des Spiegels zwar sehr klein machen, indem man Spiegel von grofsem Radius oder grofser Brennweite anwendet, ganz zum Verschwinden kann man sie aber nicht bringen. Die Geometrie hat sich daher die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob es nicht eine Fläche gibt, bei der die bei der Kugel stattfindende annähernde Vereinigung der Strahlen in einen Punkt in der That stattfindet.

Die Lösung dieser Aufgabe hat jedoch nur theoretisches Interesse, da die hiernach bestimmte Fläche, es ist eine parabolische, sich nur schwierig in der Praxis darstellen läfst.

Wie bei der Kugel genau im Mittelpunkt liegende Punkte nur einen einzigen Punkt zum Brennpunkt haben, so gibt es noch einige andere Flächen, welche für Punkte in bestimmter Lage ebenfalls bestimmte Brennpunkte haben, es sind Rotationsflächen der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel. Die Ellipse wie die Hyperbel hat zwei im Endlichen liegende Brennpunkte; befindet sich in einem derselben ein leuchtender Punkt, so liegt der Bildpunkt im andern Brennpunkte, da die von den beiden Brennpunkten an irgend einen Punkt der Kurven, oder der aus ihrer Rotation um die grofse Axe entstandenen Flächen, gezogenen Radien Vektoren mit der an denselben Punkt gezogenen Normale gleiche Winkel bilden. Bei der Parabel ist der eine der beiden Brennpunkte unendlich weit von dem Scheitel der Parabel entfernt; deshalb werden die auf die Innenseite eines durch Rotation um die Axe entstandenen Paraboloides parallel mit der Axe auffallenden Strahlen in dem Brennpunkte der Parabel vereinigt, und die auf die Aufsenseite in gleicher Richtung auffallenden Strahlen divergieren nach der Reflexion, als kämen sie aus dem Brennpunkte des Paraboloids.

Für andere krumme Flächen gibt es gar keine Punkte, deren Strahlen nach der Reflexion auch nur annähernd in einem Punkte vereinigt werden. Die auf solche Flächen auffallenden Strahlen zerstreuen sich und zwar nach verschiedenen Gesetzen, je nach der Krümmung der Flächen, oder was dasselbe ist, nach der Richtung der an benachbarten Punkten gezogenen Normalen. Die Schnittpunkte der reflektierten Strahlen ordnen sich dann ebenso wie bei der Kugel in Linien oder Flächen, die Brennlinien oder Brennflächen, welche durch gröfsere Helligkeit von ihrer Umgebung ausgezeichnet sind. Auf die Beschaffenheit dieser krummen Linien und Flächen kann natürlich ohne Hülfe weiterer Rechnungen nicht eingegangen werden; ihre Bestimmung ist Aufgabe der Geometrie, nicht

der Physik, es sind in den meisten Fällen ziemlich verwickelte Linien nnd Flächen [1]).

Nur in einzelnen Fällen ist es ziemlich leicht, diese Flächen zu bestimmen. So z. B. ergibt sich aus den Entwicklungen des § 11 unmittelbar, dafs wenn auf einen Kreiscylinder paralleles Licht fällt, dessen Strahlen zur Cylinderaxe senkrecht sind, dafs dann ein zur Axe senkrechter Durchschnitt eine ebensolche Epicykloide ist, wie wir sie dort als Brennlinie für einen Kugeldurchschnitt bekamen. Daraus folgt, dafs die kaustische Fläche in dem Falle ein gerader epicykloidischer Cylinder ist. Man überzeugt sich leicht davon, wenn man ein offenes cylindrisches Gefäfs, welches mit irgend einer trüben Flüssigkeit, am besten mit Tinte gefüllt ist, in die Sonne stellt, man sieht dann die Epicykloide sehr schön auf der Oberfläche der dunklen Flüssigkeit.

Nimmt man nur ein sehr kleines Stück der Cylinderfläche, so bildet sich auch hier nur die Spitze der Brennlinie, oder die Kante der Brennfläche, daraus ergibt sich als Bild eines leuchtenden Punktes eine der Cylinderaxe parallele Linie. Eine der Axe des Cylinders parallele Linie erhält als Bild ebenfalls eine der Axe parallele Linie, eine zur Axe senkrechte Linie liefert als Bild schon eine Fläche.

§ 15.

Brechung des Lichtes in ebenen Flächen. Kommt das Licht bei seiner Ausbreitung an einem Hindernis an, so tritt, wie wir bereits erwähnten, eine Teilung des Lichtes ein, indem ein Teil des Lichtes zurückgeworfen wird, ein Teil aber in die Körper eindringt. Zunächst nimmt man den letztern Teil zwar nur wahr bei einer bestimmten Gattung von Körpern, bei denen, durch welche das eintretende Licht hindurchgehen kann, bei den durchsichtigen Körpern. Indes läfst sich durch den Versuch zeigen, dafs eine solche Teilnng des Lichtes allgemein bei allen Körpern eintritt, dafs zwischen den durchsichtigen nnd undurchsichtigen Körpern nur ein gradueller Unterschied stattfindet. Wenn man nämlich von einem undurchsichtigen Körper sehr dünne Blättchen darstellt, so werden dieselben durchscheinend oder durchsichtig. So kann man durch ein Blatt dünnen Papiers wenn auch eine Lichtquelle nicht deutlich sehen, so doch ein Mehr oder Minder von Helligkeit wahrnehmen, je nachdem man dasselbe vor eine Lichtquelle oder vor einen dunklern Raum hält, während mehrere auf einander gelegte Blätter einen solchen Unterschied nicht mehr bemerken lassen.

Das Gold ist in gewöhnlichen Fällen ein undurchsichtiger Körper, wenn es aber möglichst fein in dünne Blätter ausgewalzt ist, so wird es durchscheinend, ja selbst durchsichtig, wie Faraday gezeigt hat; ebenso wird

[1]) Eine allgemeinere Behandlung der Reflexion an krummen Flächen und der Brennlinien gibt *Herschel* in seinem On light. I. § IV. und § V. Ferner *Coddington* a treatise on the reflection and refraction of light, being Part. I of a System of Optics. Cambr. 1829. Eine sehr einfache Behandlung der Abweichung bei ausgedehnten Kugelflächen gibt *Reusch* in seiner Abhandlung über Reflexion und Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen unter Voraussetzung endlicher Einfallswinkel. Poggend. Ann. Bd. CXXX.

Silber durchsichtig, wenn es nach dem Liebigschen Verfahren in ganz dünnen Schichten auf Glas niedergeschlagen wird.

Ein anderer Grund für die Annahme, dafs auch bei den undurchsichtigen Körpern ein Teil des Lichtes in dieselben übergeht, ist die Schwächung des reflektierten Lichtes auch an diesen Körpern. Der Unterschied zwischen der Intensität des einfallenden und reflektierten Lichtes kann nur daher rühren, dafs ein Teil des Lichtes in die Körper übergeht.

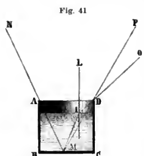
Wir müssen daher schliefsen, dafs in alle Körper Licht, welches an ihrer Oberfläche ankommt, eindringt, und dafs der Unterschied zwischen durchsichtigen und undurchsichtigen Körpern nur darin besteht, dafs in die durchsichtigen das Licht ohne merkliche Schwächung bis zu grofser Tiefe eindringen kann, während es in die undurchsichtigen Körper nur bis zu geringer Tiefe eindringt und bald so sehr geschwächt wird, dafs es nicht mehr wahrzunehmen ist.

Wir betrachten hier zunächst nur den in durchsichtigen Körpern sich fortpflanzenden Teil des Lichtes.

Fällt das Licht schief auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Körper, z. B. Luft und Wasser oder Luft und Glas, so pflanzt es sich in den beiden Körpern nicht in derselben Richtung fort, sondern wird an der Grenzfläche gebrochen; der Weg des Lichtstrahles bildet in dem zweiten Körper mit demjenigen des Lichtes in dem ersten Körper einen Winkel.

Wenn man in ein cylindrisches Gefäfs mit undurchsichtigen Wänden *ABCD* (Fig. 41) auf dem Boden eine Marke macht, so kann man dieselbe nur sehen, wenn sich das Auge in dem von der Marke ausgehenden durch den Umfang *AD* der Wand begrenzten Strahlenkegel befindet. Wenn man daher das Auge bei *O* hält, so dafs eine gerade Linie zum Rande des Gefässes gezogen *OD* den Boden jenseits der Marke trifft, also ganz aufserhalb des Strahlenkegels *PMN* fällt, so ist die Marke *M* dem Auge nicht sichtbar, sie wird von der Wand bedeckt.

Fig. 41



Füllt man aber das Gefäfs mit Wasser, so wird die Marke in der Richtung *OD* sichtbar, sie erscheint in der Vertikalebene *NMP* verschoben. Aus dieser Verschiebung der Marke schliefsen wir, dafs der Lichtstrahl *MO* beim Austritt aus dem Wasser in die Luft gebrochen, von seinem geraden Wege abgelenkt ist, so dafs er in der durch das Einfallslot und den Strahl *MD* gelegten Ebene bleibt, aufserhalb des Wassers aber einen gröfsern Winkel *OJL* mit dem Einfallslote bildet als im Wasser.

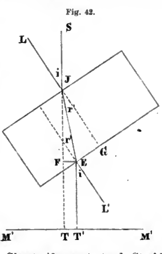
Dafs diese Richtungsänderung des Lichtstrahles nur an der Oberfläche des Wassers eintritt und nicht etwa daher rührt, dafs das Licht im Wasser eine krummlinige Bahn durchläuft, zeigt uns die Thatsache, dafs wir die Marke nicht aus der Stelle gerückt sehen, wenn wir das Auge in das Wasser tauchen.

Da das Licht auf demselben Wege, auf welchem es von einem Punkte zu einem zweiten gelangt, auch wenn der zweite das Licht aussendet, zu dem ersten sich fortpflanzt, so folgt, dafs ebenso das von Luft in Wasser

sich fortpflanzende Licht gebrochen wird, dafs ein in der Richtung OJ an der Wasserfläche ankommender Strahl im Wasser in der Richtung JM weitergeht.

Die Richtigkeit dieses Schlusses läfst sich auch durch einen direkten Versuch beweisen. Wir leiten in ein Zimmer ein horizontales Bündel Sonnenstrahlen und schneiden aus demselben durch einen vertikal gestellten Spalt ein schmales Lichtbündel aus, so dafs es, wenn man dasselbe in T Fig. 42 auf einem horizontal und senkrecht zu dem Strahlenbündel ST gestellten Mafsstabe MM auffängt, auf dem Mafsstabe als eine feine vertikale Lichtlinie erscheint. Man stellt in den Weg des Lichtbündels einen etwa 2 Centim. dicken Glasstreifen von solcher Breite, dafs die untere Hälfte des Lichtbündels durch das Glas geht. Sorgt man dann dafür, dafs die Seitenwände des Glasstreifens, durch welche das Licht in das Glas eintritt und aus demselben austritt, genau vertikal stehen, und dreht den Glasstreifen so, dafs das einfallende Licht mit dem Einfallslot einen Winkel i bildet, so erscheint die untere Hälfte der Lichtlinie auf dem Mafsstabe zur Seite verschoben bei T'. Mifst man den Abstand des verschobenen durch das Glas gegangenen Teiles der Lichtlinie von dem unverschobenen, so findet man diesen Abstand stets gleich, in welcher Entfernung von dem Glasstreifen man auch den Abstand TT' mifst. Daraus folgt, dafs der aus dem Glasstreifen austretende Strahl ET' dem eintretenden Strahle SJ parallel ist, dafs er also mit dem Einfallslote denselben Winkel $L'ET' = i$ bildet wie der eintretende Strahl. Da ferner das Licht im Glase sich in einer geraden Linie von J nach E fortgepflanzt hat, folgt, dafs die Winkel, welche der Strahl im Glase an beiden Flächen mit dem Einfallslote bildet, dieselben sind.

Fig. 42.



Es folgt also, dafs wenn das Licht durch die Grenzfläche zweier Medien geht, es genau so gebrochen wird, wenn es aus dem ersten zum zweiten, als wenn es aus dem zweiten zum ersten übergeht. Ist in dem einen Medium der Winkel, den der Strahl mit dem Einfallslote bildet, derselbe, so ist er es auch im andern, in welcher Richtung sich auch das Licht fortpflanzt.

Der soeben beschriebene Versuch setzt uns in den Stand zu untersuchen, in welcher Abhängigkeit die Fortpflanzungsrichtung des gebrochenen Lichtes von derjenigen des an der Grenze ankommenden Lichtes steht, also das Gesetz der Brechung des Lichtes abzuleiten. Zu dem Zwecke variieren wir die Stellung des Glasstreifens gegen das einfallende Strahlenbündel SJ. Wir nahmen vorhin an, dafs die Seitenwände des Glasstreifens vertikal stehen, das Einfallslot somit horizontal sei, also dafs die Einfallsebene SJL horizontal sei, und bemerkten, dafs durch die Brechung das Lichtbündel einfach horizontal zur Seite geschoben werde. Drehen wir den Glas-

streifen so, dafs die Ebene SJL vertikal steht, so findet man, dafs die Ebene, in welcher das Lichtbündel verschoben wird, ebenfalls die vertikale ist; drehen wir den Glasstreifen so, dafs das Einfallslot und der einfallende Strahl eine irgendwie geneigte Ebene bilden, so wird auch das Lichtbündel in dieser Ebene abgelenkt. Wir erhalten daher als den ersten Satz des Brechungsgesetzes:

„Der gebrochene Strahl liegt ganz in der Einfallsebene, oder die Brechungsebene, die durch den gebrochenen Strahl und das Einfallslot gelegte Ebene, fällt mit der Einfallsebene zusammen."

Um das Verhältnis zwischen dem Einfallswinkel i und dem Brechungswinkel r aufzusuchen, variiert man bei konstant erhaltener Einfallsebene den Einfallswinkel i und mifst die Verschiebung des gebrochenen Strahlenbündels $TT' = EF$. Aus dieser Verschiebung, dem gemessenen Winkel i und der gemessenen Dicke der Platte $JG = d$ läfst sich der Winkel r leicht berechnen. Denn es ist

$$EF = EJ \,.\, \sin EJT = EJ \sin (FJG - EJG) = EJ \sin (i - r)$$

$$EJ = JG \cdot \frac{1}{\cos r} = \frac{d}{\cos r}.$$

Damit wird

$$EF = d\,\frac{\sin (i - r)}{\cos r} = d\,(\sin i - \cos i \tang r)$$

$$\tang r = \tang i - \frac{EF}{d \cos i}.$$

In dieser Weise ausgeführte Messungen ergeben als zweiten Teil des Brechungsgesetzes, dafs zwischen den beiden Winkeln i und r bei zwei gegebenen Substanzen stets die Beziehung besteht, dafs der Quotient aus dem Sinus des Winkels i und des Winkels r eine konstante Gröfse ist. So ergab sich z. B. bei Anwendung eines Glasstreifens von 18^{mm} Dicke, in welchen das Licht aus Luft eintrat, und aus welchem das Licht wieder in die Luft austrat,

für $i =$	40^0	60^0	80^0
$EF =$	$5{,}3^{mm}$	$9{,}6^{mm}$	$15{,}2^{mm}$
$r =$	$24^0\ 24'$	$33^0\ 38'$	$38^0\ 57'$
$\frac{\sin i}{\sin r} =$	1,556	1,563	1,565.

Die Quotienten der letzten Reihe sind so nahe einander gleich, dafs ihre Unterschiede durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler erklärt sind, denn würde man für $i = 40$ die Verschiebung EF nur um $0{,}1^{mm}$ anders, also zu 5,4 beobachtet haben, so würde $r = 24^0\ 7'$ und der Quotient der beiden sinus gleich 1,573, also erheblich gröfser als er aus den beiden andern Beobachtungen gefunden ist.

Diesen für ein und dasselbe Paar von Substanzen, wie hier Luft und Glas konstanten Quotienten, nennt man den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Übergange aus dem ersten in das zweite Medium, oder auch den relativen Brechungsexponenten zwischen den beiden Medien. Obige Zahlen geben also den relativen Brechungsexponenten zwischen Luft und Glas. Der Brechungsexponent zwischen Glas und Luft ist dann

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \nu = \frac{1}{n},$$

da im Zähler des Brechungsexponenten immer der Sinus des Winkels zu setzen ist, welchen das Licht in dem Mittel mit dem Einfallslote bildet, aus welchem es austritt. Der relative Brechungsexponent zwischen Glas und Luft ist also gleich dem reciproken Werte dessen zwischen Luft und Glas.

Die Brechungsgesetze[1] gelten mit einigen später zu betrachtenden Ausnahmen für alle Körper und für alle Flächen, der numerische Wert des Sinusverhältnisses ist jedoch verschieden für verschiedene Substanzen.

Den Brechungsexponenten aus dem leeren Raum in irgend einen durchsichtigen Körper nennt man den absoluten Brechungsexponenten, und diese Zahl wird als der Brechungsexponent der betreffenden Substanz bezeichnet. Man kann das Brechungsverhältnis aus dem leeren Raum in eine Substanz sehr leicht bestimmen, wenn man das des leeren Raumes und der Luft, und das der Luft und der betreffenden Substanz kennt, denn das relative Brechungsverhältnis zwischen zwei Substanzen ist zugleich das reciproke Verhältnis der beiden absoluten Brechungsexponenten. Es folgt das unmittelbar aus der Thatsache, dafs Licht, welches durch zwei Schichten verschiedener Substanz mit parallelen Wänden hindurchgetreten ist, parallel mit dem einfallenden Lichte austritt.

Fig. 43.

Nennen wir nämlich den Einfallswinkel EJL an der ersten Fläche i und den Brechungswinkel r, so ist der Einfallswinkel an der zweiten Fläche $JJ'L'$ ebenfalls r. Bezeichnen wir nun den zweiten Brechungswinkel beim Übertritt des Lichtes aus dem Mittel M' in das Mittel M'' mit r', so ist der Brechungsexponent aus dem Mittel M' in M''

$$n'' = \frac{\sin r}{\sin r'}.$$

Sei nun das Mittel M der leere Raum und der Brechungsexponent aus dem leeren Raume M in M' gleich n, und derjenige aus M in M'' gleich n'. Dann ist

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

und da der Winkel $i' = i$ ist, der Brechungsexponent n'

$$n' = \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin i}{\sin r'}.$$

Daraus folgt dann der angeführte Satz:

$$n'' = \frac{\sin r}{\sin r'} = \frac{n'}{n}.$$

[1]) Das Brechungsgesetz in dieser Form wurde zuerst von *Cartesius* aufgestellt in seiner Dioptrik, Leiden 1637. Schon früher war es in einer unbequemern Form von *Willibrord Snellius* aufgestellt. Man sehe: *Wilde*, Geschichte der Optik, I. Band.

Ist demnach n der absolute Brechungsexponent der Luft und n'' das relative Brechungsverhältnis aus Luft in Wasser, so ist der absolute Brechungsexponent des Wassers n' gleich

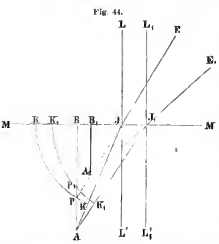
$$n' = n \cdot n''.$$

Der Satz, dafs der absolute Brechungsexponent einer Substanz gleich ist dem Produkte aus demjenigen der Luft und dem relativen zwischen Luft und der betreffenden Substanz, läfst sich nach dieser Ableitung unmittelbar dahin erweitern, dafs das Produkt aus dem relativen Brechungsexponenten zwischen zwei Substanzen I und II und zwischen zwei Substanzen II und III gleich ist dem relativen Brechungsexponenten zwischen den beiden Substanzen I und III. Es ergibt sich weiter, dafs die Brechung des Lichtes gerade so erfolgt, wenn es aus einem Mittel I in ein Mittel II unter dem Einfallswinkel i eintritt, als wenn es zwischen dem Mittel I und II eine ganze Reihe von Mitteln mit parallelen Grenzflächen durchläuft, vorausgesetzt nur, dafs der erste Einfallswinkel, unter dem es an der Grenze des Mittels I auftritt, gleich i ist.

Ist der relative Brechungsexponent zwischen einem Mittel und einem zweiten gröfser wie eins, so nennt man das zweite Mittel optisch dichter, der Unterschied der optischen Dichtigkeit ist um so gröfser, je mehr der Brechungsexponent von eins verschieden ist.

Wir schlossen vorhin, dafs eine Brechung des Lichtes in der Grenzfläche zweier verschiedenen Mittel stattfindet aus dem Umstande, dafs ein unter Wasser befindlicher Punkt an einem andern Orte zu sein scheint, als er wirklich ist. Das Brechungsgesetz gestattet uns den Ort zu bestimmen, wo sich ein solcher Punkt zu befinden scheint, indem wir davon ausgehen, dafs wir einen Punkt immer dort suchen, wo die von ihm ausgehenden und in unser Auge dringenden Strahlen sich passend verlängert schneiden[1]). Ist A ein etwa unter Wasser befindlicher Licht aussendender Punkt, Fig. 44, und sind AJ und AJ_1 zwei sehr nahe neben einander die Grenzfläche treffende Strahlen, welche nach JE und J_1E_1 gebrochen werden und unser Auge treffen, so ist A_1, der Punkt, in welchem sich die Strahlen JE und J_1E_1 schneiden, der scheinbare Ort des Punktes A.

Fig. 44.



Derselbe ist durch Konstruktion leicht zu erhalten. Sei der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Übertritt aus dem untern in das obere Mittel gleich n, so ziehen wir um J mit dem Radius $n \cdot JA$ den Kreisbogen KK, um J_1 mit dem Radius $n \cdot AJ_1$ den Kreisbogen K_1K_1 und lassen dann von A die

[1]) *Bauer* Poggend. Ann. Bd. CLIII.

Senkrechte AB auf MM herab. Die Verbindungslinie des Punktes p, in welchem diese Senkrechte den Kreisbogen KK schneidet, mit J ist die Richtung des gebrochenen Strahles JE, die Verbindungslinie des Punktes p_1, in welchem die Senkrechte den Bogen K_1K_1 schneidet, mit J_1 gibt die Richtung des gebrochenen Strahles J_1E_1. Denn setzen wir den Winkel AJL' gleich i, LJE gleich r, AJ_1L_1 gleich i_1 und $L_1J_1E_1$ gleich r_1, so ist

$$\frac{BJ}{AJ} = \sin i, \; \frac{BJ}{pJ} = \sin r; \; \frac{pJ}{AJ} = \frac{\sin i}{\sin r} = n$$

also, wie es das Brechungsgesetz verlangt, gleich dem Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Übertritt aus dem untern in das obere Mittel. Ebenso ist

$$\frac{p_1J_1}{AJ_1} = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n.$$

Der auf diese Weise gefundene Punkt A_1, in welchem pJ und p_1J_1 sich schneiden, ist somit der scheinbare Ort des Punktes A. Wie man sieht, ist derselbe sowohl in vertikaler als in horizontaler Richtung verschoben. Um die Lage des Punktes zu berechnen sei $BA = h$, $B_1A_1 = h_1$, ferner $BB_1 = a$, $B_1J = b$, $JJ_1 = c$. Dann ist

$$\frac{BJ}{BA} = \frac{a+b}{h} = \operatorname{tang} i; \; \frac{B_1J}{B_1A_1} = \frac{b}{h_1} = \operatorname{tang} r$$

$$\frac{BJ_1}{AB} = \frac{a+b+c}{h} = \operatorname{tang} i_1; \; \frac{B_1J_1}{B_1A_1} = \frac{b+c}{h_1} = \operatorname{tang} r_1.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben

$$a = h \operatorname{tang} i - h_1 \operatorname{tang} r,$$

die beiden letzten

$$a = h \operatorname{tang} i_1 - h_1 \operatorname{tang} r_1,$$

welche beiden Gleichungen sowohl die horizontale Verschiebung a als auch den vertikalen Abstand h_1 des scheinbaren Ortes von der Grenzfläche MM zu bestimmen gestatten. Es wird

$$h_1 = h \frac{\operatorname{tang} i_1 - \operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r_1 - \operatorname{tang} r}.$$

Um den Ausdruck auf der rechten Seite auszuwerten, ist zu beachten, dafs der Winkel i_1 von i und deshalb auch r_1 von r nur sehr wenig verschieden sein darf, wenn die beiden austretenden Strahlen unser Auge treffen sollen, wir setzen demnach $i_1 = i + di$, wodurch

$$\operatorname{tang} i_1 - \operatorname{tang} i = d \operatorname{tang} i = \frac{di}{\cos^2 i}$$

$$\operatorname{tang} r_1 - \operatorname{tang} r = d \operatorname{tang} r = \frac{dr}{\cos^2 r}$$

wird, gemäfs dem in der mathematischen Einleitung entwickelten Ausdrucke $E6$.

Das Differential dr ist die Zunahme des Brechungswinkels, wenn der Einfallswinkel um di wächst. Wir erhalten dieselbe aus dem Brechungsgesetz, nach welchem



$$\sin i = n \sin r,\ \sin(i + di) = n \sin(r + dr)$$

$$\cos i\, di = n \cos r\, dr$$

$$dr = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r} di.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung für h_1, so wird

$$h_1 = h\, n \frac{\cos^2 r}{\cos^3 i}.$$

Ist der Winkel $LJE = r$, unter welchem wir auf die Grenzfläche hinsehen, gegeben, so ist in diesem Ausdrucke noch i durch r auszudrücken, es ist

$$\sin^2 i = n^2 \sin^2 r,\ \cos^2 i = 1 - n^2 \sin^2 r$$

somit

$$h_1 = hn \left\{ \frac{\cos^2 r}{1 - n^2 \sin^2 r} \right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Setzen wir diesen Wert von h_1 in die erste Gleichung für a, so erhält man nach einigen leicht zu übersehenden Umformungen

$$a = hn(1 - n^2) \left(\frac{\sin^2 r}{1 - n^2 \sin^2 r} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Gleichungen zeigen, daſs wenn $n < 1$, das erste Mittel also dichter ist als das zweite, etwa wenn wir unter Wasser liegende Punkte betrachten, der angesehene Punkt stets der Grenzfläche genähert erscheint. Für Wasser ist $n = 0{,}75$. Sehen wir senkrecht auf die Fläche, so ist $h_1 = 0{,}75\, h$, dagegen $a = 0$, in dem Falle findet also nur eine Hebung statt. Die Hebung wird um so gröſser, je gröſser der Winkel ist, unter welchem wir auf das Wasser sehen. Wird der Winkel $r = 90^0$, sehen wir parallel der Wasserfläche, so wird $h_1 = 0$, der Punkt scheint in der Grenzfläche zu liegen.

Der Wert von a ist, wenn $n < 1$, stets positiv, der angesehene Punkt wird also scheinbar immer dem Auge genähert.

Betrachtet man einen ausgedehnten unter Wasser liegenden Gegenstand, so sind die Verschiebungen der verschiedenen Punkte verschieden, der Gegenstand muſs uns deshalb immer etwas verzerrt erscheinen.

Ganz ähnliche Ausdrücke erhält man auch für die Verschiebung, welche der scheinbare Ort eines Punktes erfährt, wenn man ihn durch eine von zwei parallelen ebenen Flächen begrenzte durchsichtige Platte betrachtet. Ist h der Abstand des Punktes von der dem Beobachter zugewandten Grenzebene der Platte, h_1 der Abstand des scheinbaren Ortes des Punktes von der Grenzebene, i der Einfallswinkel, unter dem das Licht die Platte trifft und deshalb auch verläſst, r der Brechungswinkel im Innern der Platte, und

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

der Brechungsexponent zwischen Luft und Platte, ist ferner d die Dicke der Platte, so wird

$$h - h_1 = d\left(1 - \frac{\cos^2 i}{n \cos^3 r}\right)$$

und die der Platte parallele Verschiebung

$$a = (h - h_1) \operatorname{tang} i - d (\operatorname{tang} i - \operatorname{tang} r).$$

Bei senkrechter Incidenz des Lichtes wird $a = 0$ und

$$h - h_1 = d \frac{n-1}{n},$$

es tritt also nur eine Annäherung an die Platte ein. Die Verschiebungen hängen nur ab von der Dicke der Platte und den Werten von i und n, sie sind der Dicke der Platte direkt proportional. Bei dünnen Platten, wie etwa unseren Fensterscheiben, sind sie unmerklich.

§ 16.

Brechung des Lichtes durch Prismen. Wenn das Licht durch ein Mittel mit parallelen Grenzflächen hindurchdringt, wird es nicht aus seiner Richtung abgelenkt, wenn es schliefslich wieder in dasselbe Mittel eintritt, in welchem es sich zuerst bewegte, indem der Brechungsexponent aus dem zweiten in das erste der reciproke Wert des Brechungsexponenten aus dem ersten Mittel in das zweite und deshalb der Winkel, unter dem das Licht austritt, gleich ist dem, unter welchem das Licht auf die erste Fläche auftraf.

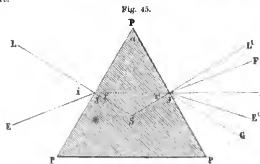
Wird aber das Mittel von zwei gegen einander geneigten ebenen Flächen begrenzt, so mufs eine Ablenkung eintreten. Denn, wenn die brechenden Flächen, durch welche das Licht in das Mittel eintrat und aus dem Mittel austritt, gegen einander geneigt sind, so sind es auch die Einfallslote. Der Lichtstrahl, der unter dem Winkel i auf der Fläche auftrifft und dort unter dem Winkel r gebrochen wird, bildet dann mit dem Einfallslote an der zweiten Fläche im Innern des Mittels einen andern Winkel r', der Winkel, den der austretende Strahl mit dem Einfallslote bildet, ist dann ein Winkel i', der von dem Winkel i verschieden ist, so dafs der austretende Strahl in einer andern Richtung fortschreitet, als der einfallende.

Die Erfahrung bestätigt diese Schlüsse, denn wenn wir durch ein Prisma hindurchsehen, so erscheinen die angesehenen Gegenstände von ihrer Stelle verschoben und zwar entweder nach der brechenden Kante, der Kante, in welcher die beiden Flächen, durch welche wir hindurchsehen, sich schneiden, hin oder von ihr fort, je nach der Natur des Mittels, aus welchem das Prisma besteht. Die Verschiebung der Gegenstände ist ferner verschieden je nach dem Einfallswinkel des Lichtes und nach der Gröfse des Winkels, welchen die beiden Prismenseiten mit einander einschliefsen, dem brechenden Winkel des Prismas.

Kennt man den Winkel, unter welchem das Licht auf die erste Prismenfläche auftrifft, sowie das relative Brechungsverhältnis aus Luft in die Substanz des Prismas und den brechenden Winkel, so kann man leicht die Ablenkung, welche das Licht erfährt, berechnen; oder kennt man durch Beobachtung die letztere, so kann man mit Hülfe des brechenden Winkels und Einfallswinkels das Brechungsverhältnis zwischen Luft und der Prismensubstanz erhalten. Es ist die Beobachtung der Ablenkung durch ein Prisma sogar das genaueste Mittel zur Bestimmung der Brechungsexponenten.

Sei, um die Ablenkung allgemein zu bestimmen, *PPP* ein zur brechenden Kante senkrechter Durchschnitt durch das Prisma und zugleich die Einfallsebene eines das Prisma bei J treffenden Lichtstrahles EJ (Fig. 45). Der brechende Winkel des Prismas sei α und wir wollen die Ablenkung δ ausdrücken durch den Einfallswinkel $EJL = i$, den brechenden Winkel α und den relativen Brechungsexponenten n zwischen der Prismensubstanz und der Luft.

Fig. 45.



Der Weg des Lichtes sei $EJJ'E'$. Ziehen wir durch J' die Linie $J'F$ parallel mit EJ, so ist der Winkel

$$E'J'F = \delta.$$

Nun ist, wenn wir ferner durch J' die Linie $J'G$ parallel dem Einfallslote LJ der ersten Fläche legen und die Richtung des gebrochenen Lichtstrahles JJ' über J' hinaus in $J'H$ verlängern, der Winkel $E'J'F$ gleich

$$E'J'F = GJ'F - GJ'H + E'J'H.$$

Ferner aber ist

$$E'J'H = E'J'L' - HJ'L'$$

und demnach

$$E'J'F = \delta = GJ'F - GJ'H + E'J'L' - HJ'L'.$$

Da nun

$$J'F \parallel EJ, \; J'G \parallel LJ,$$

so ist

$$GJ'F = i,$$

und da $J'H$ die Verlängerung von JJ', so ist

$$HJ'G = SJJ' = r,$$

dem Brechungswinkel an der ersten Fläche. Der Winkel $E'J'L'$ ist der Winkel, welchen der austretende Lichtstrahl an der zweiten Fläche mit dem Einfallslote bildet, wir bezeichnen ihn mit i', und der Winkel $HJ'L'$ schliesslich ist gleich dem Winkel $JJ'S = r'$, dem Winkel, unter welchem der Strahl im Prisma die zweite Fläche trifft. Für die Ablenkung δ erhalten wir demnach

$$\delta = i - r + i' - r'$$

$$\delta = i + i' - (r + r').$$

Nun ist weiter

$$JSJ' + r + r' = 180^0$$
$$JSJ' + \alpha = 180^0$$

und daraus

$$r + r' = \alpha.$$

Die Summe der beiden Winkel, welche der gebrochene Lichtstrahl im Innern des Prismas mit den beiden Einfallsloten bildet, ist gleich dem brechenden Winkel des Prismas.

Dadurch wird

$$\delta = i + i' - \alpha.$$

Die Ablenkung des Strahles ist gleich der Summe der beiden Winkel, welche der Lichtstrahl vor dem Eintritt in das Prisma und nach dem Austritt aus demselben mit den Einfallsloten bildet weniger dem brechenden Winkel des Prismas.

Dieselbe Beziehung zwischen der Ablenkung, dem Einfalls- und Austrittswinkel sowie den beiden Brechungswinkeln besteht auch, wenn der einfallende Strahl in dem Quadranten LJP liegt, nur müssen wir den Winkel i und r, die dann an der andern Seite des Einfallslotes liegen, mit dem negativen Vorzeichen versehen. Man sieht das auch unmittelbar, wenn man wie in Fig. 46 den Gang des Strahles konstruiert, $EJJ'E'$, und nun durch J'

$$J'G \parallel JL \text{ und } J'F \parallel EJ$$

legt. Der Winkel $E'J'F$ ist dann gleich δ, und wir haben

$$\delta = E'J'L' - FJ'G - GJ'L'.$$

Fig. 46.

Von den drei Winkeln auf der rechten Seite ist der erste i', der zweite i und der dritte, den die beiden Einfallslote mit einander bilden, gleich dem brechenden Winkel α. Somit erhalten wir

$$\delta = i' - i - \alpha.$$

Die Beziehung zwischen α und den beiden Brechungswinkeln erkennen wir unmittelbar, wenn wir LJ über J hinaus verlängern, bis es $J'L'$ in C schneidet. Es ist dann, da $J'CJ = \alpha$,

$$r' = \alpha + r; \ \alpha = r' - r.$$

Um i' durch i und den Brechungsexponenten n der Substanz des Prismas auszudrücken, haben wir

$$\sin i' = n \, . \sin r' = n \, . \sin (\alpha - r)$$

oder

$$\sin i' = n \, . (\sin \alpha \, . \cos r - \cos \alpha \, . \sin r)$$



und ferner

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}$$

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

woraus

$$\sin i' = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \sin i.$$

Mit Hülfe dieses durch i, n und α gegebenen Wertes für i' können wir für jeden Einfallswinkel die Ablenkung δ berechnen. Man sieht, bei gegebenem brechenden Winkel α des Prismas hängt dieselbe ab von dem Brechungsexponenten n und dem Einfallswinkel i. Sind daher drei von den Gröfsen α, i, δ, n durch die Beobachtung gegeben, so ist die vierte zu berechnen.

Man wendet daher die Beobachtung der Ablenkung durch ein Prisma von bekanntem brechenden Winkel an, um das Brechungsverhältnis der Prismensubstanz zu erhalten. Vorzugsweise geeignet dazu sind zwei bestimmte Richtungen, in welchen man den Strahl hindurchgehen läfst, da man dann einer direkten Messung des Einfallswinkels überhoben ist; entweder läfst man den Lichtstrahl so durch das Prisma hindurchgehen, dafs der Einfallswinkel i gleich ist dem Winkel i', unter welchem der Lichtstrahl das Prisma verläfst, oder man läfst den Strahl die zweite Fläche unter dem Winkel $i' = 0$, in der Richtung des Einfallslotes verlassen.

Ersteres erkennt man daraus, dafs der austretende Lichtstrahl in dem Falle das Minimum der Ablenkung erfährt, dafs der Winkel δ dann den kleinsten bei dem Prisma möglichen Wert erhält.

Dafs dem in der That so ist, läfst sich auf folgende von Fr. Eisenlohr[1]) angegebene Weise ableiten. Wie wir sahen, ist allgemein

$$\delta = i + i' - \alpha,$$

der Wert von δ wird deshalb dann ein Minimum werden, wenn die Summe $i + i'$ ihren kleinsten Wert hat, da α eine konstante Gröfse ist. Diese Summe hat aber dann ihren kleinsten Wert, wenn $\sin (i + i')$ seinen kleinsten Wert hat. Nach dem Brechungsgesetz haben wir

$$\sin i = n \,.\, \sin r,\ \sin i' = n \,.\, \sin r'$$
$$\sin i + \sin i' = n (\sin r + \sin r')$$
$$\sin i - \sin i' = n (\sin r - \sin r').$$

Die beiden letzten Gleichungen können wir nach bekannten trigonometrischen Formeln schreiben

$$\sin \tfrac{1}{2} (i + i') \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (i - i') = n \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (r + r') \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (r - r') \ldots (1)$$
$$\cos \tfrac{1}{2} (i + i') \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (i - i') = n \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (r + r') \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (r - r') \ldots (2).$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir

$$\tan \tfrac{1}{2} (i + i') \,.\, \cot \tfrac{1}{2} (i - i') = \tan \tfrac{1}{2} (r + r') \,.\, \cot \tfrac{1}{2} (r - r'),$$

[1]) *Fr. Eisenlohr*, Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch. Bd. XII. p. 434.

oder auch indem wir die beiden cot auf die andere Seite bringen

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(i + i') \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(r - r') = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(r + r') \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(i - i') \ldots (3).$$

Da nun i und i' die Einfallswinkel sind, zu denen r und r' als Brechungswinkel gehören, so ist immer

$$i + i' > r + r',$$

somit auch

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(i + i') > \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(r + r'),$$

aus Gleichung (3) folgt deshalb auch, dafs wenn $i - i'$ oder $r - r'$ von Null verschieden ist

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(i - i') > \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(r - r')$$

und damit

$$i - i' > r - r'$$

sein mufs. Aus Gleichung (1) folgt aber, da, so lange die letzte Ungleichung besteht,

$$\cos \tfrac{1}{2}(i - i') < \cos \tfrac{1}{2}(r - r'),$$

dafs im allgemeinen

$$\sin \tfrac{1}{2}(i + i') > n \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(r + r')$$

sein mufs. Der kleinste Wert, den $\sin \frac{1}{2}(i + i')$ annehmen kann, ist derjenige, welcher dem Werte

$$\cos \tfrac{1}{2}(i - i') = \cos \tfrac{1}{2}(r - r') = 1$$

entspricht, denn dann ist

$$\sin \tfrac{1}{2}(i + i') = n \cdot \sin \tfrac{1}{2}(r + r').$$

Dieses Minimum tritt also ein, wenn $i = i'$ und damit $r = r'$ ist, somit tritt der kleinste Wert, den $i + i'$ annehmen kann, und damit die kleinste Ablenkung δ dann ein, wenn der Strahl so durch das Prisma hindurchgeht, dafs der Eintrittswinkel gleich ist dem Austrittswinkel.

In dem Falle ist somit

$$\delta = 2i - \alpha$$

$$i = \frac{\delta + \alpha}{2},$$

oder der Einfallswinkel ist gleich der halben Summe des brechenden Winkels und der Ablenkung. In dem Falle ist gleichzeitig

$$r = r'$$

und da

$$r + r' = \alpha,$$

so folgt

$$r = \frac{\alpha}{2}.$$

Für den Brechungsexponenten n erhalten wir

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Die Beobachtung der Ablenkung und des brechenden Winkels des Prismas liefert uns also sofort den Brechungsexponenten. Dasselbe ist der Fall, wenn wir das Prisma so aufstellen, dafs von den durch das Prisma durchtretenden Strahlen nur diejenigen beobachtet werden, welche senkrecht zu der letzten Fläche austreten, wenn wir also etwa ein Prisma so vor ein Rohr stellen, dafs die Axe senkrecht zur letzten Prismenfläche steht, und dann durch das Rohr und Prisma nach einer Lichtquelle sehen und die Ablenkung messen. In dem Falle ist $i' = 0$, deshalb

$$\delta = i - \alpha$$

und

$$i = \alpha + \delta.$$

Ist nun $i' = 0$, so ist auch $r' = 0$ und demzufolge

$$r = \alpha;$$

zur Bestimmung des Brechungsexponenten haben wir demnach

$$n = \frac{\sin(\delta + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Kennt man den Brechungsexponenten und den brechenden Winkel des Prismas, so kann man sofort die Werte von i bestimmen, damit die beiden besprochenen Fälle eintreten. Damit wir das Minimum der Ablenkung erhalten, mufs

$$\sin i = n \,.\, \sin \frac{\alpha}{2},$$

damit die Strahlen senkrecht aus der zweiten Prismenfläche austreten,

$$\sin i = n \,.\, \sin \alpha$$

sein. Letztere Gleichung läfst erkennen, dafs ein solcher Durchgang des Lichtes bei einigermafsen grofsem Brechungsexponenten nur möglich ist, wenn der brechende Winkel hinreichend klein ist, es mufs, da sin i stets kleiner als 1 sein mufs,

$$\sin \alpha < \frac{1}{n}.$$

Mifst man aufser der Ablenkung auch den Einfallswinkel, so liefert uns die Gleichung (3)

$$\operatorname{tang} \frac{i + i'}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{r - r'}{2} = \operatorname{tang} \frac{r + r'}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{i + i'}{2}$$

ein Mittel, um für beliebige Incidenz i den Brechungswinkel r und somit den Brechungsexponenten n zu berechnen. Die einzelnen Winkelsummen und Differenzen in jener Gleichung können wir nämlich schreiben

$$i + i' = \delta + \alpha \qquad i - i' = 2i - (\delta + \alpha)$$
$$r - r' = 2r - \alpha \qquad r + r' = \alpha$$

und indem wir diese Ausdrücke einsetzen, wird

$$\operatorname{tang} \frac{\delta + \alpha}{2} \cdot \operatorname{tang} \left(r - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tang} \left(i - \frac{\delta + \alpha}{2}\right)$$

oder

$$\operatorname{tang} \left(r - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tang} \left(i - \frac{\delta + \alpha}{2}\right) \cdot \cot \frac{\delta + \alpha}{2}.$$

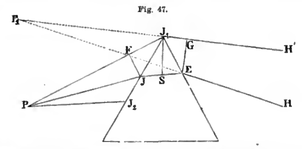
Daraus berechnet man r und aus diesem und dem bekannten i dann n.

Da indes diese Methode ziemlich ausgedehnte Rechnungen verlangt, und wie wir später sehen werden, nicht genauer ist, als die Minimummethode, so wird man im allgemeinen bei Ausführung von Bestimmungen letztere vorziehen.

§ 17.

Abbildung von Punkten und Linien durch ein Prisma. Im vorigen Paragraphen haben wir nur den Gang eines Strahles durch das Prisma verfolgt, setzen wir jetzt voraus, es treffe in der Einfallsebene des vorhin betrachteten Strahles ein sehr schmales aus dem Punkte P kommendes Strahlenbündel PJJ_1 auf das Prisma, von dem der Strahl PJ_1 so nahe der brechenden Kante durch das Prisma trete, dafs wir den Punkt J_1 Fig. 47 als einen Punkt der brechenden Kante ansehen können. Bezeichnen wir

Fig. 47.



den Einfallswinkel des Strahles PJ mit i, den Austrittswinkel mit i', so erhalten wir für die Ablenkung des austretenden Strahles EH

$$\delta = i + i' - \alpha.$$

Bezeichnen wir die entsprechenden Winkel des Strahles PJ_1 mit $i + di$ und $i' + di'$, so wird der Wert von di' aus der Gleichung des vorigen Paragraphen

$$\sin i' = n \,.\, \sin(\alpha - r)$$

erhalten, indem wir haben

$$\sin(i' + di') = n \,.\, \sin(\alpha - [r + dr]),$$

worin dr die dem Werte di entsprechende Änderung des Brechungswinkels bedeutet. Entwickeln wir diese Sinus, so wird, wenn wir di und dr so klein voraussetzen, dafs wir für ihre Cosinus 1 und für die Sinus die Bögen setzen können,

$$\cos i' di' = -n \,.\, \cos(\alpha - r)\, dr.$$

Aus der Gleichung

$$\sin i = n \,.\, \sin r$$

folgt dann

$$\cos i di = n \cos r dr$$

$$dr = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos r} \cdot di,$$

und indem wir diesen Wert in die Gleichung für di' einsetzen und für $\alpha - r$ das ihm gleiche r' schreiben

$$di' = -\frac{\cos r' \,.\, \cos i}{\cos i' \,.\, \cos r} \cdot di.$$

Aus diesem Werte von di' folgt, daſs wenn der Einfallswinkel des zweiten Strahles gröſser ist als der des zuerst betrachteten, di also positiv ist, der Austrittswinkel $i' + di'$ kleiner ist als i', ist dagegen der Eintrittswinkel des zweiten Strahles kleiner, würde er in der Richtung PJ_2 das Prisma treffen, somit di negativ sein, so ist $i' + di'$ gröſser als i'. Daraus folgt, daſs sich jedenfalls die beiden Strahlen PJ und PJ_1 rückwärts verlängert in einem Punkte P_1 schneiden. Den Abstand $P_1E = f$ dieses Punktes von der zweiten Prismenfläche können wir auf folgende Weise erhalten. Ziehen wir $JF \perp PJ_1$, $EG \perp J_1H'$, $J_1S \perp JE$, so wird

$$\frac{EG}{EP_1} = \sin EP_1G = \sin(-di') = -di'$$

$$\frac{JF}{JP} = \sin JPF = \sin di = di,$$

somit, wenn wir $JP = a$ setzen,

$$\frac{EP_1}{JP} = \frac{f}{a} = -\frac{EG}{JF} \cdot \frac{di}{di'} = \frac{EG}{JF} \cdot \frac{\cos i' \cdot \cos r}{\cos r' \cdot \cos i}.$$

Nun ist ferner

$$EG = J_1E \cdot \sin EJ_1G = J_1S \cdot \frac{\sin EJ_1G}{\sin J_1ES}$$

$$JF = JJ_1 \cdot \sin JJ_1F = J_1S \cdot \frac{\sin JJ_1F}{\sin J_1JS},$$

somit

$$f = a \cdot \frac{\cos i' \cos r}{\cos r' \cos i} \cdot \frac{\sin EJ_1G \cdot \sin J_1JS}{\sin J_1ES \cdot \sin JJ_1F}.$$

Von den 4 letzten Winkeln ist nun

$$EJ_1G = 90 - (i' - di'),\ \sin EJ_1G = \cos(i' - di')$$
$$JJ_1F = 90 - (i + di),\ \sin JJ_1F = \cos(i + di)$$
$$J_1JS = 90 - r,\ \sin J_1JS = \cos r$$
$$J_1ES = 90 - r',\ \sin J_1ES = \cos r'$$

demnach

$$f = a \cdot \frac{\cos^2 r \cdot \cos i' \cdot \cos(i' - di')}{\cos^2 r' \cdot \cos i \cdot \cos(i + di)}.$$

Bei dem vorausgesetzten kleinen Werte von di und di' begehen wir nur einen verschwindend kleinen Fehler, wenn wir den Quotienten

$$\frac{\cos(i' - di')}{\cos(i + di)} = \frac{\cos i' + \sin i'\, di'}{\cos i - \sin i\, di} = \frac{\cos i'}{\cos i}$$

setzen, denn der Quotient wird dadurch, daſs wir im Zähler und Nenner die sehr kleinen Glieder fortlassen, nur unendlich wenig geändert. Dann aber erhalten wir

$$f = a \cdot \frac{\cos^2 r \cdot \cos^2 i'}{\cos^2 r' \cdot \cos^2 i}.$$

Für ein derartiges unendlich schmales Strahlenbündel folgt somit, dafs alle in derselben Einfallsebene das Prisma treffenden Strahlen nach allen Brechungen das Prisma so verlassen, als kämen sie von einem Punkte her, der an derselben Seite des Prismas liegt als der wirklich leuchtende Punkt, und dessen Abstand von der zweiten Prismenfläche abhängt von der Entfernung des leuchtenden Punktes von der ersten Prismenfläche und von dem Winkel i, unter welchem die mittlern Strahlen das Prisma treffen.

Haben wir anstatt eines leuchtenden Punktes P eine leuchtende der brechenden Kante des Prismas parallele Linie, von der jeder Punkt nur in seiner Einfallsebene ein schmales Strahlenbündel auf das Prisma sendet, so wird für jeden Punkt der Linie die vorige Ableitung gelten, es wird also eine solche leuchtende Linie durch ein Prisma betrachtet von ihrer Stelle verschoben erscheinen, oder die Strahlen treten aus dem Prisma hervor, als kämen sie von einer Linie, deren Projektion auf eine zur brechenden Kante senkrechte Ebene P_1 ist, wenn die Projektion der leuchtenden Linie P Fig. 47 ist.

Eine solche leuchtende Linie können wir mit grofser Annäherung herstellen, wenn wir ein Bündel Sonnenstrahlen durch einen engen der brechenden Kante des Prismas parallelen Spalt gehen lassen, dessen Länge derjenigen der brechenden Kante ungefähr gleich ist.

Sehr viel verwickelter werden die Erscheinungen, wenn die von einem Punkte der Linie ausgehenden Strahlen nicht nur in derselben zur brechenden Kante senkrechten Ebene liegen; auch dann entwirft das Prisma ein virtuelles Bild der Linie, dieselbe ist aber gekrümmt, wenn die leuchtende Linie gerade ist und zwar so, dafs sie der brechenden Kante ihre konkave Seite zuwendet.

Da man den von uns betrachteten einfachen Fall vollständig nicht realisieren kann, so erscheinen im allgemeinen die Bilder von Linien stets gekrümmt. Es würde indes zu weit führen, diesen allgemeinern Fall näher zu untersuchen[1]).

Abgesehen von der Krümmung der Linien können wir aber auch dann die obigen Gleichungen für die Entfernung der Bilder anwenden. Dieselben zeigen, dafs im allgemeinen der Abstand f von dem Abstande a verschieden ist, dafs in einem Falle sogar, wenn der Einfallswinkel $i = 90^0$ ist, die Strahlen also das Prisma mit streifender Incidenz treffen, f für jedes a gleich unendlich wird, also ein paralleles Strahlenbündel das Prisma verläfst. Ist a selbst unendlich, so ist nach der Gleichung auch f unendlich, ein das Prisma treffendes paralleles Strahlenbündel verläfst dasselbe ebenfalls als paralleles Bündel.

Nur für einen Einfallswinkel ist bei endlichem a der Abstand $f = a$, nämlich, wenn i der Einfallswinkel für das Minimum der Ablenkung ist. Denn dann ist $i = i'$, $r = r'$, der Quotient, mit welchem a in der Gleichung multipliciert ist, wird also gleich 1.

Anwendungen dieser Sätze werden wir demnächst kennen lernen.

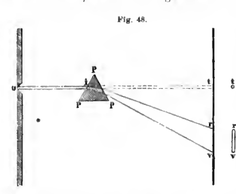
---

[1]) Man sehe darüber: *Reusch*, Poggend. Annal. Bd. CXVII. p. 241. *Dittscheiner*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie. LI. p. 368.

§ 18.

Zerstreuung des Lichtes. Lassen wir nun auf ein Prisma durch eine enge Öffnung ein Bündel paralleler Lichtstrahlen auffallen, so zeigt sich das austretende Licht ganz anders, als wir es nach dem Bisherigen erwarten sollten. Bringen wir in dem Fensterladen eines sonst dunkeln Zimmers eine kleine Öffnung an, und lassen mit Hülfe eines Heliostaten ein Bündel Sonnenstrahlen in das Zimmer horizontal einfallen, so zeigt sich auf einem dem Fenster senkrecht zu den eintretenden Strahlen gegenüber gestellten Schirme ein kleines rundes Sonnenbildchen. Bringt man dann nahe bei der Öffnung in den Weg der Lichtstrahlen ein Prisma, dessen brechende Kante horizontal ist, so an, daſs der eintretende Lichtstrahl das Minimum der Ablenkung erfährt, so sollte nach unsern bisherigen Betrachtungen auf dem Schirme wiederum ein kleines Bildchen der Sonne entstehen, nur an einer andern Stelle, und zwar, wenn wir ein Prisma anwenden, dessen Brechungsexponent gröſser ist als eins, und die brechende Kante nach oben gerichtet ist, nach unten gegen das einfallende Licht verschoben. Das Bild dürfte, da sämtliche Strahlen des einfallenden Lichtes nahezu unter dem gleichen Winkel auf das Prisma auffallen, also der Winkel i für alle fast denselben Wert hat, nur eine geringe Abweichung von der Kreisgestalt zeigen, es müſste ein einfach abgelenktes Bildchen der Sonne sein. Statt dessen sehen wir aber auf dem Schirme einen beleuchteten Streifen, als ein in der Einfallsebene sehr in die Länge gezogenes Bild der Sonne, welches um so länger wird, je weiter der Schirm von dem Prisma entfernt ist. Dieses Bild rv (Fig. 48) hat zugleich eine ganz andere Beschaffenheit als das Bildchen t, welches bei ungestörter Fortpflanzung des einfallenden Lichtbündels auf dem Schirme entsteht. Letzteres ist ein weiſser runder Fleck; das in der Einfallsebene in die Länge gezogene Bild rv erscheint dagegen in den verschiedensten Farben, die, vorausgesetzt daſs die Öffnung o nur klein ist, in allmählichen Abstufungen in einander übergehen. An dem obern Ende des Streifens zunächst der Stelle t, wo das nicht abgelenkte Bild der Sonne entstanden wäre, ist der Streifen tief rot gefärbt, die rote Färbung wird gegen die Mitte des Bildes zu allmählich heller und geht in Orange über, weiter verliert sich der rote Ton des Orange immer mehr und die Färbung wird rein gelb. Auf die gelbe Färbung folgt grün und hierauf anfangs noch mit grün gemischt, allmählich immer reiner werdend, ein helles Blau. Dieses wird immer dunkler und schlieſslich ein tiefes Indigo. Noch etwas weiter tritt zum Blau wieder ein roter Ton, so daſs das Ende v dieses Streifens violett gefärbt ist. (Man sehe Tafel I.)

Fig. 48.



Diesen Farbenstreifen nennt man das Spektrum. Unsere Sprache unterscheidet in demselben nur diese sieben Farben, rot, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett, indes unterscheidet das Auge zugleich alle Übergänge und die verschiedensten Töne dieser Färbungen, für welche die Sprache keine besondern Namen hat.

Dieser Versuch zeigt uns somit, daſs das auffallende Bündel paralleler Strahlen weiſsen Lichtes das Prisma nicht wieder als ein Bündel paralleler Strahlen verläſst, sondern daſs die austretenden Strahlen über einen gröſsern Raum zerstreut und durch diese Zerstreuung zugleich gefärbt werden. Es sind nun zwei Möglichkeiten vorhanden, welche diese eigentümliche Erscheinung hervorrufen können, entweder ist sie Folge einer specifischen Einwirkung des Prismas auf das Licht, oder sie wird dadurch hervorgebracht, daſs diese einzelnen Strahlen, welche im Spektrum in der Einfallsebene neben einander gelegt sind, im einfallenden Lichte schon vorhanden sind, daſs sie aber verschieden brechbar sind, und daſs sie deshalb nach dem Austritte aus dem Prisma verschieden stark abgelenkt werden. Diese Möglichkeit ergibt sich unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen, denn wir sahen, die Ablenkung eines Lichtstrahles hängt bei gegebenem Einfallswinkel und bei einem Prisma von gegebenem brechenden Winkel nur ab von dem Brechungsexponenten n. Da nun das Spektrum nur in der Einfallsebene in die Länge gezogen ist, seine Breite aber genau derjenigen des einfallenden Strahlenbündels gleich ist, so ist es möglich, daſs eine verschiedene Brechbarkeit der im Sonnenlichte zugleich vorhandenen Strahlen diese Erscheinung hervorruft. Dann würde aus dieser Erscheinung zu folgern sein, einmal, daſs Licht verschiedener Farbe bei ein und derselben Substanz eine verschiedene Brechbarkeit besitzt und weiter, daſs in dem scheinbar einfachen weiſsen Sonnenlicht Licht der verschiedensten Brechbarkeit, der verschiedensten Farbe enthalten ist.

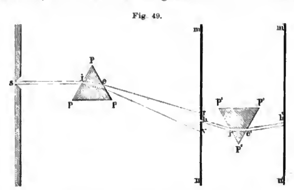
Schon Newton, der die Farbenerscheinungen bei Brechung des Lichtes durch ein Prisma gewissermaſsen zum ersten Mal beobachtete, gibt in seiner Optik[1]) die entscheidendsten Beweise für die Richtigkeit der letztern Annahme, er wies nach, daſs es nicht eine specifische Einwirkung des Prismas auf das Licht ist, welches die Farben erzeugt, sondern daſs in der That Licht verschiedener Farbe einen verschiedenen Grad der Brechbarkeit besitzt, und daſs das Spektrum Folge ist der verschiedenen Ablenkung des im Sonnenlichte enthaltenen farbigen Lichtes.

Daſs das Prisma nicht durch eine besondere Einwirkung auf das Licht die Farben erzeugt, beweist zunächst der Umstand, daſs es auf die Natur und Folge der Farben, welche uns das Spektrum darbietet, durchaus ohne Einfluſs ist, aus welcher Substanz das Prisma besteht, vorausgesetzt, daſs dieselbe durchsichtig und farblos ist. Zwar ändert sich das Spektrum mit dem Prisma, jedoch nur darin, daſs dasselbe länger oder kürzer ist, und daſs die Länge der einzelnen Farben etwas verschieden sein kann. Die auftretenden Farben und ihre Folge sind aber bei allen Prismen dieselben. Wenn nun die Farben durch das Prisma erst erzeugt würden, so wäre diese Unveränderlichkeit des Spektrums schwer zu erklären.

[1]) *Newton*, Optice liber I. pars I. Ausgabe von Samuel Clark. Lausannae et Genevae 1740.

Dafs Licht verschiedener Farbe verschieden brechbar ist, hat Newton[1]) durch folgenden Versuch auf das überzeugendste dargethan. Das durch eine schmale Spalte in das dunkele Zimmer eindringende Bündel paralleler Lichtstrahlen traf auf ein Prisma *PPP* (Fig. 49) In dem Schirme *mn*, welcher das durch das Prisma hervorgerufene Spektrum auffing, befand sich eine kleine runde Öffnung. Durch diese Öffnung trat dann in der Richtung *bi'* ein Lichtstrahl von der Farbe, welche gerade an der Stelle der Öffnung sich befand. Sah man durch die Öffnung in der Richtung des austretenden Lichtstrahles, so erblickte man ein glänzendes Bild der Sonne von der

Fig. 49.



Farbe des Lichtes. Läfst man den Lichtstrahl, welcher durch die Öffnung *b* hindurchtritt, auf ein anderes Prisma *P'P'P'* fallen, so wird er in demselben gebrochen und in der Richtung *bi'e'b'* abgelenkt. Er wird aber nicht weiter in ein Farbenband, in ein Spektrum *rv* verwandelt, sondern erscheint als einfacher Fleck von der Farbe des auf das Prisma *P'P'P'* auftreffenden Lichtstrahles.

Es folgt daraus, dafs in einem Prisma nur das weifse Licht in ein solches Spektrum zerlegt wird, nicht aber das einfarbige, und dafs das im Spektrum neben einander gelegte Licht bei nochmaliger Brechung in einem Prisma nicht weiter zerstreut werden kann.

Wenn man aber durch Drehung des Prismas *PPP* um eine der brechenden Kante parallele Axe den Einfallswinkel des Lichtes ändert, so wird dadurch auch die Ablenkung eine andere, und dadurch werden an der Öffnung *b* des Schirmes *mn* allmählich die verschiedenen Farben des Spektrums vorüber geführt. Läfst man das Prisma *P'P'P'* an seiner Stelle, so fallen dadurch auch nach und nach Strahlen aller Farben in der Richtung *bi'*, also unter demselben Einfallswinkel auf das Prisma *P'P'P'*. Bemerkt man auf dem zweiten Schirme *m'n'* die Stelle, wo z. B. der rote Fleck erscheint, wenn gerade der rote Strahl in der Richtung *bi'* auf das Prisma fällt, so sieht man, wenn, wie es in der Zeichnung angenommen, die brechende Kante des zweiten Prismas nach unten gerichtet ist, dafs die violetten Strahlen viel stärker abgelenkt werden als die roten, dafs der violette Fleck viel höher liegt als die Stelle, an welcher vorher der rote Fleck erschien. Die

[1]) A. a. O. experim. 6. p. 30.

übrigen Farben fallen zwischen beide, zunächst dem Rot orange, darüber gelb und so fort, und der tiefblaue mit Indigofarbe gefärbte Fleck unmittelbar unter dem violetten.

Dieser von Newton als Experimentum crucis bezeichnete Versuch beweist auf das entschiedenste, daſs die verschieden gefärbten Lichtstrahlen eine verschiedene Brechbarkeit besitzen.

Wenn das Spektrum Folge einer Einwirkung des Prismas auf das Sonnenlicht wäre und nicht durch die verschiedene Brechbarkeit des im Sonnenlicht enthaltenen farbigen Lichtes entstände, müſste das Spektrum, wenn es auf ein Prisma mit vertikaler brechender Kante fallen gelassen wird, durch dasselbe ebenso sehr in die Breite gezogen werden, als das Sonnenbildchen durch das erste Prisma in die Länge gezogen war. Der Versuch[1]) zeigt aber, daſs die Breite des Spektrums nicht merklich geändert wird, sondern daſs es nur verschoben und gegen das erste Spektrum geneigt wird.

Ist RV (Fig. 50) das Spektrum, wie es durch das Prisma mit horizontaler brechender Kante hervorgerufen wird, so wird es in das Spektrum $R'V'$ verwandelt, wenn man die aus dem ersten Prisma austretenden Strahlen mit gleichem Einfallswinkel auf ein Prisma mit vertikaler brechender Kante fallen läſst, dessen brechender Winkel dem des ersten Prismas an Gröſse gleich ist. Die Breite des Farbenbildes ist ungeändert geblieben, nur ist jede Farbe seitlich verschoben, das Rot am wenigsten, das Violett am meisten und zwar, wie man sieht, wenn man das Spektrum durch das Prisma mit vertikaler brechender Kante hervorruft, um so viel mehr seitlich verschoben als das Rot, als die Länge des horizontalen Spektrums betragen würde. Das zweite Prisma bringt also gar keine Veränderung in den Farben hervor, die stärkere Ablenkung des Violetten beträgt aber gerade so viel, wie die Differenz der Ablenkungen zwischen rot und violett im ersten Spektrum.

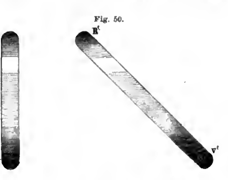


Fig. 50.

Der Versuch zeigt die stärkere Brechbarkeit des violetten Lichtes, die verschiedene Brechbarkeit des verschieden gefärbten Lichtes ebenso deutlich als das erwähnte Experimentum crucis.

Ohne die mannigfachen andern Versuche zu betrachten, welche Newton zur Vervielfältigung dieses Beweises anstellte[2]), werden wir Newtons Schluſs beipflichten, daſs bei jedem besondern Lichtstrahle, sobald derselbe an der Grenzfläche zweier Mittel gebrochen wird, der Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels in einem konstanten Verhältnisse steht, so lange die beiden Mittel und der einfallende Strahl dieselben sind, daſs aber das

[1]) A. a. O. lib. I. pars I. exper. 5. p. 23.
[2]) Man sehe *Wilde*, Geschichte der Optik. II. Bd.

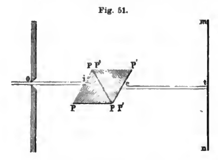
Verhältnis sich nicht nur mit den Mitteln, sondern auch mit der Farbe der einfallenden Strahlen ändert. Oder es gibt so viele Arten oder Verschiedenheiten von Licht, als sich in dem Spektrum, welches aus einem einfallenden weifsen Strahle sich bildet, verschieden gefärbte Strahlen finden. Die verschiedene Brechbarkeit ist somit ein Kennzeichen der verschiedenen Qualität des Lichtes, und die Zerstreuung des Lichtes rührt daher, dafs in dem weifsen Lichte die verschiedenen Lichtarten ebenso enthalten sind, wie in einem Accorde die verschiedenen Töne.

§ 19.

Zusammensetzung des weifsen Lichtes aus farbigem. Um den Beweis vollständig zu führen, dafs es nur die verschiedene Brechbarkeit der verschiedenen im weifsen Lichte enthaltenen Lichtarten ist, welche das Spektrum erzeugt, genügt es nicht, gezeigt zu haben, dafs das farbige, aus dem weifsen entstandene Licht verschieden brechbar ist, da dann immer noch der Einwurf möglich ist, dafs diese verschiedene Brechbarkeit erst Folge des Durchganges durch das Prisma sei, und dafs daher die Entstehnng des Spektrums dennoch einer besondern Einwirkung des Prismas zugeschrieben werden müsse. Wir müssen weiter noch nachweisen, dafs die aus dem Prisma hervorgehenden Farben wieder zu weifs zusammengesetzt werden können. Auch hierfür hat bereits Newton[1]) die überzeugendsten Beweise geliefert, er hat gezeigt, dafs die Znsammenwirkung aller Farben den Eindruck des Weifsen macht, dafs aber die Mischung nur eines Teiles der Farben eine andere als die weifse Farbe erzeugt. Die Versuche lassen sich auf die verschiedenste Art anstellen.

Wenn man zwei aus derselben Substanz mit gleichem brechenden Winkel hergestellte Prismen so znsammenstellt (Fig. 51), dafs ihre brechenden Kanten entgegengesetzt, die eine oben, die andere unten, aber beide horizontal liegen, so tritt aus der letzten Fläche des zweiten Prismas ein auf die Vorderfläche des ersten fallendes Bündel paralleler weifser Lichtstrahlen nicht als ein divergierendes Büschel verschiedenfarbiger Lichtstrahlen, sondern als ein parallelesBündel weifserLichtstrahlen. Es zeigt sich auf dem Schirme mn bei t nicht ein Spektrum sondern ein weifses Bild der Öffnung o.

Fig. 51.



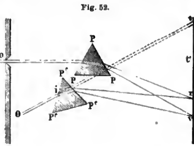
Da jedes Prisma ein Spektrum erzeugt, so traten aus dem ersten offenbar die farbigen Strahlen getrennt hervor, so dafs der violette Strahl am meisten, der rothe am wenigsten nach unten abgelenkt war. In dem zweiten Prisma wird jeder Strahl wieder ebenso stark nach oben abgelenkt, wie er in dem ersten nach unten hin abgelenkt war; alle Strahlen treten

[1]) *Newton*, Optice. Man sehe *Wilde*, Geschichte der Optik. Bd. II. Berlin 1843.

also nach et und zwar parallel mit oi aus dem zweiten Prisma hervor. Da nun in t ein ungefärbtes Bild der Öffnung entsteht, so zeigt der Versuch, dafs durch das Zusammenwirken aller Farben wiederum Weifs entsteht. Bringt man in den Weg der Strahlen et noch ein drittes Prisma, so erzeugt dieses gerade so ein Spektrum, wie es das einzelne Prisma PPP oder $P'P'P'$ gethan haben würde.

Statt dieser Anordnung der beiden Prismen kann man auch folgende anwenden. Ruft man in der vorhin beschriebenen Weise durch ein Prisma PPP ein Spektrum hervor (Fig. 52) und betrachtet dasselbe durch ein zweites Prisma $P'P'P'$, welches so gestellt ist, dafs ein vom Auge O ausgehendes Strahlenbündel Oi an derselben Stelle rv des Schirmes ein Spektrum erzeugen würde, so sieht man nicht mehr das Spektrum rv, sondern bei t in der Richtung Oi ein einfach weifs gefärbtes Bild der Sonne, wie es ohne Prisma bei t' sich gezeigt hätte.

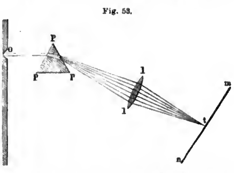
Fig. 52.



Da ein vom Auge O ausgehender Strahl so gebrochen würde, dafs er aus dem Prisma austretend bei rv ein Spektrum von derselben Gröfse rv erzeugen würde, so folgt nach dem schon mehrfach erwähnten Gesetze der Reciprocität, dafs die von dem Spektrum rv aus auf das Prisma $P'P'P'$ treffenden Strahlen alle so abgelenkt werden, dafs sie in der Richtung iO austreten. Da nun das Auge dann in der Richtung Oi nicht mehr ein Farbenbild, sondern ein weifses Bild der Öffnung O sieht, so müssen wir aus diesem Versuche schliefsen, dafs durch das Zusammenwirken aller Farben im Auge der Eindruck des Weifsen entsteht.

Die Vereinigung aller Strahlen zu weifs kann noch durch einen andern Versuch gezeigt werden, der auf der demnächst zu betrachtenden Eigenschaft der Linsen beruht, alle auf sie fallenden parallelen Strahlen gleicher Brechbarkeit in einen Punkt zu vereinigen. Läfst man durch eine kleine kreisförmige Öffnung Sonnenlicht auf ein Prisma PPP (Fig. 53) fallen, und fängt man das aus dem Prisma austretende zerstreute Licht auf einer achromatischen Linse ll auf, so erhält man in einem gewissen Abstande von der Linse auf einem Schirme einen kleinen weifsen Kreis. Die auf eine solche Linse auffallenden Strahlen werden alle in einem Punkte vereinigt; hält man nun den Schirm an die Stelle des Vereinigungspunktes, so erhält man auf demselben ein weifses Bild der Sonne. Rückt man der Linse näher, so liegen die Strahlen noch zum Teile neben einander, man erhält ein Spektrum, als wenn die Linse nicht da wäre, nur etwas verwaschen, und entfernt man

Fig. 53.

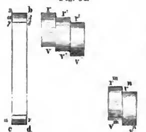


den Schirm weiter, so erhält man ein umgekehrtes Spektrum, ein Beweis, dafs sämtliche Strahlen bei t sich kreuzten.

Noch auf eine andere Art können wir die Entstehung des Weifsen aus dem Zusammenwirken der prismatischen Farben nachweisen, welche auf der schon früher erwähnten Thatsache beruht, dafs jeder Lichteindruck in unserm Auge eine gewisse Dauer hat, dafs wenn ein leuchtender Punkt ungefähr 11 Mal in der Sekunde an einer Stelle sich befindet, er uns immer dort zu sein scheint; eine Thatsache, die uns durch den einfachen Versuch bewiesen wird, dafs eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle uns als feuriger Kreis erscheint. Wenn demnach in sehr kurzer Zeit nach einander an einer und derselben Stelle alle Farben auftreten, so werden sich beim Anblicke dieser Stelle in unserem Auge die Eindrücke derselben summieren, und dieselbe mufs uns weifs erscheinen.

Um dieses mit reinen prismatischen Farben nachzuweisen, verbindet man nach dem Vorgange von Münchow das Prisma mit einem Uhrwerke, welches demselben eine rasche hin und her drehende Bewegung um eine der brechenden Kante parallele Axe erteilt. Dadurch ändert sich der Winkel, unter welchem die einfallenden Strahlen das Prisma treffen und mit diesem die Ablenkung derselben. Das Spektrum erhält dadurch eine rasche hin und her gehende Bewegung, wodurch auf einem Streifen des auffangenden Schirmes in sehr rascher Folge an allen Stellen alle prismatische Farben auftreten. Der Erfolg ist der, dafs man anstatt des Spektrums in den verschiedenen Lagen einen blendend weifsen Streifen sieht, dessen Enden dort, wo das Spektrum sich in seiner Bewegung umkehrt, geringe gefärbt ist; dort, wo nur das rote Ende des Spektrums hinkommt, rot, an dem entgegengesetzten Ende, wo nur das violette auftritt, violett.

Die Erscheinung ist dieselbe und aus denselben Gründen, welche ein langer, rein weifser Streifen darbietet, wenn man ihn durch ein Prisma ansieht, dessen brechende Kante der kurzen Seite des Streifens parallel ist, mit dem Unterschiede, dafs das, was bei jenem Versuche durch die Bewegung des Prismas in rascher Folge an derselben Stelle auftritt, hier in der That neben einander vorhanden ist und sich deckt. Sei $abcd$ jener Streifen und die brechende Kante des Prismas mit der kürzern Seite ab des Streifens parallel, so wird jeder schmale Streifen $ab\alpha\beta$ Fig. 54 ein Spektrum rv bilden, indem die einzelnen farbigen Bilder des Streifens neben einander fallen. Der zweite Streifen $\alpha\beta\gamma\delta$ bildet ebenfalls ein Spektrum $r'v'$, welches in der Zeichnung neben das erste gelegt ist, in der That aber das erste zum Teil deckt, so dafs oben der Streifen $r'r$ des ersten, unten der violette Streifen vv' des zweiten Spektrums ungefähr von der Breite $ab\alpha\beta$ hervorragt. Ein dritter Streifen gleicher Breite bildet ein ebenso verschobenes Spektrum und so fort. Gleiches gilt von der untern Seite cd. Jede der brechenden Kante parallele Linie des Streifens $abcd$ bildet auf diese Weise ihr Spektrum, deren jedes nachfolgende gegen das vorhergehende nahezu um die Breite der Linie verschoben ist. Diese Spektra fallen in der ganzen Länge des Streifens über einander, sie decken sich in


Fig. 54.

der erwähnten Weise, so dafs an allen Stellen des Streifens aufser am Rande *ab* und *cd* zugleich alle Farben auftreten. Der Streifen erscheint daher weifs mit farbigen Rändern. Das Ende *ab* ist rot und geht durch gelb in weifs, der Rand *cd* ist violett und geht durch blau in weifs über.

Man kann auch mit farbigen Pigmenten durch einen dem vorigen ähnlichen Versuch die Entstehung des Weifs aus den prismatischen Farben nachweisen, nur erhält man da nicht reines Weifs, weil man keine Pigmente hat, deren Farben genau denen des Spektrums entsprechen. Teilt man eine kreisförmige Scheibe in sieben Sektoren und bestreicht dieselben mit farbigen Pigmenten, welche sich den Farben des Spektrums möglichst annähern, und zwar wie Newton angibt, in der Reihenfolge rot, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett, so dafs die Sektoren

Rot Grün Violett	je 60° 45′	Gelb Blau	je 54° 41′	Orange Indigo	je 34° 11′

umfassen, so erscheint die Scheibe bei rascher Rotation um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe gleichförmig weifs, und die Färbung ist um so reiner, je näher die Farben der Pigmente mit denen des Spektrums übereinstimmen. Rein weifs kann die Scheibe niemals erscheinen, da es einmal nicht möglich ist, genau die einzelnen Farben und die zahlreichen im Spektrum vorhandenen Nüancen auf der Scheibe zu vereinigen, und da man andererseits den einzelnen Farben nicht genau die Intensität und Ausdehnung geben kann, mit der sie im Spektrum vertreten sind.

Dafs die Vereinigung aller Farben, welche uns das Spektrum darbietet, notwendig ist, um das reine Weifs zu erzeugen, kann dadurch gezeigt werden, dafs man bei dem erwähnten Versuche mit der Linse einen Teil des Spektrum aufhält, ehe es auf die Linse fällt.

Wird z. B. das Rot aufgehalten, indem man einen undurchsichtigen Körper von der roten Seite her in die aus dem Prisma austretenden Strahlen schiebt, so wird die Färbung der von der Linse vereinigten Strahlen eine blafsgrüne, nimmt man das Rot ganz fort, und indem man den dunkeln Körper stetig voran schiebt, allmählich auch orange und gelb, so sieht man die blafsgrüne Färbung in hellgrün, blaugrün, blau und endlich violett übergehen. Nimmt man dagegen von der andern Seite her das Violett fort, so erhält man eine gelbliche Färbung, welche entschieden gelb wird, wenn auch das Blau fortgenommen wird, und nach Fortnahme des grünen Lichtes in Rot übergeht. Hält man die mittleren grünen Strahlen auf, so ergeben die übrig bleibenden verschiedene Arten von Rot. So kann nach und nach durch Unterdrückung einzelner Farben jede Farbe erzeugt werden, und es gibt in der Natur keinen Farbenton, den man nicht auf diese Weise auf das schönste nachahmen könnte.

Durch Unterdrückung bestimmter Farben erhält das übrig bleibende Sammelbild eine gewisse Färbung. Die zurückgehaltenen Strahlen geben ebenso in ihrer Gesamtheit einen gewissen Farbenton. Diese beiden Farben zusammen genommen enthalten aber alle Farben des Spektrums, sie geben daher Weifs. Jede dieser beiden Färbungen komplettiert also die andere zu dem Gesamteindruck aller Farben, zu Weifs. Man nennt daher die beiden Farben komplementäre Farben. Nach Fortnahme der roten Strahlen zeigten



die übrig bleibenden eine grünliche Färbung. Die verschiedenen Töne des Grünen werden demnach durch die verschiedenen roten Töne zu Weifs ergänzt, Grün und Rot sind demnach Komplementärfarben. Durch Fortnahme des Blauen erhielten wir gelbe Färbungen; Blau und Gelb sind darnach komplementäre Farben. Jede Mischfarbe können wir uns auf diese Weise durch Fortnahme einer andern Mischfarbe entstanden denken, jede hat somit ihre komplementäre Farbe.

Nach allen diesen Erfahrungen sind wir demnach zu dem Schlusse berechtigt, dafs das weifse Licht kein einfaches sondern ein aus den verschiedenen farbigen Lichtern zusammengesetztes ist. Die unserm Auge durch die Farbe unterschiedenen Lichtarten unterscheiden sich physikalisch durch ihre verschiedene Brechbarkeit. Die Strahlen gleicher Brechbarkeit haben gleiche Farbe, wir nennen sie daher im Gegensatze zu dem zusammengesetzten weifsen oder durch eine Mischung gefärbten Licht homogen. Die Farben des Spektrums sind homogen, sie enthalten nur eine Lichtqualität, die Mischfarben sind zusammengesetzter, das zusammengesetzteste Licht ist das weifse.

Das physikalische Merkmal des verschiedenen Lichtes ist die verschiedene Brechbarkeit. Wir werden daher verschiedene Lichtarten nach dieser beurteilen, selbst wenn das Auge einen Unterschied in der Färbung nicht mehr wahrnehmen sollte, und nur solches Licht als homogen einfarbiges betrachten, welches gleiche Brechbarkeit besitzt, also keine Zerstreuung mehr erfährt.

§ 20.

Anomale Dispersion. Im § 18 bei Beschreibung des Spektrums erwähnten wir, dafs in demselben die Verteilung und Reihenfolge der Farben stets dieselbe sei, jedoch nur, wenn das zur Erzeugung des Spektrums verwandte Prisma durchsichtig und farblos sei. Ist das letztere nicht der Fall, so kann die Reihenfolge und Verteilung der Farben im Spektrum eine ganz andere werden. Es ist das der Fall, wenn man Prismen aus solchen Substanzen verwendet, welche schon in dünnen Schichten gewisse Farben des Spektrums in sich festhalten, das Licht dieser Farben also absorbieren.

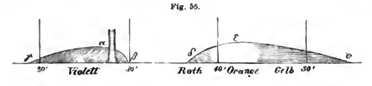
Derartige Substanzen sind vorzugsweise Lösungen verschiedener Anilinfarben. Bringt man die Lösungen solcher Farben, z. B. Cyanin oder Fuchsin in Gefäfse, welche von ebenen und parallelen Glasplatten begrenzt sind, und läfst weifses Licht, etwa Sonnenlicht durch die Flüssigkeitsschicht hindurchgehen, so ist das austretende Licht nicht mehr weifs, sondern gefärbt; es zeigt die Mischfarbe, welche sich aus dem nicht absorbierten Lichte zusammensetzt. Wenn man das aus der farbigen Lösung austretende Licht durch ein farbloses Prisma, etwa ein Glasprisma hindurchgehen läfst, und so von demselben ein Spektrum entwirft, so erkennt man, welche Farben in der Lösung zurückgehalten werden, indem die Stellen des von weifsem Lichte entworfenen Spektrums, welche den von der Lösung absorbierten Farben entsprechen, dunkel sind; das Spektrum erscheint durch dunkle Absorptionsstreifen in mehrere von einander getrennte Teile zerlegt. Auf die Untersuchung der Absorptionserscheinungen gehen wir an dieser Stelle nicht ein, wir betrachten sie im nächsten Kapitel in Verbindung mit

denjenigen Erscheinungen, welche durch das absorbierte Licht bewirkt werden. Hier sei nur bemerkt, dafs die Lösungen der Anilinfarben diese Absorption schon in sehr dünnen Schichten zeigen. Diese stark absorbierenden Medien sind es vorzugsweise, welche die eigentümliche, als anomale Dispersion bezeichnete Farbenfolge zeigen.

Die erste Beobachtung einer solchen Dispersion, abgesehen von einer Beobachtung von Le Roux[1]), der bei mit Joddampf gefüllten Prismen bereits eine solche fand, die indes wenig beachtet wurde, rührt von Christiansen[2]) her, der durch später zu besprechende Erscheinungen auf dieselbe geführt wurde; er fand, dafs das Spektrum des Lichtes, welches durch ein mit Lösung von Fuchsin in Alkohol gefülltes Prisma hindurchgegangen war, eine ganz andere Farbenfolge zeigte als das gewöhnliche Spektrum. Da eine einigermafsen konzentrierte Fuchsinlösung das Licht sehr stark absorbiert, so konnte dieselbe nur in sehr dünnen prismatischen Schichten untersucht werden. Es wurden deshalb zwei planparallele Glasplatten in einer Messingfassung unter einem sehr kleinen Winkel gegen einander gestellt, und zwischen die Platten einige Tropfen der Lösung gebracht, welche durch die Adhäsion am Glase festgehalten wurden. Da die beiden Glasplatten von ebenen und parallelen Flächen begrenzt sind, so bringen dieselben keine Ablenkung des Lichtes, somit auch keine Zerstreuung der Farben hervor, sondern es wirkt nur die von gegen einander geneigten Flächen begrenzte Schicht der Flüssigkeit als Prisma.

Das durch ein solches Prisma entworfene Spektrum ist Fig. 55 dargestellt, der brechende Winkel desselben war $1^{0}\,14'\,10''$; auf der Horizontalen

Fig. 55.



sind als Abscissen die Ablenkungen der verschiedenen Farben in Bogenminuten ausgedrückt aufgetragen, die Ordinaten der Kurven stellen die Intensitätsverhältnisse der verschiedenen Farben dar. Bei α ist das schmale Spektrum angedeutet, wie es mit normaler Farbenverteilung reiner Alkohol, wenn er zwischen die Glasplatten des Prismas gebracht ist, liefert. Die grofse Ausdehnung des durch die Lösung entworfenen Spektrums zeigt, wie stark diese die Farben zerstreut, wie grofs also der Unterschied der Brechbarkeit der verschiedenen Farben in dieser Lösung ist.

Das Spektrum war durch einen breiten dunklen Streif in der Mitte von β bis δ in zwei Teile geteilt, es fehlte sämtliches Grün in demselben, das Grün war somit in der Lösung vollständig zurückgehalten.

Weniger stark abgelenkt als der Absorptionsstreif war blau und violett, am wenigsten das Blau, welches also an der Stelle auftritt, wo sich im normalen Spektrum das Rot befindet; dann folgte violett. Stärker ab-

[1]) *Le Roux.* Comptes Rendus T. LV. p. 126. Poggend. Ann. Bd. CXVII.
[2]) *Christiansen.* Poggend. Ann. Bd. CXLI und Bd. CXLIII.

gelenkt als das Absorptionsband war rot, orange, gelb, welche dann aber in derselben Reihe, wie im normalen Spektrum auf einander folgten, das Gelb nahm die Stelle ein, welche im normalen Spektrum das Violett hat.

Die Beobachtungen von Christiansen wurden später bestätigt und erweitert von Soret[1]) und ganz besonders von Kundt[2]). Soret gibt ein Verfahren an, welches die anomale Dispersion selbst wenig konzentrierter Lösungen zu beobachten gestattet, welche leicht durch die Dispersion des Lösungsmittels verdeckt wird. Man füllt die auf ihre anomale Dispersion zu untersuchende Lösung in ein gewöhnliches Hohlprisma von etwa 30° brechendem Winkel und stellt dieses in einen Glastrog mit planparallelen Wänden, welcher mit dem Lösungsmittel der die anomale Dispersion bedingenden Substanz gefüllt ist. Da das Lösungsmittel auf diese Art von parallelen Wänden begrenzt ist, so bewirkt dasselbe keine Ablenkung des Lichtes, somit auch keine Dispersion, das Licht wird nur abgelenkt und dispergiert durch die in dem Prisma verteilte gelöste Substanz.

Auf diese Art zeigte Soret z. B., dafs durch eine wenig konzentrierte Lösung von Fuchsin, welche, wenn das Prisma in der Luft benutzt wurde, ein ganz normales Spektrum lieferte, dann, wenn man das Prisma in den mit Alkohol gefüllten Glastrog stellt, das Violette kaum abgelenkt wurde, das Rote 6′, das Orangegelb 16′. Mithin haben die Fuchsinlösungen für das Violette nahe denselben Brechungsexponenten wie der Alkohol, entsprechend den zuletzt angegebenen Beobachtungen von Christiansen, für Rot und Orange ist der Brechungsexponent beträchtlich grösser. Für Anilinviolett in Wasser gelöst ergab sich, als der Glastrog mit Wasser gefüllt wurde, die Ablenkung des blauen Streifens zu 1′, die des roten zu 4′; bei einer Lösung von übermangansaurem Kali die Ablenkung des Violetten zu 6′, des Roten gleich 9′ und des Gelben gleich 12′.

Noch bequemer als das Verfahren von Soret ist die Anwendung eines parallelepipedischen aus planparallelen Platten hergestellten Glaskästchens, welches durch eine diagonale Glasplatte in zwei Prismen geteilt wird. Man füllt dann in das eine der beiden so entstandenen Prismen die Lösung, in das andere das Lösungsmittel. Auch auf diese Weise ist eine Ablenkung und Dispersion durch das Lösungsmittel ganz vollständig ausgeschlossen.

Kundt war der erste, der den Zusammenhang zwischen der anomalen Dispersion und der Absorption erkannte, indem er vermutete, dafs alle Lösungen, welche schon in dünnen Schichten starke Absorptionsbänder zeigen, auch eine anomale Dispersion bewirken müfsten.

Die Vermutung fand Kundt schon bei seinen ersten Versuchen bestätigt, bei denen er die Dispersion ganz in der Weise wie Christiansen untersuchte. Er fand bei Anilinblau, Anilinviolett, Anilingrün, Indigo in rauchender Salpetersäure gelöst, Indigcarmin, Carthamin, Murexid in Kalilauge gelöst, Cyanin, übermangansaurem Kali und Carmin die Farben geradeso im Spektrum verteilt, wie es Christiansen bei der Fuchsinlösung gefunden hatte. Es war stets das Grün, wo es überhaupt nicht ganz vollkommen absorbiert war, am wenigsten abgelenkt, dann folgte Blau und dann Rot. Bei Cyanin liegt das Absorptionsband im Gelb, die Reihenfolge der

[1]) *Soret.* Archives des sciences physiques et naturelles. März 1871. Poggend. Ann. Bd. CXLIII.

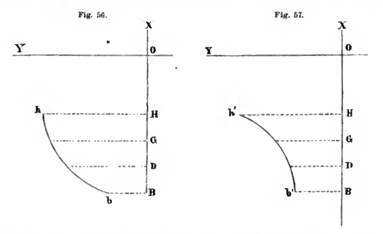
[2]) *Kundt.* Poggend. Ann. Bd. CXLII, Bd. CXLIII, Bd. CXLIV, Bd. CXLV.



Farben im Spektrum war von dem am wenigsten abgelenkten angefangen, Grün, Hellblau, Dunkelblau, eine dunkle Stelle ohne Licht, dann Rot und Orange.

Bei seinen weitern Versuchen wandte Kundt die Methode der gekreuzten Spektra an, welche ihn nicht nur bei noch andern Körpern die anomale Dispersion erkennen, sondern auch ohne Messung schon das allgemeine Gesetz dieser Dispersion auffinden liefs.

Um die Methode der gekreuzten Spektra anzuwenden, erzeugt man zuerst ein Spektrum durch ein Prisma mit horizontaler brechender Kante oder durch ein im nächsten Abschnitte zu besprechendes Beugungsgitter mit horizontal gestellten Spalten. Man erhält dann ein Spektrum, dessen Farben vertikal unter einander liegen. Wendet man ein Beugungsgitter an, so ist das violette am wenigsten abgelenkt, das rote am meisten, und die Ablenkung ist, nach der Undulationstheorie, der Wellenlänge oder der Schwingungsdauer des Lichtes proportional. Schaltet man in den Gang der Lichtstrahlen ein Prisma mit vertikaler brechender Kante, so erhält man ein, wie bei gekreuzten Prismen, schräges Spektrum. Ist O Fig. 56 und Fig. 57 eine punktförmige Lichtquelle, etwa ein dünner Cylinder von Sonnenstrahlen, welche man horizontal in ein Zimmer treten läfst und dann,



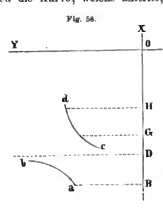
nachdem er durch ein Beugungsgitter mit horizontalen Spalten hindurchgegangen ist, auf einem Schirme auffängt, so erhält man unterhalb desselben ein lineares Spektrum HB, in welchem das Rote unten, das Violette oben ist. Schaltet man dann zwischen Gitter und Schirm, oder wenn man die Erscheinung subjektiv betrachtet, zwischen Gitter und Beobachtungsfernrohr oder Auge ein gewöhnliches farblos durchsichtiges Prisma mit vertikaler brechender Kante ein, so wird jede Farbe ihrer Brechbarkeit gemäfs abgelenkt, und man erhält eine Kurve bh oder $b'h'$ oder auch eine schräg liegende gerade Linie oder eine Kurve mit einem Wendepunkte, je nach der Substanz des angewendeten Prismas, deren parallel OY gemessene Abstände von BH uns sofort einen Überblick über die Brechbarkeit des Lichtes in dem Prisma liefert. Die Form der Kurve läfst sofort erkennen,



wie die Ablenkung mit Annäherung an das Rot oder nach der Undulationstheorie mit steigender Schwingungsdauer abnimmt; die Kurve Fig. 56 zeigt, daſs die Ablenkung stärker, Fig. 57, daſs sie langsamer abnimmt, als die Schwingungsdauer wächst, eine schräg liegende gerade Linie würde zeigen, daſs die Ablenkung der Schwingungsdauer umgekehrt, oder der Schwingungsanzahl direkt proportional ist.

Wendet man nun als Prisma eine anomal dispergierende Substanz an, so wird die Gestalt der Kurve eine ganz andere; da bei diesen die Ablenkung nicht stetig mit der Farbenfolge von Rot nach Violett, also mit der Schwingungsanzahl wächst, muſs die Kurve aus mehreren Stücken bestehen, welche gegen einander verschoben sind. Fig. 58 zeigt in ab und cd die Kurve, welche auftritt, wenn man das lineare Beugungsspektrum durch ein mit konzentrierter Cyaninlösung gefülltes Hohlprisma betrachtet. Die Kurve besteht aus zwei getrennten Teilen, ab und cd, der mittlere Teil der Strahlen ist absorbiert, und man sieht sofort, daſs die Strahlen gröſserer Schwingungsdauer, als jene des absorbierten Lichtes ist, stärker abgelenkt sind als jene mit kürzerer Schwingungsdauer. Zugleich gibt die Form beider Kurvenäste deutlich zu erkennen, daſs wenn man sich durch allmähliche Abnahme der Schwingungsdauer jenen Schwingungen nähert, welche absorbiert werden, daſs dann die Ablenkungen sehr rasch wachsen, daſs aber, wenn man sich durch allmähliche Zunahme der Schwingungsdauern jenen Werten der Schwingungsdauern nähert, welche stark absorbiert werden, die Ablenkungen sehr rasch kleiner werden. Dasselbe, was von den Ablenkungen gilt, gilt auch annähernd von den Brechungsexponenten, das heiſst, sind auch die Brechungsexponenten nicht den Ablenkungen proportional, so ist doch der Gang derselben im groſsen und ganzen derselbe.

Fig. 58.



Nach dieser Methode konnte Kundt zunächst bei noch einer groſsen Anzahl von Lösungen solcher Substanzen, welche Oberflächenfarben und dem entsprechend starke Absorption zeigen, die anomale Dispersion erkennen. Er gelangte für diese zu folgendem Satze:

„Die Brechungsexponenten des Lichtes nehmen für solche Substanzen, wenn sich die Schwingungsdauer durch allmähliche Abnahme den absorbierten Schwingungen nähert, auſserordentlich zu; nähert man sich den absorbierten Schwingungen durch allmähliche Zunahme der Schwingungsdauer, so nehmen die Brechungsexponenten auſserordentlich schnell ab, und zwar so, daſs die Wellen gröſserer Schwingungsdauer, welche durch das Absorptionsband von jenen kleinerer Schwingungsdauer getrennt sind, stärker abgelenkt werden können als die letztern."

Einige von den Körpern zeigen in dem durchgehenden Lichte mehrere Absorptionsstreifen; so übermangansaures Kali fünf im Grünen, die aber im durchgehenden Lichte nur erkennbar sind, wenn die Lösung nicht zu konzentriert ist, Carmin zwei Absorptionsstreifen. Einem jedem dieser

Absorptionsstreifen entspricht dann auch eine Stetigkeitsunterbrechung der Dispersionskurve. Die Erscheinung z. B., welche übermangansaures Kali bietet, wenn man als Lichtquelle einen kurzen Spalt anwendet, so dafs das vom Beugungsgitter entworfene Spektrum ein schmales Band wird, zeigt Fig. 59. Die Ablenkung wächst vom Rot an bis zum ersten Absorptionsstreifen ganz in der vorher angegebenen Weise, um so rascher, je näher man dem Absorptionsstreifen kommt. Hinter dem Absorptionsstreifen ist sie kleiner und wächst gegen den zweiten Streifen und ebenso bei den folgenden. Hinter dem letzten Absorptionsstreifen scheint die Ablenkung nicht kleiner zu sein als vor demselben, aber man erkennt auch hier deutlich das mit abnehmender Schwingungsdauer erst raschere, dann langsamere Wachsen der Ablenkung. Fig. 60 zeigt daneben die Dispersion durch eine konzentrierte Lösung des übermangansauren Kalis, durch welches das Grün ganz ausgelöscht wird. An der viel stärkern Krümmung der Kurven und an der stärkern Verschiebung des Kurvenzweiges *GH* gegen *BD* erkennt man deutlich die Zunahme der Dispersionsanomalie mit der Konzentration der Lösung, also mit dem Absorptionsvermögen derselben.

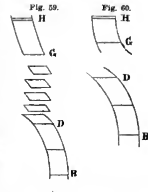


Fig. 59. Fig. 60.

Aus dieser Zunahme der Dispersionsanomalieen mit der Stärke der Absorption wird man schon schliefsen, dafs bei den gewöhnlichen absorbierenden Substanzen die Dispersionsanomalieen viel weniger stark sind, da bei ihnen die Absorption viel weniger energisch ist. In der That gelang es Kundt anfänglich auch nur zu zeigen, dafs gewisse Lösungen, welche das blaue Ende des Spektrums absorbieren, wie Eisenchloridlösungen, Chromsäurelösung, Lösung von Jod in Alkohol, eine hervorstechende Zunahme der Brechungsexponenten vom Rot zum Gelb darbieten, später aber konnte er an einem von ihm dargestellten mit Kobalt tief blau gefärbten Boraxglas die anomale Dispersion ganz in der vorher beschriebenen Weise erkennen. Fig. 61 zeigt die Erscheinung, wenn man das Beugungsspektrum durch ein Prisma dieses Kobaltglases betrachtet, und das Licht nahe der brechenden Kante hindurchgehen läfst. Man erhält einen starken ganz schwarzen Absorptionsstreifen zwischen rot und grün und einen schwächern etwa auf der Grenze des Grünen und Blauen. Dem entsprechend zeigt auch die Dispersionskurve ganz den vorhin angegebenen charakteristischen Verlauf.

Fig. 61.

Aufserdem konnte er bei dem oxalsauren Kobaltoxyd-Ammoniak und dem oxalsauren Kobaltoxyd-Kali schwache Knickungen in dem abgelenkten Spektrum erkennen.

Alle diese Beobachtungen zeigen somit, dafs in den stark absorbierenden Mitteln die Gröfse der Brechung in ganz anderer Weise von der Farbe des Lichtes resp. dessen Schwingungsdauer abhängt, als in den farblos durchsichtigen Mitteln.



§ 21.

Ableitung der Brechung und Zerstreuung des Lichtes aus der Undulationstheorie; Theorie von Cauchy. Die in den letzten Paragraphen dargelegten Thatsachen der Brechung und Zerstreuung des Lichtes können wir in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Trifft ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier Medien, so dringt stets ein Teil des Lichtes in das zweite Medium ein.

2. Das in das zweite Medium eindringende Licht pflanzt sich im allgemeinen nach einer andern Richtung fort als das ankommende; die Richtung ist gegeben durch das Brechungsgesetz, resp. durch den für jedes Medium konstanten Brechungsexponenten.

3. Die Gröfse des Brechungsexponenten hängt für ein und dasselbe Medium ab von der Farbe des Lichtes, und diese Abhängigkeit ist eine sehr verschiedene je nach der Natur des brechenden Mediums.

Vergleichen wir diese Sätze mit den beiden Auffassungen über das Wesen des Lichtes, so können beide die Brechungserscheinungen ableiten, indes kommen beide Theorien hier zu einem entgegengesetzten Resultate insofern, als die eine von ihnen die Brechung des Lichtes einer Verringerung, die andere einer Vergröfserung der Lichtgeschwindigkeit zuschreibt. Wir werden daher an dieser Stelle ein Mittel erhalten, experimentell die Zulässigkeit der einen oder andern Annahme zu prüfen.

Ist das Licht eine Wellenbewegung, so mufs nach den Entwicklungen des ersten Kapitels im III. Abschnitt, I. Teil, an der Grenze zweier Medien eine ankommende Welle zum Teil in das erste Mittel zurückkehren, zum Teil in das zweite Medium übergehen, sobald die Dichtigkeit oder Elasticität des Äthers im zweiten Medium von derjenigen des ersten Mittels verschieden ist. Nach der von Fresnel angenommenen Hypothese ist die Dichtigkeit des Äthers in den verschiedenen Mitteln verschieden, die Elasticität dieselbe. Nach unserem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}}$$

oder wenn wir die Elasticität des Äthers in den verschiedenen Mitteln konstant und

$$C\sqrt{e} = h$$

setzen,

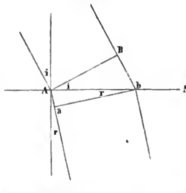
$$c = \frac{h}{\sqrt{d}},$$

ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der optischen Dichtigkeit der Mittel, wenn wir die Dichte des Äthers in einem Mittel als die optische Dichtigkeit desselben bezeichnen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist demnach in optisch dichtern Mitteln kleiner als in optisch dünnern. Mit Anwendung des Huyghensschen Principes erhielten wir für die Richtung der fortgepflanzten Welle ab (Fig. 62), wenn die einfallende Welle AB mit der Grenzfläche

oder die Normale der Welle, der Strahl mit dem Einfallslote den Winkel i bildet, als Beziehung zwischen dem Einfalls- und Brechungswinkel r

$$\sin i : \sin r = Bb : Aa = c : c'.$$

Die Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels verhalten sich wie die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung im ersten und im zweiten Mittel. Da diese bei isotropen Mitteln unabhängig sind von der Richtung, in welcher der Strahl das Mittel durchläuft, so folgt, dafs das Verhältnis von c zu c' konstant ist, welches auch der Winkel i ist, unter welchem die einfallende Welle die Fläche trifft. Wir erhalten somit



$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

und da überdies die Normale der in das zweite Mittel übergegangenen Welle nach unseren früheren Entwicklungen (I. Teil, § 135) mit derjenigen der einfallenden Welle in derselben Ebene liegt, so folgt, dafs nach der Wellentheorie die beiden ersten Gesetze durchaus im Wesen des Lichtes begründet sind[1]).

Ebenso ist es mit dem dritten Gesetze, nach welchem das Brechungsverhältnis verschieden ist, je nach der Farbe des Lichtes, nach welchem also die Geschwindigkeit des Lichtes eine verschiedene ist im zweiten Mittel, je nachdem das Licht gefärbt ist. Die Undulationstheorie macht die Annahme, dafs die Farbe abhängt von der Anzahl der Stöfse, welche wir in gleichen Zeiten erhalten, also von der Oscillationsdauer des Lichtes, dafs die langsamsten unserm Auge überhaupt wahrnehmbaren Oscillationen unserm Auge den Eindruck des roten, schnellere den des gelben, grünen, blauen, die schnellsten den des violetten Lichtes machen. Da während einer Oscillationsdauer das Licht sich um eine Wellenlänge fortpflanzt, und da das Licht aller Farben im leeren Raume sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt, wie wir daraus schliefsen müssen, dafs uns die überhaupt mit weifsem Lichte leuchtenden Gestirne immer gleichmäfsig weifs erscheinen, so folgt, dafs das Licht verschiedener Farbe auch eine verschiedene Wellenlänge besitzt; dafs die Wellenlänge des roten Lichtes die gröfste, die des violetten die kleinste ist, und dafs die Wellenlängen für die übrigen Farben zwischen diesen beiden liegen.

Der Unterschied der Brechbarkeit zwischen verschiedenfarbigen Strahlen bedeutet daher nach der Undulationstheorie eine Verschiedenheit der Änderung in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes beim Übergang desselben in ein zweites Mittel, je nach der Wellenlänge des an der Grenze ankommenden Lichtes, oder eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des

[1]) *Huyghens*, Traité de la lumière, chap. III. Leiden 1690. *Fresnel*, sur la diffraction de la lumière, Mémoires de l'Acad. de France Tome V. Poggend. Ann. Bd. XXX. Anhang zur Abhandlung. Oeuvres complètes T. I. p. 373.



Lichtes von der Wellenlänge des Lichtes. Die roten Strahlen werden am wenigsten gebrochen, für sie ist n am kleinsten, der Einheit am nächsten, es folgt, dafs für rote Strahlen die Geschwindigkeit c' im zweiten Mittel gröfser ist als für die Strahlen mit kleinerer Wellenlänge, und dafs die Strahlen mit kleinster Wellenlänge, die violetten, im zweiten Mittel die kleinste Geschwindigkeit haben, da für diese das Verhältnis

$$\frac{c}{c'} = n$$

den am meisten von der Einheit verschiedenen Wert hat.

Bei der Entwicklung der theoretischen Principien der Wellenbewegung[1]) gelangten wir allerdings zu einem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}},$$

nach welchem dieselbe nur von der Schwingungsrichtung, das heifst ob longitudinal oder transversal, und von der Elasticität und Dichtigkeit des betreffenden Mediums abhängig ist, dagegen unabhängig von der Länge der Welle. Wir bemerkten indes schon damals, dafs wenn die Schwingungen nicht longitudinale sind, diese Ableitung nur gültig ist, wenn die Länge der Welle gegen die Amplitude der Schwingungen oder gegen die Abstände der Moleküle sehr grofs ist, denn nur dann können wir den Verschiebungswinkel der neben einander liegenden Molekülschichten der Differenz der Verschiebungen der einzelnen Schichten aus ihrer Gleichgewichtslage proportional setzen. Das ist nicht mehr der Fall, wenn die Länge der Wellen einen mit den Abständen der Moleküle vergleichbaren Wert hat; dann aber verschwindet die Wellenlänge nicht aus dem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Cauchy hat bei einer von der obigen Beschränkung freien Behandlung[2]) dieses Gegenstandes gezeigt, dafs und wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen von der Wellenlänge abhängig sei. Nennen wir die Schwingungsdauer T und k^2 die Beschleunigung, welche der schwingende Punkt in der Einheit des Abstandes von der Gleichgewichtslage gegen die letztere erfährt, so ist, wie wir damals zeigten,

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Wir erhielten damals als Beziehung zwischen der Wellenlänge l und k ferner

$$k^2 = a \cdot \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot \frac{e}{d}$$

oder

$$l = \frac{2\pi}{k \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{d}{e}}},$$

wenn a eine Konstante und d die Dichtigkeit, e die Elasticität des schwin-

[1]) Man sehe im III. Abschnitt des I. Bandes § 127.

[2]) *Cauchy*, Mémoire sur la dispersion de la lumière. Prag 1836. *Beer*, Einleitung in die höhere Optik, p. 209. Braunschweig 1853.

genden Systems bedeutet. Setzen wir den Ausdruck im Nenner der Gleichung für l gleich s, also

$$l = \frac{2\pi}{s},$$

so wird

$$k^2 = a \cdot \frac{e}{d} \cdot s^2 = a_0\, s^2$$

und

$$c = \frac{l}{T} = \frac{k}{s} = \sqrt{a_0}.$$

Wir erhielten also die von der Wellenlänge unabhängige Fortpflanzungsgeschwindigkeit, indem sich ergab, dafs der die Wellenlänge bestimmende Ausdruck s nur durch einen konstanten Faktor von k verschieden ist. Cauchy dagegen erhält zwischen diesen beiden Gröfsen eine kompliciertere Beziehung, welche sich durch folgende Reihe wiedergeben läfst:

$$k^2 = a_1\, s^2 + a_2\, s^4 + a_3\, s^6 + \dots,$$

woraus sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt

$$c^2 = \frac{k^2}{s^2} = a_1 + a_2\, s^2 + a_3\, s^4 + \dots$$

oder

$$c^2 = a_1 + a_2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 + a_3 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 + \dots,$$

worin l die Wellenlänge in dem Mittel ist, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich c ist, und a_1, a_2 .. Konstanten sind, welche nur von der Beschaffenheit dieses Mittels abhängig sind.

Setzen wir deshalb voraus, dafs die Schwingungen des Äthers, die wir als Licht wahrnehmen, transversale sind, so mufs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in allen den Mitteln, in welchen die Wellenlängen gegen die Abstände der Moleküle einen vergleichbaren Wert haben, von der Länge der Wellen abhängig sein. Im Welteuraume ist eine solche Abhängigkeit nicht zu erkennen, dort pflanzen sich alle Wellen mit der gleichen Geschwindigkeit fort; ist also in den optisch dichtern Mitteln, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und damit die Länge der Wellen eine kleinere ist, die Länge der Wellen nicht mehr gegen den Abstand der Äthermoleküle unendlich grofs, so dafs in diesen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig ist, so mufs für die verschiedenen Farben der Brechungsexponent verschieden sein, somit eine Dispersion des Lichtes eintreten.

Eine Untersuchung der Koefficienten der für c^2 erhaltenen Reihe führte Cauchy zu dem Resultate, dafs dieselben sehr rasch abnehmen, so dafs es im allgemeinen genügt, nur die beiden ersten Glieder der Reihe beizubehalten. Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge können wir dann leicht in folgender Weise erhalten.

Ist λ die Wellenlänge einer bestimmten Lichtart im freien Äther, welcher in dem betrachteten Mittel die Wellenlänge l entspricht, und ist ζ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Äther, c diejenige des Lichtes von der Wellenlänge l in dem betrachteten Mittel, so folgt

zunächst, da bei der Brechung sich die Farbe, also die Oscillationsdauer nicht ändert, dafs die Wellenlänge l in dem Mafse kleiner ist als λ, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c kleiner ist als ζ, oder

$$l : \lambda = c : \zeta$$

$$l = \frac{c \cdot \lambda}{\zeta}.$$

Drücken wir in der Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem betrachteten Mittel

$$c^2 = a_1 + \frac{a}{l^2},$$

in welcher $a_2 \cdot 4\pi^2 = a$ gesetzt ist, l durch λ, ζ und c aus, so wird

$$c^2 = a_1 + a \cdot \zeta^2 \frac{1}{c^2 \lambda^2}.$$

Lösen wir die Gleichung nach c auf, so wird

$$c^4 - a_1 \cdot c^2 = \frac{a \zeta^2}{\lambda^2}$$

$$c^2 = \tfrac{1}{2} a_1 \pm \sqrt{\frac{a \zeta^2}{\lambda^2} + \tfrac{1}{4} a_1^2}.$$

Da c^2 jedenfalls gröfser als $\frac{1}{2} a_1$ ist, so müssen wir der Wurzel das positive Vorzeichen geben, es wird dann

$$c^2 = \tfrac{1}{2} a_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 a \zeta^2}{a_1^2 \lambda^2}}\right).$$

Ziehen wir die Wurzel auf der rechten Seite aus, und behalten nur Glieder, welche nicht höhere Potenzen von λ als die zweite haben, bei, so wird

$$c^2 = \tfrac{1}{2} a_1 \left(1 + 1 + \frac{2 a \zeta^2}{a_1^2 \lambda^2}\right) = a_1 + \frac{a \zeta^2}{a_1 \lambda^2}.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{a_1 + \frac{a \zeta^2}{a_1 \lambda^2}}} = \left(a_1 + \frac{a \zeta^2}{a_1 \lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Entwickeln wir die Potenz auf der rechten Seite nach dem binomischen Satze, und vernachlässigen auch hier die Glieder, welche höhere als die zweite Potenz von λ enthalten, so wird

$$\frac{1}{c} = a_1^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{a \zeta^2}{a_1^2 \lambda^2}\right),$$

nnd daraus weiter

$$\frac{\zeta}{c} = a_1^{-\frac{1}{2}} \zeta \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{a \zeta^2}{a_1^2 \lambda^2}\right)$$

oder da der Quotient dieser beiden Geschwindigkeiten der Brechungsexponent n ist,

$$n = \frac{\zeta}{c} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{1}{\lambda^2},$$

wenn wir die Koefficienten in unserm Ausdrucke für n mit α_1 und α_2 bezeichnen, welche von den durch die Beschaffenheit des Äthers im betrachteten Mittel bedingten Koefficienten a_1 und a_2, sowie von der konstanten Geschwindigkeit des Lichtes im freien Äther abhängig sind.

Die vollständigeren Rechnungen von Cauchy liefern für den Brechungsexponenten eine Reihe, welche nach fallenden geraden Potenzen von λ geordnet ist

$$n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda^2} + \frac{\alpha_3}{\lambda^4} \cdots$$

Aber sowohl diese als auch die oben von uns gegebene Ableitung der Gleichung für n macht, wie Christoffel hervorgehoben hat[1]), eine Voraussetzung, welche unbegründet ist, sie setzt nämlich voraus, dafs in der Reihe für c^2 nicht nur die Koefficienten des dritten und der folgenden Glieder sehr klein sind, sondern dafs schon der Koefficient des zweiten Gliedes, also die Konstante a_2 gegen a_1 sehr klein ist, so dafs in der Rechnung alle mit höhern Potenzen von $\frac{a_2}{a_1}$ behafteten Glieder fortgelassen werden dürfen. In obiger Rechnung tritt diese Vernachlässigung schon bei dem ersten Wurzelausziehen hervor.

Christoffel leitet deshalb aus der Cauchyschen Gleichung

$$k^2 = a_1\, s^2 + a_2\, s^4,$$

von der er also auch nur die beiden ersten Glieder beibehält, oder

$$k^2 = a_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 + a_2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4$$

den Wert des Brechungsexponenten n in etwas anderer Weise ab. Wir erhalten zunächst, wenn wir auch jetzt wieder λ die Wellenlänge im freien Äther nennen, aus der Beziehung

$$l = \frac{c}{\mathfrak{c}} \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

die Gleichung

$$k^2 = a_1 \left(\frac{2\pi \cdot n}{\lambda}\right)^2 + a_2 \left(\frac{2\pi \cdot n}{\lambda}\right)^4.$$

Nach der vorhin gegebenen Definition ist

$$k = \frac{2\pi}{T},$$

wenn T die Oscillationsdauer ist. Da nun bei der Brechung die Oscillationsdauer sich nicht ändert, somit T für eine gegebene Lichtart in allen Mitteln denselben Wert hat wie im freien Äther, so folgt, dafs auch k in allen Mitteln denselben Wert hat. Für den freien Äther ist aber, wie wir vorhin sahen,

$$k^2 = a_0 \cdot s^2 = a_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für k^2 ein, so wird

[1]) *Christoffel.* Poggend. Ann. Bd. CXVII.

$$a_0 = a_1 n^2 + a_2 (2\pi)^2 \frac{n^4}{\lambda^2}$$

eine Gleichung, welche nach n vierten Grades ist. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} \cdot (2\pi)^2 \frac{n^2}{\lambda^2},$$

so folgt, da die linke Seite wesentlich positiv ist, dafs $\frac{a_1}{a_0}$ positiv sein mufs, und weiter aus der Erfahrung, dafs die Brechungsexponenten mit abnehmendem Werte von λ wachsen, dafs also $\frac{1}{n^2}$ mit abnehmendem λ kleiner wird, dafs $\frac{a_2}{a_0}$ negativ sein mufs. Man kann deshalb setzen

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2}{n_0^2}, \quad 4\pi^2 \frac{a_2}{a_0} = -\frac{\lambda_0^2}{n_0^4},$$

worin n_0 und λ_0 zwei andere positive Konstanten bedeuten. Setzen wir diese Form der Konstanten in die Gleichung für n ein, so erhalten wir

$$1 = 2\frac{n^2}{n_0^2} - \frac{n^4}{n_0^4}\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$$

oder

$$\left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung nach n^2 aufgelöst gibt zunächst

$$n^2 = \frac{n_0^2}{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}}.$$

Im Nenner müssen wir der Wurzel das positive Vorzeichen geben, da sonst der Nenner mit abnehmendem λ wachsen, also der Wert von n^2 mit abnehmendem λ ebenfalls abnehmen würde. Dann können wir die Gleichung schreiben

$$n^2 = \frac{2 n_0^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}\right)^2}$$

und erhalten dann schliefslich

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}}$$

ein Ausdruck, durch welchen der absolute Brechungsexponent eines Mittels für eine bestimmte Farbe durch die Wellenlänge dieser Farbe im freien Äther, wofür auch, wie sich später ergeben wird, die Wellenlänge des Lichtes in der Luft gesetzt werden darf, und durch zwei von der Beschaffenheit des Mittels abhängige Konstanten gegeben ist.

§ 22.

Neuere Dispersionstheorie. Gegen die von Cauchy der Dispersionstheorie zu Grunde gelegte Annahme, daſs die Länge der Wellen in den verschiedenen Medien gegen den Abstand der Moleküle nicht mehr als hinreichend groſs angenommen werden dürfe, so daſs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig werde, erhob schon Briot einen principiellen Einwand[1]). Er hob hervor, daſs wenn in den durchsichtigen Körpern die Länge der Wellen einen mit den Abständen der Äthermoleküle vergleichbaren Wert habe, daſs dann dasselbe auch für den freien Äther gelten müsse, daſs also auch im Weltenraume die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Wellenlänge abhängig sein müsse, eine Abhängigkeit, welche nachweisbar nicht existiert. Der Einwurf Briots ist jedenfalls berechtigt, denn die Länge der Wellen im freien Äther ist nur wenig gröſser als in den durchsichtigen Körpern, andererseits ist aber der Abstand der Äthermoleküle im freien Äther jedenfalls ein nicht kleinerer, wahrscheinlich aber ein gröſserer als im Innern der durchsichtigen Körper. Bei Annahme der Fresnelschen Theorie, nach welcher die Brechung Folge einer gröſsern Dichtigkeit des Äthers in den durchsichtigen Medien ist, nimmt man ausdrücklich an, daſs die Äthermoleküle im freien Raume einen gröſsern Abstand haben, als in den durchsichtigen Medien. Darnach muſs das Verhältnis zwischen der Länge der Wellen und dem Abstande der Moleküle im freien Äther annähernd dasselbe sein, wie im Innern der Körper, es kann deshalb in diesen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes nicht stärker von der Wellenlänge abhängig sein als im freien Äther.

Briot nimmt deshalb an, da eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Wellenlänge sich nur in den durchsichtigen Körpern zeigt, in welchen sich der Äther zwischen den Molekülen der die Körper bildenden Materie befindet, daſs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eben durch die Anwesenheit der körperlichen Moleküle modificiert wird. Der Einfluſs dieser körperlichen Moleküle kann ein doppelter sein. Zunächst werden nämlich die körperlichen Moleküle durch die Bewegung des Äthers ebenfalls in Bewegung versetzt werden müssen, eine Bewegung, welche wir demnächst bei Besprechung der Absorption des Lichtes nachweisen werden. Dadurch muſs aber die Bewegung des Äthers selbst beeinfluſst werden, und damit auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Ferner nimmt Briot an, daſs infolge der zwischen den körperlichen Molekülen und dem Äther thätigen Kräfte im Innern der Körper eine eigentümliche Verteilung des Äthers vorhanden sein müsse, die Dichtigkeit des Äthers könne nicht überall die gleiche, sie müsse vielmehr eine periodisch wechselnde sein. Nehmen wir z. B. an, daſs die Äthermoleküle von denen des Körpers angezogen werden, so muſs eine Verdichtung des Äthers um die letztern stattfinden, so daſs also in der Nähe der letztern der Äther eine gröſsere Dichtigkeit haben muſs als entfernter von denselben. Auf der Verbindungslinie zweier Moleküle wird also in der Mitte derselben die Dichtigkeit des Äthers einen kleinsten Wert haben, welcher von da ab wächst bis zu einem

[1]) *Briot.* Essais sur la théorie mathématique de la lumière. Paris 1863. Deutsch von *Klinkerfues.* Leipzig 1867 p. 63 ff.

gewissen gröfsern Wert, je mehr man sich den körperlichen Molekülen nähert. Die Dichtigkeit des Äthers ist nur mehr eine periodisch gleiche, das heifst in den verschiedenen Perioden, den Abständen zweier Moleküle; als Ganzes genommen ist die Dichtigkeit dieselbe, innerhalb einer einzelnen Periode ist aber die Dichtigkeit an verschiedenen Punkten eine verschiedene. Die Isotropie des Mediums wird dadurch nicht beeinflufst, denn in welcher Richtung wir auch durch das Mittel fortschreiten, die Perioden, nach welchen die Dichtigkeit des Äthers wieder dieselbe wird, sind für alle Richtungen dieselben.

Indem Briot diese verschiedenen Umstände in Rechnung zieht, gelangt er zu dem Resultate, dafs infolge der Mitbewegung der körperlichen Moleküle die Brechungsexponenten mit der Schwingungsdauer, also der Wellenlänge wachsen müfsten, dagegen infolge der wechselnden Dichtigkeit des Äthers in derselben Weise wie nach der Cauchyschen Theorie mit abnehmender Wellenlänge wachsen müfsten. Da nun erfahrungsgemäfs die Cauchyschen Gleichungen die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Wellenlänge im wesentlichen darstellen, glaubte Briot den Einflufs der Mitbewegung der körperlichen Moleküle als so klein ansehen zu können, dafs er aufser Acht gelassen werden könne.

Die Entdeckung der anomalen Dispersion, und der sich in derselben zeigende innige Zusammenhang zwischen der Gröfse der Brechungsexponenten der verschiedenen Farben und der Absorption des Lichtes mufste den letzten Schlufs von Briot als irrig erscheinen lassen; aus diesem Zusammenhange folgt vielmehr, dafs es wesentlich die Mitbewegung der Moleküle ist, welche die Brechung des Lichtes bedingt. Wenn wir die Absorption auch erst später betrachten, so erkennen wir doch sofort, dafs wenn das Licht eine schwingende Bewegung ist, die Absorption desselben dadurch zustande kommt, dafs die Bewegung des Äthers an die körperlichen Moleküle übergeht, dafs infolge dieses Überganges die Schwingungen des Äthers in dem Innern des Körpers zurückgehalten werden, dafs deshalb das Licht bei dem Durchgange durch Körper geschwächt oder auch, wenn die eindringende Bewegung ganz an die Moleküle des Körpers übergeht, ganz ausgelöscht wird. Da wir nun in den absorbierenden Medien einen so innigen Zusammenhang zwischen der Absorption und Brechung finden, wird der Schlufs berechtigt sein, dafs überhaupt die Mitschwingung der Körpermoleküle es ist, welche die Brechung des Lichtes veranlafst, dafs also die gröfsere optische Dichtigkeit der brechenden Medien eben darin besteht, dafs zu den im freien Raume schwingenden Äthermolekülen diejenigen des Körpers hinzu treten.

In diesem Sinne hat zuerst Sellmeier[1]) die Brechung und Zerstreuung des Lichtes zu behandeln versucht, und es gelang ihm bereits den Zusammenhang zwischen Absorption und Brechung, sowie den bei der anomalen Dispersion sich zeigenden eigentümlichen Gang der Brechungsexponenten aus der Mechanik der schwingenden Bewegungen abzuleiten. Eine vollständigere Theorie der Brechung und Dispersion auf das Princip des Mitschwingens der körperlichen Moleküle gegründet gab dann Helmholtz[2]) und in

[1]) *Sellmeier.* Poggend. Ann. Bd. CXL und CXLVII.
[2]) *Helmholtz.* Poggend. Ann. Bd. CLIV.



ähnlicher Weise haben später Lommel[1]) und Ketteler[2]) die Theorie behandelt.

Die Grundlage der Helmholtzschen Theorie ist folgende. Er nimmt an, dafs im Innern der brechenden Körper die ponderabeln Moleküle hinreichend dicht liegen, um alle Teile der zwischen ihnen liegenden Äthermassen gleichmäfsig zu afficieren, und betrachtet zunächst nur eine Art von ponderabeln Atomen, welche in Mitschwingungen versetzt wird. Eine in den Körper eindringende Lichtwelle versetzt zunächst den Äther in Schwingungen, der nicht nur durch den umgebenden Äther, sondern auch durch die körperlichen Moleküle im Gleichgewicht gehalten wird. Infolgedessen erhält das schwingende Ätherteilchen einen gegen seine Gleichgewichtslage gerichteten Antrieh, nicht nur weil es eine Verschiebung gegen die benachbarten Ätherteile erhalten hat, sondern auch wegen seiner Verschiebung gegen die körperlichen Moleküle. Diese Wechselwirkung zwischen den Äthermolekülen und den körperlichen Molekülen hat dann zur Folge, dafs auch diese eine Störung ihres Gleichgewichts erfahren. Betreffs dieser nimmt Helmholtz an, dafs schwere centrale Massen der Moleküle fest liegen, und dafs die beweglichen Teile der Moleküle gegen diese festen Massen eine bestimmte Gleichgewichtslage zu bewahren streben. Werden sie durch den Einflufs des schwingenden Äthers aus dieser Gleichgewichtslage gebracht, so werden sie mit einer ihrer Verschiebung proportionalen Kraft in dieselbe zurückgezogen.

Diese Annahme über die Beschaffenheit der körperlichen Moleküle führt zu der Folgerung, dafs eine Fortpflanzung der Bewegung von einem körperlichen Moleküle resp. von einer Schicht solcher auf eine folgende Schicht nicht stattfindet, weil eine Verschiebung der Moleküle gegen einander nicht eintritt, es werden die Teile der von dem eindringenden Lichte nach und nach getroffenen Moleküle lediglich durch die Einwirkung des Äthers auf die betreffenden Moleküle in Schwingung versetzt. Jedes Molekül schwingt für sich, oder genauer gesagt, die Atome eines Moleküles schwingen für sich. Sie haben deshalb wie ein isoliert schwingendes Pendel eine bestimmte von den wirksamen elastischen Kräften und den zu bewegenden Massen abhängige Schwingungsdauer, ein Umstand, der erkennen läfst, weshalb Helmholtz bei seiner Entwicklung zunächst nur eine Art von Molekülen annimmt. Trotzdem werden aber die an den verschiedenen Stellen des brechenden Mittels von dem eindringenden Lichte nach und nach getroffenen, also die auf dem Wege des Lichtstrahles liegenden Atome, Abstände von der Gleichgewichtslage haben, welche gerade wie die der Ätherteilchen einer Wellenlinie angehören, da die Schwingungen von dem schwingenden Äther veranlafst werden, also die in der Bahn des Lichtstrahls auf einander folgenden Moleküle nach und nach ihre Bewegung beginnen, wie die Äthermoleküle, in denen sich die Lichtschwingungen fortpflanzen.

Von dieser den körperlichen Molekülen seitens des schwingenden Äthers mitgeteilten Bewegung nimmt dann Helmholtz an, dafs sie eine Reibung erfahre, welche die Ursache der Absorption des Lichtes im Innern

---

[1]) *Lommel.* Wiedem. Ann. Bd. III.

[2]) *Ketteler.* Wiedem. Ann. B. VII. Bd. XII. Man sehe auch *Wernicke,* Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1875.

der Körper ist. Würde diese Reibung nicht stattfinden, so würde die von dem schwingenden Äther an die körperlichen Moleküle abgegebene Bewegung ganz den Ätherteilchen rückwärts wieder erteilt werden. Da diese Bewegung zum Teil in der Reibung verloren geht, resp. wie wir später sehen werden, in Wärme umgesetzt wird, so muſs bei tieferem Eindringen in die brechenden Medien das Licht immer mehr und mehr geschwächt werden, die Schwingungsamplituden müssen kleiner und kleiner werden.

Von diesen Annahmen ausgehend erhält Helmholtz die Gleichung für die bewegenden Kräfte. Wir bezeichnen die in einem Volumelement des brechenden Mittels vorhandene Masse des Äthers mit μ, die Masse der ponderabeln Substanz mit m, der Abstand des schwingenden Äthers von seiner Gleichgewichtslage zur Zeit t sei gleich η, die der schwingenden körperlichen Atome sei gleich y. Die Schwingungen des Lichtes pflanzen sich in der Richtung der x fort. Bezeichnen wir die Elasticität des Äthers mit ε, so würde nach § 126 des ersten Bandes, wenn auf die Schwingungen des Äthers die körperlichen Moleküle keinen Einfluſs hätten, die Beschleunigung der schwingenden Masse μ zur Zeit t durch die Gleichung gegeben sein

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{d^2\eta}{dx^2} \,\ldots\ldots\, \text{(a)}$$

Zu dieser Beschleunigung tritt jene, welche von den zwischen den körperlichen Molekülen und dem Äther thätigen Kräften bewirkt wird, hinzu. Da die Ätherteilchen um η, die körperlichen Atome um y aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben sind, so ist die Verschiebung beider gegen einander gleich $\eta - y$. Ist die Kraft, mit der beide gegen einander getrieben werden, wenn die Verschiebung gleich eins ist, gleich β, so kommt unter der Voraussetzung, daſs wir diese Kräfte der relativen Verschiebung von Äther- und Köperteilchen proportional setzen dürfen, als bewegende Kraft hinzu das Glied $-\beta\,(\eta - y)$, wo wir das negative Vorzeichen schreiben, da diese Kraft stets der stattgehabten Verschiebung entgegengesetzt gerichtet ist. Für die Beschleunigung der Ätherteilchen ergibt sich daher

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{\beta}{\mu}\,(\eta - y) \ldots (1).$$

Diese Gleichung allein genügt noch nicht, die Bewegung des Äthers zu bestimmen, es muſs vielmehr gleichzeitig die Gleichung für die Schwingungen der Moleküle gegeben sein. Die diese bewegende Kraft ist zunächst die von den Ätherteilchen ausgehende, welche der von den körperlichen Molekülen auf den Äther ausgeübten gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt, somit durch $\beta\,(\eta - y)$ gegeben ist. Ferner werden die Atome des Moleküls durch ihre eigene Elasticität gegen ihre Gleichgewichtslage zurückgetrieben; nennen wir die bei der Einheit der Verschiebung wirkende Kraft γ, so wird die der Verschiebung y entsprechende gleich $-\gamma y$. Von dieser bewegenden Kraft ist der Widerstand der Reibung abzuziehen, den wir in jedem Momente der augenblicklichen Geschwindigkeit der bewegten Atome proportional setzen. Ist δ der der Geschwindigkeit eins entsprechende Widerstand, so ist zur Zeit t derselbe gleich $\delta\,\frac{dy}{dt}$. Darnach wird die Beschleunigung der schwingenden Atome:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\beta}{m}(\eta - y) - \frac{\gamma}{m}y - \frac{\delta}{m}\frac{dy}{dt} \ldots (2).$$

Die beiden Gleichungen genügen, um sowohl die Bewegung des Äthers als diejenige der körperlichen Moleküle zu bestimmen.

§ 23.

Ableitung der Gleichung für den Brechungsexponenten. Die Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen gestatten uns ebenso die Bewegung der Äther- und Körperteilchen innerhalb der brechenden Mittel darzustellen, wie wir im § 126 des ersten Bandes aus der einfachern Differentialgleichung die Wellenbewegung einfacher elastischer Medien abgeleitet haben.

Die Bewegung mufs eine schwingende sein, da dieselbe als schwingende in den Körper eintritt, und da auch die im Innern des brechenden Körpers auftretenden elastischen Kräfte die verschobenen Teilchen nach unserer Voraussetzung gegen die Gleichgewichtslage zurücktreiben und zwar um so stärker, je gröfser der Abstand der schwingenden Moleküle von der Gleichgewichtslage ist. Rechnen wir die Zeit t von dem Momente an, in welchem die Bewegung die Grenze des brechenden Körpers erreicht, nennen wir T die Schwingungsdauer der eindringenden Bewegung und l die Strecke, durch welche im Innern des Körpers sich die Bewegung während der Dauer einer Schwingung fortpflanzt, also die innere Wellenlänge, so können wir zunächst die Abstände der Ätherteilchen von ihrer Gleichgewichtslage zur Zeit t und in der Entfernung x von der Grenze des Körpers darstellen durch die Gleichung

$$\eta = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right),$$

worin a die Amplitude der Bewegung an dieser Stelle bedeutet.

Von dieser letztern ergeben die im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen zunächst, dafs sie mit wachsendem x abnehmen mufs, denn es geht ein Teil der eindringenden Bewegung an die körperlichen Moleküle über, welche in diesen infolge der Reibung teilweise verloren geht, resp. in Bewegung anderer Form umgewandelt wird. An jeder Stelle wird sich die Bewegung in gleichem Verhältnis zwischen den Molekülen des Äthers und des Körpers teilen; darnach mufs auf gleiche Strecken im Innern des Körpers immer der gleiche Bruchteil der an der vordern Grenze der Strecken ankommenden Bewegung von den Körpermolekülen zurückgehalten werden; das Gesetz der Abnahme der Amplituden mit wachsendem x mufs daher dasselbe sein, welches wir im § 60 des ersten Bandes für die Abnahme der Amplituden eines durch Torsion pendelnden Drahtes mit wachsender Zeit infolge der dem gleichen Gesetze folgenden innern Reibung fanden. Die Amplituden nehmen mit wachsendem x stets um denselben Bruchteil ab, wenn x um dieselbe Gröfse wächst. Bezeichnen wir deshalb mit k eine positive Konstante, und mit A die Amplitude der Ätherschwingungen für $x = 0$, also dort, wo das Licht in den brechenden Körper eindringt, so können wir setzen

$$a = Ae^{-kx},$$

wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. Damit wird

$$\eta = A e^{-kx} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) \quad \ldots \ldots (\mathrm{I})$$

Eine ebensolche Gleichung mufs die von den Lichtschwingungen erregten Schwingungen der körperlichen Moleküle resp. deren Atome darstellen; wie wir im vorigen Paragraph sahen, pflanzt sich die Bewegung dieser Moleküle nicht fort, da die Moleküle nicht gegen einander verschoben werden; die in der Richtung x auf einander folgenden Moleküle werden nur durch die in dieser Richtung sich fortpflanzenden Ätherschwingungen in Bewegung gesetzt, es folgt somit, dafs die Strecke l, durch welche sich die Bewegung während einer Schwingungsdauer T fortpflanzt, ganz dieselbe sein mufs. Von den möglichen Schwingungsdauern, welche die Atome unter Wirkung der vereinten Kräfte annehmen können, haben wir nur diejenigen, resp. von der zusammengesetzt periodischen Bewegung der Atome nur den Teil in Betracht zu ziehen, welcher mit den Schwingungen des Äthers gleiche Dauer hat, da es sich hier um die Rückwirkung der körperlichen Moleküle auf die Schwingungen des Äthers handelt. Wir haben daher für die körperlichen Moleküle dieselbe Schwingungsdauer T zu setzen. Die Phase der Schwingungen kann aber eine andere sein, wir wollen die Verschiebung der Phase mit Δ bezeichnen. Die Amplitude schliefslich der körperlichen Moleküle mufs nach demselben Gesetze mit wachsendem x abnehmen wie diejenige der Äthermoleküle, da es die Bewegungen des Äthers sind, welche die Schwingungen der körperlichen Moleküle erregen, und da bei den überall gleichen Verhältnissen im Innern des Körpers die Bewegungen sich stets in demselben Verhältnis zwischen den Äthermolekülen und denen des Körpers teilen müssen. Ist B die Amplitude der Schwingungen der körperlichen Moleküle an der Eintrittsstelle des Lichtes, also für $x = 0$, so können wir demnach die Bewegung derselben darstellen durch die Gleichung

$$y = B e^{-kx} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \Delta\right) \quad \ldots \ldots (\mathrm{II})$$

Sollen diese Gleichungen die durch die Gleichungen (1) und (2) des vorigen § in ihren Beschleunigungen bestimmte Bewegung darstellen, so müssen sie so beschaffen sein, dafs sie jenen Gleichungen genügen, das heifst bilden wir aus (I) und (II) die betreffenden Differentialquotienten, so müssen sich damit jene Gleichungen zusammenstellen lassen. Die so zu bildenden Differentialquotienten enthalten das Verhältnis B zu A, die Gröfsen k, l, Δ; bei dem Einsetzen derselben in die Gleichungen (1) und (2) ergeben sich die Beziehungen zwischen diesen Gröfsen und den Konstanten $a\varepsilon$, β, γ, δ, m, μ der beiden Gleichungen. Bestimmen wir dann die Gröfsen $\frac{B}{A}$, k, l, Δ so, dafs sie diesen Beziehungen entsprechen, so ist die durch die mit diesen Konstanten versehenen Gleichungen (I) und (II) dargestellte Bewegung eine solche, wie sie der durch die molekularen Kräfte gegebenen Beschleunigung entspricht. Die Gleichungen (1) und (2) waren

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{\beta}{\mu}(\eta - y) \quad \ldots \ldots (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\beta}{m}(\eta - y) - \frac{\gamma}{m} y - \frac{\delta}{m}\frac{dy}{dt} \quad \ldots . (2)$$

Um die in diesen Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten nach t zu bilden, ist zu beachten, dafs dabei x als unveränderlich zu betrachten ist, dieselben sollen uns eben die Veränderungen geben, die an irgend einer Stelle, also für ein konstantes x, mit der Zeit stattfinden. Um $\frac{d\eta}{dt}$ zu bilden haben wir nur in Gleichung (I) t um dt wachsen zu lassen, alles übrige ist konstant. Nach der mathematischen Einleitung E IV und E 4 wird dann

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{2\pi}{T} A e^{-kx} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right).$$

Wie wir ferner wissen, ist der zweite Differentialquotient einer Funktion der Differentialquotient des ersten Differentialquotienten, demnach gemäfs E IV und E 5

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} A e^{-kx} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right).$$

In ganz derselben Weise erhalten wir

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} B e^{-kx} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \varDelta\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} B e^{-kx} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \varDelta\right).$$

Zur Bildung der Differentialquotienten nach x haben wir t als konstant zu betrachten, und x sowohl im Exponenten als in der trigonometrischen Funktion sich um dx ändern zu lassen. Nach E II, E 3a, E 4 wird so

$$\frac{d\eta}{dx} = -kAe^{-kx}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) - \frac{2\pi}{l} A e^{-kx} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)$$

und darans ganz ebenso

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = k^2 A e^{-kx} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) + \frac{2\pi}{l} kAe^{-kx}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)$$

$$+ k\frac{2\pi}{l} A e^{-kx} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) - \frac{4\pi^2}{l^2} A e^{-kx} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right).$$

Schreiben wir jetzt der Kürze wegen

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) = \varphi \quad 2\pi\varDelta = \psi,$$

so wird durch Einsetzen der betreffenden Quotienten in die Gleichung (I)

$$-\frac{4\pi^2}{T^2} A e^{-kx} \sin\varphi = -a\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\frac{4\pi^2}{l^2} - k^2\right) A e^{-kx} \sin\varphi + 2a\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{2\pi}{l} kAe^{-kx}\cos\varphi$$

$$-\frac{\beta}{\mu} A e^{-kx}\left(\sin\varphi - \frac{B}{A}\sin(\varphi - \psi)\right).$$

Nach § 126 des ersten Teiles würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des

Lichtes, wenn auch im Innern des brechenden Körpers nur Äther vorhanden wäre,

$$\zeta^2 = \frac{a\,e}{\mu}.$$

Bezeichnen wir ferner die Wellenlänge des Lichtes von der Schwingungsdauer T im freien Äther mit λ, so dafs $\lambda = \zeta T$, so können wir, wenn n der Brechungsexponent des Lichtes dieser Wellenlänge, bei dem Übertritt desselben in den betrachteten brechenden Körper ist, setzen

$$l = \frac{\lambda}{n}.$$

Führen wir schliefslich statt der Konstanten k eine neue Konstante $\varkappa$ ein, so dafs

$$k = \varkappa\,\frac{2\pi}{\lambda},$$

so können wir die erhaltene Gleichung schreiben, indem wir alle Glieder durch $A\,e^{-kx}\,\zeta^2$ dividiren,

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\varphi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}(n^2-\varkappa^2)\sin\varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,2n\varkappa\cos\varphi$$
$$-\frac{\beta}{\mu\zeta^2}\left(\sin\varphi - \frac{B}{A}\sin(\varphi-\psi)\right)\;\cdots\;(3)$$

Dieser Gleichung können wir die Form geben

$$\left\{(n^2-\varkappa^2-1)\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\mu\zeta^2}\left(1-\frac{B}{A}\cos\psi\right)\right\}\sin\varphi$$
$$-\left(2n\varkappa\,\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{\beta}{\mu\zeta^2}\,\frac{B}{A}\cdot\sin\psi\right)\cos\varphi = 0.$$

Disse Gleichung mufs für jeden Wert von φ gültig sein; das ist nur möglich, wenn der Koefficient von $\sin\varphi$ und ebenso der für $\cos\varphi$ für sich gleich null sind. Denn nehmen wir an, dafs für irgend einen Wert von φ die Gleichung bestände, ohne dafs die Koefficienten einzeln gleich null sind, so würde mit wachsendem φ, wenn φ im ersten Quadranten liegt, das erste Glied wachsen, das zweite abnehmen, die Gleichung könnte also nicht mehr bestehen, im zweiten Quadranten von φ würde gar das zweite Glied negativ, während das erste positiv bleibt. Da nun die Koefficienten sich mit φ nicht ändern, müssen sie einzeln für sich gleich null sein. Dadurch zerfällt die Gleichung in zwei, nämlich

$$\left.\begin{aligned} n^2-\varkappa^2-1 &= -\frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2\mu\zeta^2} + \frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2\mu\zeta^2}\cdot\frac{B}{A}\cos\psi \\ 2n\varkappa &= \frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2\mu\zeta^2}\,\frac{B}{A}\sin\psi. \end{aligned}\right\}\;\ldots(4).$$

Wir erhalten so zwei Gleichungen, welche die in den Gleichungen (I) und (II) vorkommenden Konstanten mit den Konstanten der Gleichung (1) verbinden.

Setzen wir die betreffenden Differentialquotienten in die Gleichung (2) ein, so wird dieselbe

$$-\frac{4\pi^2}{T^2} B e^{-kx} \sin(\varphi - \psi) = \frac{\beta}{m} B e^{-kx} \left(\frac{A}{B} \sin\varphi - \sin(\varphi - \psi)\right)$$
$$-\frac{\gamma}{m} B e^{-kx} \sin(\varphi - \psi) - \frac{\delta}{m} B e^{-kx} \frac{2\pi}{T} \cos(\varphi - \psi) \ldots (5)$$

Auch diese Gleichung zerfällt gerade wie die Gleichung (3) und aus denselben Gründen in zwei Gleichungen. Dividieren wir in (5) alle Glieder durch Be^{-kx} und ordnen passend, so werden diese beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{4\pi^2}{T^2}\cos\psi &= \frac{\beta}{m}\frac{A}{B} - \frac{\beta+\gamma}{m}\cos\psi - \frac{\delta}{m}\frac{2\pi}{T}\sin\psi \\ \frac{4\pi^2}{T^2}\sin\psi &= \frac{\beta+\gamma}{m}\sin\psi - \frac{\delta}{m}\frac{2\pi}{T}\cos\psi. \end{aligned}\right\} \ldots (6).$$

Diese beiden Gleichungen geben uns die beiden gesuchten Gröfsen $\frac{B}{A}$ und ψ ausgedrückt durch die Konstanten der Gleichung (2). Entwickeln wir dieselben und setzen die gefundenen Werte in die Gleichungen (4), so erhalten wir die Gröfsen n und $\varkappa$ ebenfalls in den Konstanten der beiden Gleichungen (1) und (2) wiedergegeben.

Multiplicieren wir die erste der Gleichungen (6) mit $\cos\psi$, die zweite mit $\sin\psi$ und subtrahieren von der zweiten die erste, so wird

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = -\frac{\beta}{m}\frac{A}{B}\cos\psi + \frac{\beta+\gamma}{m}.$$

Multiplicieren wir die erste mit $\sin\psi$, die zweite mit $\cos\psi$ und addieren, so wird

$$0 = \frac{\beta}{m}\frac{A}{B}\sin\psi - \frac{\delta}{m}\frac{2\pi}{T}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{\beta}{m}\cos\psi}{\frac{\beta+\gamma}{m} - \frac{4\pi^2}{T^2}} \ldots (7)$$

aus der zweiten

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{\beta}{m}\sin\psi}{\frac{\delta}{m}\frac{2\pi}{T}} \ldots (8)$$

Die im Nenner der Gleichung (7) vorkommende Summe $\beta + \gamma$ würde uns die Summe der auf die Atome der Moleküle wirkenden Kräfte geben, wenn dieselben für sich in Schwingung gesetzt würden, und dabei die Äthermoleküle in Ruhe blieben, also $\eta = 0$ wäre, und wenn aufserdem keine Reibung stattfände. Die Gleichung (2) würde dann

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\beta+\gamma}{m}y.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man gemäfs § 124 des ersten Bandes, dafs, wenn wir die Schwingungsdauer, welche die Atome unter dieser Voraus-

setzung haben würden, mit T_m bezeichnen, gesetzt werden kann

$$\frac{\beta+\gamma}{m} = \frac{4\pi^2}{T_m^2} = \frac{4\pi^2\zeta^2}{\lambda_m^2},$$

wenn wir mit λ_m die Wellenlänge einer Schwingung von der Dauer T_m im freien Äther bezeichnen, in welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich ζ ist.

Damit können wir Gleichung (7) schreiben

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\cos\psi}{\frac{1}{\lambda_m^2}-\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\lambda_m^2\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_m^2}\cos\psi.$$

Gleichung (8) können wir schreiben

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\sin\psi}{\frac{\delta}{2\pi m\zeta}\cdot\frac{1}{\lambda}}$$

und wenn wir

$$\frac{\delta}{2\pi m\zeta}\cdot\lambda_m^2 = \alpha$$

setzen,

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\lambda_m^2\lambda}{\alpha}\sin\psi.$$

Aus den beiden Ausdrücken für $\frac{B}{A}$ folgt

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\alpha\lambda}{\lambda^2-\lambda_m^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

$$\sin^2\psi = \frac{\alpha^2\lambda^2}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \qquad \cos^2\psi = \frac{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \quad \ldots (10)$$

Mit diesen Werten wird dann

$$\frac{B}{A}\cos\psi = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\lambda_m^2\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_m^2}\cos^2\psi = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\lambda_m^2\lambda^2(\lambda^2-\lambda_m^2)}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\frac{B}{A}\sin\psi = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\lambda_m^2\lambda}{\alpha}\sin^2\psi = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\alpha\lambda_m^2\lambda^3}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \quad \ldots\ldots (12)$$

Setzen wir schliefslich diese Werte in die Gleichungen (4), so erhalten wir n und $\varkappa$ aufser durch die Wellenlänge λ lediglich durch die molekularen Konstanten des brechenden Körpers gegeben

$$n^2-\varkappa^2-1 = -\frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2\mu}\lambda^2 + \frac{\beta^2}{(4\pi^2\zeta^2)^2 m\mu}\,\frac{\lambda_m^2\lambda^4(\lambda^2-\lambda_m^2)}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \quad \ldots (III)$$

$$2n\varkappa = \frac{\beta^2}{(4\pi^2\zeta^2)^2 m\mu}\,\frac{\alpha\lambda_m^2\lambda^5}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \quad \ldots\ldots (IV).$$

Setzen wir schliefslich, um kürzere Zeichen einzuführen, die nur vereint vorkommenden

$$\frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2\mu} = P, \qquad \frac{\beta^2\lambda_m^2}{(4\pi^2\zeta^2)^2 m\mu} = Q,$$

so wird

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q\frac{\lambda^4(\lambda^2-\lambda_m^2)}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \cdots \text{(IIIa)}$$

$$2n\varkappa = \quad Q\frac{\alpha\lambda^5}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \cdots\cdots\cdots \text{(IVa).}$$

Wenn demnach in die Gleichungen (I) und (II) die Gröfsen $\frac{B}{A}$, ψ, n und $\varkappa$ mit diesen Werten, wie sie die letzten Ausdrücke ergeben, eingesetzt werden, so stellen dieselben uns die schwingenden Bewegungen von der Schwingungsdauer T dar, wie sich dieselben infolge der durch die Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen bestimmten molekularen Beschaffenheit desselben in dem brechenden Medium fortpflanzen können. Nach unserer Definition von n

$$nl = \lambda$$

ist n der Brechungsexponent des Lichtes von der Schwingungsdauer T oder der im freien Äther demselben zukommenden Wellenlänge λ; weiter ist, da

$$k = \varkappa\frac{2\pi}{\lambda},$$

$2\pi\varkappa$ der Bruchteil des Lichtes, der auf der Strecke λ im Innern des Körpers als Licht verloren geht, das heifst durch die Reihung der schwingenden Atome in Bewegungen anderer Art umgewandelt wird.

Für den Absorptionskoefficienten k, der sich auf die Längeneinheit bezieht, ergibt sich darnach die Gleichung

$$k = \frac{\pi}{n} Q\frac{\alpha\lambda^4}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \cdots\cdot \text{(IVb).}$$

Die Gleichungen (III) und (IV) gestatten sowohl n als $\varkappa$ in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge λ des eindringenden Lichtes und den für den betreffenden Körper charakteristischen Konstanten zu berechnen. Setzen wir

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 - P\lambda^2 + Q\frac{\lambda^4(\lambda^2-\lambda_m^2)}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} = F$$

$$2n\varkappa = Q\frac{\alpha\lambda^5}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2} = G,$$

so erhält man unmittelbar

$$n = \tfrac{1}{2}\sqrt{F^2+G^2} + \tfrac{1}{2}F$$

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\sqrt{F^2+G^2} - \tfrac{1}{2}F;$$

Ausdrücke, deren Berechnung allerdings nicht gerade bequem ist.

In den bisherigen Entwicklungen ist vorausgesetzt, dafs der brechende Körper nur eine Art von Molekülen hat, welche durch die eindringende Bewegung in Mitschwingungen versetzt werden. Es ist nun möglich, dafs es mehrere Arten von Molekülen im Innern des brechenden Körpers gibt, die sich dann dadurch unterscheiden, dafs für jede Art die Gröfse der zwischen ihnen und dem Äther thätigen Molekularkräfte die Gröfse β der Helmholtzschen Gleichungen, und ebenso die Gröfse der durch die Verschiebung der Atome gegen den festen Punkt in den Molekülen geweckten elastischen Kraft, die Gröfse γ der Gleichungen, sowie die Konstante δ der Reibung verschieden ist. Die primären Bewegungsgleichungen (1) und (2) werden dadurch in folgender Weise geändert. Nehmen wir an, es wären zwei Arten von Molekülen vorhanden; die entsprechenden Konstanten seien β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, die Massen der für jede Art Moleküle in dem Volumelement schwingenden Atome seien m_1 und m_2. Es seien ferner die Abstände dieser Atome von ihrer Gleichgewichtslage zur Zeit t gleich y_1 und y_2. Da zwischen jeder Art von Molekülen und dem Äther molekulare Kräfte thätig sind, ergibt sich für die den Äther bewegende Kraft aufser der in Gleichung (1) gegebenen, noch die zwischen der zweiten Art von Molekülen und dem Äther wirksamen Kraft. Die Gleichung (1) wird also

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{\beta_1}{\mu}\,(\eta - y_1) - \frac{\beta_2}{\mu}\,(\eta - y_2).$$

An Stelle der einen Gleichung (2) treten dann soviele Gleichungen, als Arten von Molekülen vorhanden sind; denn da in die erste Gleichung y_1 und y_2 eingehen, so müssen die Bewegungen beider Arten von Molekülen bestimmt werden. Die beiden bei zwei Arten sich unmittelbar ergebenden Gleichungen werden

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{\beta_1}{m_1}\,(\eta - y_1) - \frac{\gamma_1}{m_1}\,y_1 - \frac{\delta_1}{m_1}\,\frac{dy_1}{dt}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{\beta_2}{m_2}\,(\eta - y_2) - \frac{\gamma_2}{m_2}\,y_2 - \frac{\delta_2}{m_2}\,\frac{dy_2}{dt}.$$

Es tritt somit an die Stelle des zweiten Gliedes der Gleichung (1) eine Summe von soviel Gliedern gleicher Form, als verschiedene Moleküle vorhanden sind; an Stelle der Gleichung (2) treten soviele Gleichungen von der Form der Gleichung (2) als Molekülarten; jede einzelne dieser Gleichungen stellt uns die einer der Molekülarten durch die wirksamen Kräfte erteilten Beschleunigungen dar.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich ebenso viele Gleichungen für η, y_1, y_2 .... in denen allen n und k genau denselben Wert hat, in denen aber die Amplituden B_1, B_2 und die Phasen Δ_1 und Δ_2 verschiedene Werte haben. Die Gleichungen sind ganz in derselben Weise zu behandeln, wie wir die Gleichungen für eine Art Moleküle behandelt haben. Bei zwei Arten von Molekülen treten an die Stelle der Gleichungen (4), wie es wohl keiner Entwicklung bedarf, folgende

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{4\pi^2\mu\zeta^2}\,\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2\mu\zeta^2}\left\{\beta_1\,\frac{B_1}{A}\cos\psi_1 + \beta_2\,\frac{B_2}{A}\cos\psi_2\right\}$$

$$2n\varkappa = \frac{\lambda^2}{4\pi^2\mu\zeta^2}\left\{\beta_1\,\frac{B_1}{A}\sin\psi_1 + \beta_2\,\frac{B_2}{A}\sin\psi_2\right\}.$$

Die Quotienten $\frac{B_1}{A}$, $\frac{B_2}{A}$, sowie die Werte ψ_1 und ψ_2 werden durch Gleichungen bestimmt, welche genau die Form der Gleichung (5) haben, man erhält deshalb auch für $\frac{B_1}{A}\cos\psi_1$ etc. Ausdrücke, welche genau denen in (11) und 12) gegebenen gleich sind, wenn wir die in denselben vorkommenden Konstanten β, m, α, λ_m mit dem der betreffenden Molekülart entsprechenden Index versehen. Damit wird

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{4\pi^2\zeta^2\mu}\lambda^2 + \frac{\beta_1^2}{(4\pi^2\zeta^2)^2\mu m_1}\frac{\lambda_{m_1}^2\lambda^4(\lambda^2 - \lambda_{m_1}^2)}{(\lambda^2 - \lambda_{m_1}^2)^2 + \alpha_1^2\lambda^2} + \frac{\beta_2^2}{(4\pi^2\zeta^2)^2\mu m_2}\frac{\lambda_{m_2}^2\lambda^4(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)}{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha_2^2\lambda^2}$$

$$2n\varkappa = \frac{\beta_1^2}{(4\pi^2\zeta^2)^2\mu m_1}\frac{\alpha_1\lambda_{m_1}^2\lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_{m_1}^2)^2 + \alpha_1^2\lambda^2} + \frac{\beta_2}{(4\pi^2\zeta^2)\mu m_2}\frac{\alpha_2\lambda_{m_2}^2\lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha_2^2\lambda^2}.$$

Führen wir auch hier wieder die Zeichen P und Q ein, so ergibt sich weiter unmittelbar, dafs wir für beliebig viele Arten von Molekülen setzen können

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -\Sigma P\lambda^2 + \Sigma Q\frac{\lambda^4(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m)^2 + \alpha^2\lambda^2}$$

$$2n\varkappa = \Sigma Q\frac{\alpha\lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2\lambda^2},$$

wenn das Zeichen Σ bedeutet, dafs wir soviele Glieder mit entsprechenden Werten von P, Q, λ_m und α zu nehmen haben, als im Innern des brechenden Körpers verschiedene Arten von Molekülen vorhanden sind.

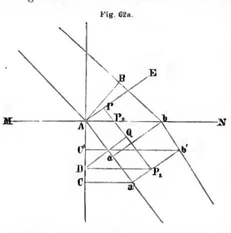
Diese Gleichungen für den Brechungsexponenten zeigen, dafs derselbe mit der Wellenlänge, also der Farbe des Lichtes sich ändern mufs, dafs aber die Abhängigkeit desselben von der Wellenlänge wesentlich bedingt ist von der Beschaffenheit des brechenden Körpers, welche durch die Konstanten P, Q, λ_m und α in unsern Gleichungen Ausdruck findet. Die Konstanten P und Q hängen wesentlich ab von der Wechselwirkung zwischen den Ätherteilchen und den körperlichen Molekülen, deren Mafs in den Gleichungen (1) und (2) von Helmholtz die Gröfse β ist, die Konstante λ_m aufser von dieser hauptsächlich von der Elasticität der körperlichen Moleküle, dem Werte von γ, und die Konstante α wesentlich von der Gröfse der Reibung, welche die Schwingungen der körperlichen Moleküle erfahren. Findet keine Wechselwirkung zwischen dem Äther und den Körperteilchen statt, ist $\beta = 0$, so sind P und Q gleich null, damit auch $\varkappa = 0$ und es wird $n^2 = 1$; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem solchen Körper ist gleich derjenigen im freien Äther, eine Brechung des Lichtes tritt nicht ein. Aufser dem Werte von β ist von wesentlichem Einflufs derjenige von α, dem der Absorptionskoefficient $\varkappa$ proportional ist; je nach dem Werte von $\varkappa$ kann aber der Verlauf der Werte von n mit der Wellenlänge λ ein sehr verschiedener sein. Im grofsen und ganzen, das erkennt man somit schon hier, stellen obige Gleichungen die Abhängigkeit

der Lichtbrechung von der Farbe des Lichtes und der Beschaffenheit der brechenden Körper dar.

Die Helmholtzsche Theorie führt noch zu einer weitern bemerkenswerten Folgerung, dafs nämlich in stark absorbierenden Medien die Brechungsexponenten für ein und dasselbe Medium und ein und dieselbe Lichtart nicht konstant, sondern vom Einfallswinkel abhängig sein müssen[1]).

Unsere bisherigen Rechnungen gelten für senkrechte Incidenz, denn in unsern Gleichungen nahmen wir an, dafs auf alle Punkte der in das zweite Mittel eindringenden Wellenebene die Absorption ganz gleichmäfsig wirke, indem wir die Richtung der Fortpflanzung x mit der Richtung, in welcher auf gleiche Strecken jedesmal derselbe Bruchteil des ankommenden Lichtes absorbiert wird, zusammenfallen liefsen. Trifft dagegen eine Welle schief auf die Grenzfläche zweier Mittel, so haben in der gebrochenen Wellenebene ab Fig. 62a oder $a'b'$ die näher bei a oder a' liegenden Teile eine erheblich stärkere Absorption erfahren als die näher bei b oder b' liegenden, weil die Strecken Aa', welche jene in dem absorbierenden Medium zurückgelegt haben, gröfser sind als die Strecken bb'. Erstere können wir schreiben $\frac{AC}{\cos r}$, letztere $\frac{AC'}{\cos r}$, wenn wir den Winkel, den die Fortpflanzungsrichtung mit dem Einfallslot bildet, r nennen.

Fig. 62a.



Um diesen allgemeinen Fall zu behandeln, müssen wir die Helmholtzsche Gleichung (1) und unsere Gleichungen (I) und (II) etwas umformen. Wir wollen wie bisher die Richtung des Einfallslotes als die Richtung der x bezeichnen und die Schnittlinie der Einfallsebene und der Grenzfläche, also Ab als die Richtung der z. Als den Ausgangspunkt der Bewegung rechnen wir den Punkt A. Nennen wir die Richtung Aa, nach welcher die Bewegung sich fortpflanzt, die Richtung der p, so würde im Falle das Medium, in welchem sie sich fortpflanzt, der freie Äther wäre, die Gleichung der Bewegung

$$\eta = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{p}{\lambda} \right)$$

[1]) Eine Abhängigkeit des Brechungsexponenten vom Einfallswinkel wurde zuerst von *Cauchy* in seiner Theorie der Metallreflexion angenommen; *Beer* in seiner Darstellung der Cauchyschen Theorie der Metallreflexion stellte diese Abhängigkeit schon durch, den sofort zu entwickelnden, ähnliche Gleichungen dar. *Ketteler* leitete auf Grund derselben Theorie die oben gegebenen Gleichungen für diese Abhängigkeit ab; Verhandl. des naturhistorischen Vereins für Rheinland und Westfalen Bd. XXXII. Aus der Dispersionstheorie abgeleitet wurden die Gleichungen von *Wernicke* Monatsber. der Berl. Akad. November 1875.

und die Gleichung (a) des § 22 würde

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{d^2\eta}{dp^2}\,.$$

Wir haben jetzt nur p durch x und z auszudrücken, um die Richtung p zu bestimmen; p ist der senkrechte Abstand der zur Einfallsebene senkrechten Welle vom Punkte A, derselbe ist Aa' oder auch der senkrechte Abstand PP_1 irgend eines Punktes P_1 der Welle von der durch A parallel mit $a'b'$ gelegten Ebene AE. Sind die Koordinaten des Punktes P_1 gleich $x = AD$ und $z = DP_1$, so sieht man unmittelbar, dafs

$$p = PQ + QP_1 = AD\cos r + P_1D\sin r = x\cos r + z\sin r.$$

Setzen wir diesen Wert von p in die Gleichung für η, so wird

$$\eta = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos r + z\sin r}{\lambda}\right).$$

Wie wir wissen ist

$$\frac{d^2\eta}{dp^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{p}{\lambda}\right).$$

Um auch das durch x und z auszudrücken entwickeln wir

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos^2 r\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos r + z\sin r}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin^2 r\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos r + z\sin r}{\lambda}\right)$$

und erhalten durch Addition der beiden Ausdrücke

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos r + z\sin r}{\lambda}\right) = \frac{d^2\eta}{dp^2}.$$

Damit wird die Differentialgleichung der im freien Äther in der Richtung, welche mit x den Winkel r bildet, sich fortpflanzenden Bewegung

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right).$$

Dieser Ausdruck mufs in der Helmholtzschen Gleichung (1) an die Stelle des ersten Gliedes der rechten Seite gesetzt werden, so dafs die Gleichung wird

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right) - \frac{\beta}{\mu}(\eta - y)\;\ldots\;(1a).$$

Die Gleichung (2), in welcher nur η, y und die Differentialquotienten von y nach t vorkommen, bleibt ungeändert.

In den Gleichungen (I) und (II) mufs nun zunächst an die Stelle von $\frac{x}{l}$ gesetzt werden $\frac{x\cos r + z\sin r}{l}$, da die Fortpflanzungsrichtung der betrachteten Welle jetzt die Richtung der p ist.

Die Strecken P_1P_2, welche die einzelnen Teile der Welle in dem zweiten Medium durchlaufen haben, sind für jeden Punkt der Welle das zugehörige x dividiert durch den $\cos r$. Ist A die Amplitude der Schwingung in dem Momente, wo der betreffende Punkt der Welle in das zweite Medium eintritt,

so ist demnach die Amplitude a im Punkte P_1

$$a = A e^{-k\frac{x}{\cos r}}.$$

Setzen wir diesen Wert ein und schreiben gleichzeitig

$$\frac{k}{\cos r} = k_1,$$

so wird Gleichung (I)

$$\eta = A e^{-k_1 x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos r + z \sin r}{l}\right)$$

und ganz entsprechend Gleichung (II) für die Schwingungen der körperlichen Moleküle in demselben Punkte der Welle

$$y = B e^{-k_1 x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos r + z \sin r}{l} - \Delta\right).$$

Setzen wir jetzt sofort

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos r + z \sin r}{l}\right) = \varphi \quad 2\pi\Delta = \psi,$$

so wird zunächst gerade wie vorhin

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} A e^{-k_1 x} \sin \varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} B e^{-k_1 x} \cos(\varphi - \psi); \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} B e^{-k_1 x} \sin(\varphi - \psi).$$

Weiter können wir wohl sofort nach den vorigen Entwicklungen hinschreiben

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = k_1^2 A e^{-k_1 x} \sin \varphi + 2 \frac{2\pi \cos r}{l} k_1 A e^{-k_1 x} \cos \varphi$$

$$- \frac{4\pi^2 \cos^2 r}{l^2} A e^{-k_1 x} \sin \varphi$$

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{4\pi^2 \sin^2 r}{l^2} A e^{-k_1 x} \sin \varphi,$$

denn da in der Exponentialfunktion z nicht vorkommt, so ist dieselbe bei der Bildung des Differentialquotienten nach z als eine konstante Gröfse zu behandeln.

Führen wir dieselben Zeichen ein wie vorhin, schreiben nur entsprechend für $\varkappa$ jetzt $\varkappa_1$, so wird Gleichung (3)

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin \varphi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} (\nu^2 - \varkappa_1^2) \sin \varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} 2\nu\varkappa_1 \cos r \cos \varphi$$

$$- \frac{\beta}{\mu \zeta^2} \left(\sin \varphi - \frac{B}{A} \sin(\varphi - \psi)\right),$$

worin wir an Stelle des Brechungsexponenten n, den wir für die senkrechte Incidenz gesetzt hatten, jetzt das Zeichen ν eingeführt haben. Die Gleichung liefert

$$\nu^2 - \varkappa_1^2 - 1 = -\frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2\mu\zeta^2} + \frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2\mu\zeta^2} \cdot \frac{B}{A} \cos \psi$$

$$2\nu\varkappa_1 \cos r = \frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2\mu^2\zeta^2} \frac{B}{A} \sin \psi.$$

Die rechte Seite der Gleichungen ist identisch mit den frühern, wir können deshalb auch schreiben

$$\nu^2 - \varkappa_1^2 - 1 = n^2 - \varkappa_0^2 - 1$$

$$2\nu\varkappa_1 \cos r = 2n\varkappa_0,$$

wenn n den Brechungsexponenten und $\varkappa_0$ den Absorptionskoefficienten bei senkrechter Incidenz des Lichtes bedeuten. Führen wir jetzt statt $\varkappa_1 = \frac{\varkappa}{\cos r}$ ein, so wird

$$\nu^2 - \frac{\varkappa^2}{\cos^2 r} = n^2 - \varkappa_0^2 \quad \nu\varkappa = n\varkappa_0$$

und man sieht, dafs nicht nur ν, sondern auch $\varkappa$, der Absorptionskoefficient des Lichtes von der Richtung, unter welchem das Licht in das absorbierende Medium eintritt, abhängig ist.

Ist der zum Winkel r, unter welchem das Licht sich in dem Medium fortpflanzt, zugehörige Einfallswinkel i, so ist

$$\nu = \frac{\sin i}{\sin r}$$

$$\cos^2 r = \frac{1}{\nu^2}(\nu^2 - \sin^2 i).$$

Setzen wir diesen Wert für $\cos r$ in die erste der beiden Gleichungen, so wird

$$\nu^2 - \frac{\nu^2\varkappa^2}{\nu^2 - \sin^2 i} = n^2 - \varkappa_0^2 = \nu^2 - \frac{n^2\varkappa_0^2}{\nu^2 - \sin^2 i},$$

eine Gleichung, welche nach ν^2 aufgelöst liefert

$$2\nu^2 = n^2 - \varkappa_0^2 + \sin^2 i + \sqrt{4n^2\varkappa_0^2 + (n^2 - \varkappa_0^2 - \sin^2 i)^2}.$$

Den Wert von $\varkappa$ berechnet man am besten mit Hülfe des so berechneten Wertes von ν aus der Gleichung

$$\varkappa = \frac{n\varkappa_0}{\nu}.$$

Findet in dem zweiten Medium keine Absorption statt, so dass $\varkappa_0 = 0$ ist, so wird

$$2\nu^2 = n^2 + \sin^2 i + \sqrt{(n^2 - \sin^2 i)^2} = 2n^2$$

oder der Brechungsexponent ist von dem Einfallswinkel unabhängig.

Eine ins einzelne gehende Prüfung der aus der Helmholtzschen Theorie sich ergebenden Beziehungen für die Brechungsexponenten werden wir vornehmen, wenn wir genaue Messungen der Brechungsexponenten erhalten haben, nur wollen wir hier schon bemerken, dafs in den selbst stark absorbierenden aber noch durchsichtigen Medien die Abhängigkeit der Brechungsexponenten vom Einfallswinkel noch nicht zu erkennen ist. Erst im nächsten Abschnitt, bei Besprechung der Reflexion des Lichtes an Metallen, werden wir eine solche Abhängigkeit der Brechungsexponenten vom Einfallswinkel finden.

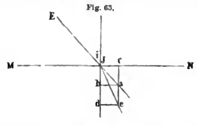
§ 24.

Erklärung der Brechung und Dispersion des Lichtes nach der Emissionshypothese. Die andere Vorstellung über das Wesen des Lichtes, die Emissionshypothese, leitet ebenfalls die Gesetze der Brechung und Dispersion des Lichtes theoretisch ab. Nach den Annahmen der Theorie über die Wechselwirkung zwischen den Lichtteilchen und den Molekülen der wägbaren Körper ist die von den letztern ausgehende Kraft abwechselnd eine anziehende, abwechselnd eine abstofsende. Die nächste, die Moleküle umgebende Schicht ist nach derselben aber jedenfalls anziehend bis zur Berührung, auf diese folgt dann nach aufsen eine abstofsende Schicht. Die Lichtteilchen eines Strahles befinden sich in periodisch wechselnden Zuständen, den Anwandlungen des leichtern Zurückgeworfenwerdens und des leichtern Durchgehens. Die Teilchen eines Strahles, welche sich in dem erstern Zustande befinden, können, wenn sie an der Grenzfläche zweier Mittel anlangen, die Schicht der zurückstofsenden Kräfte nicht durchdringen, sie werden, wie wir sahen zurückgeworfen; diejenigen aber, welche in der Anwandlung des leichtern Durchgehens an der Grenzfläche ankommen, durchdringen den Raum, in welchem die Kräfte nur zurückwerfende sind, und werden von den Molekülen des zweiten Mittels angezogen.

In der Grenze wirken dann zwei Kräfte auf die Bewegung des Teilchens ein; diejenige, welche es in das erste Mittel zurückzieht, und diejenige, welche es in das zweite Mittel hineinzieht.

Da nun auch hier wie bei der Reflexion alle Moleküle in ganz gleicher Weise auf das Lichtteilchen einwirken, so folgt, dafs die Resultierende sämtlicher Anziehungen jedenfalls senkrecht gegen die als eben anzusehende Grenzfläche des Mittels gerichtet ist; es kann daher durch diese Kräfte nur die senkrecht gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit des Lichtteilchens geändert werden. Daraus folgt zunächst, dafs das Lichtteilchen im zweiten Mittel sich ebenfalls in der Einfallsebene bewegen mufs.

Ferner hat diese senkrecht gegen die Grenzfläche gerichtete auf das Lichtteilchen wirkende Kraft nur so weit, als die Wirkungssphäre der Moleküle reicht, eine nach der einen oder andern Seite gerichtete Resultierende, innerhalb jeden Mittels sind die Anziehungen nach allen Seiten genau gleich; es kann daher nur an der Grenze eine Änderung der gegen die Grenzfläche senkrechten Komponente der Geschwindigkeit eintreten, innerhalb des zweiten Mittels mufs das Lichtteilchen sich ebenso mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen, wie innerhalb des ersten Mittels.



Kommt (Fig. 63) in der Richtung EJ ein Lichtteilchen in der Anwandlung des leichtern Durchgehens an der Grenzfläche MN zweier Mittel an, so können wir seine Geschwindigkeit, welche durch die Länge Ja gemessen werde, in zwei zu einander senkrechte Komponenten

$$ba = x$$
$$Jb = y$$

zerlegen, und erhalten

$$c^2 = x^2 + y^2.$$

Durch die nach entgegengesetzten Seiten in der Grenzfläche MN auf das Lichtteilchen wirkenden anziehenden Kräfte des ersten und des zweiten Mittels wird, wie wir sahen, nur die gegen die Fläche senkrechte Komponente der Geschwindigkeit geändert. Werde dieselhe anstatt $Jb = y$

$$Jd = ky,$$

worin k gröfser oder kleiner als 1 sein kann, je nachdem die Anziehung des zweiten oder ersten Mittels gröfser ist, so wird die Geschwindigkeit im zweiten Mittel bestimmt durch das Rechteck $Jdec$, in welchem Jd die jetzt stattfindende gegen die Fläche MN senkrechte und Jc die der Fläche parallele Komponente der Geschwindigkeit darstellt. Die Geschwindigkeit im zweiten Mittel c' wird dadurch

$$c'^2 = x^2 + k^2y^2.$$

Dafür können wir setzen

$$c'^2 = x^2 + y^2 + (k^2 - 1)y^2.$$

Die Emissionshypothese macht dann die mechanisch durchaus nicht geforderte und deshalb strenge genommen rein willkürliche Annahme, dafs die Geschwindigkeit in dem zweiten Mittel nur von der Natur desselben, nicht von der Richtung abhängig sei, in welcher das Licht in das zweite Mittel eindringt. Sie setzt deshalb $(k^2 - 1)y^2 = mc^2$, worin m eine nur von der Natur des Mittels abhängige Konstante sein soll.

Daraus folgt

$$c'^2 = c^2(1 + m)$$

$$c' = c\sqrt{(1 + m)} = n \cdot c,$$

indem wir die Konstante $\sqrt{1 + m} = n$ setzen. Daraus erhalten wir weiter

$$\frac{c'}{c} = n,$$

das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten ist ein konstantes. Nennen wir den dem Einfallswinkel gleichen Winkel $aJb = i$, und den Winkel, welchen der gebrochene Lichtstrahl mit dem Einfallslote macht, $dJe = r$, so haben wir zur Bestimmung der Richtung des gebrochenen Lichtstrahls

$$\frac{ab}{aJ} = \sin i; \quad \frac{de}{eJ} = \sin r.$$

Nun ist aber $ab = de = x$

$$aJ = c, \quad eJ = c',$$

demnach

$$\frac{x}{c} = \sin i, \quad \frac{x}{c'} = \sin r,$$

und daraus

$$\frac{x}{c} : \frac{x}{c'} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

$$n = \frac{c'}{c} = \frac{\sin i}{\sin r},$$

oder das konstante Verhältnis der Geschwindigkeiten ist auch das der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, oder der Sinus des Winkels, den der Lichtstrahl im ersten Mittel mit dem Einfallslote bildet, verhält sich zum Sinus des Winkels, den Strahl und Einfallslot im zweiten Mittel einschliefsen, wie die Geschwindigkeit des Lichtes im zweiten Mittel zu derjenigen im ersten Mittel. Das Verhältnis dieser Sinus, das wir den Brechungsexponenten nannten, ist somit für ein und dasselbe Mittel konstant, welches auch der Wert des Einfallswinkels ist.

Die beiden ersten Gesetze der Lichtbrechung folgen also aus den Annahmen der Emissionshypothese unmittelbar[1]).

Ist die Geschwindigkeit im zweiten Mittel gröfser als im ersten, so ist n gröfser als 1, $i > r$. Der Strahl wird durch die Brechung also dem Einfallslote genähert. Solche Mittel nannten wir vorhin optisch dichtere; es folgt demnach, dafs das Licht in dichtern Mitteln sich rascher bewegt als in dünnern.

Die Gröfse m, welche uns die Änderung des Quadrates der Geschwindigkeit angibt, welche das Lichtteilchen infolge der anziehenden Wirkung der ponderabeln Moleküle erfährt, kann uns ein Mafs dieser Kräfte abgeben. Bezeichnet c die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume, so ist m ein Mafs der von dem brechenden Mittel auf das Lichtteilchen ausgeübten Anziehung. Newton nannte daher die Gröfse m unter dieser Voraussetzung die brechende Kraft des Mittels. Bezeichnet ebenso n den absoluten Brechungsexponenten des Mittels, so ist

$$n = \sqrt{m + 1}$$

$$n^2 - 1 = m,$$

oder das um 1 verminderte Quadrat des absoluten Brechungsexponenten ist das Mafs für die brechende Kraft eines Mittels. Ist c nicht die Geschwindigkeit im leeren Raume, sondern in irgend einem Mittel, so ist m der positive oder negative Zuwachs des Quadrates der Geschwindigkeit des Lichtes beim Übergange desselben aus dem ersten Mittel in das zweite, also das Mafs für die Differenz der anziehenden Kräfte beider Mittel auf das Licht. Es kann daher als die relative brechende Kraft des zweiten Mittels in Bezug auf das erste bezeichnet werden. Bezeichnet dann n den relativen Brechungsexponenten für diese beiden Mittel, so ist $n^2 - 1$ das Mafs für die relative brechende Kraft.

Nimmt man an, dafs die brechende Kraft eines Mittels zunimmt mit der Dichtigkeit eines Mittels, so wird, wenn d die Dichtigkeit des Mittels bezeichnet,

$$\frac{n^2 - 1}{d}$$

die brechende Kraft für ein Mittel derselben Natur sein, welches die Dichtigkeit 1 besitzt; Newton nennt diesen Quotienten daher das specifische Brechungsvermögen der betreffenden Substanz.

Um die verschiedene Brechbarkeit des verschiedenfarbigen Lichtes zu

[1]) *Newton*, Philosophiae naturalis Principia mathematica. Liber I, prop. 94 bis 96. *Herschel*, On Light III, § I. art. 528 ff.

erklären, nimmt die Emissionstheorie teils an, dafs die den einzelnen Farben entsprechenden Lichtteilchen eine verschiedene Masse besitzen, teils dafs die Anziehungskraft, welche die Moleküle der ponderabeln Körper auf die Lichtteilchen ausüben, eine verschiedene sei. Die roten Lichtteilchen sollen an Masse die gröfsten sein, kleiner die Masse der gelben, grünen, am kleinsten diejenige der violett färbenden Lichtteilchen. Es folgt dann aus den Gesetzen der Mechanik, dafs bei gleicher brechender Kraft die Ablenkung der gröfseren Masse aus ihrer Bahn die kleinere sein mufs, dafs der Geschwindigkeitszuwachs und somit der Brechungsexponent für das violette Licht gröfser sein mufs als für das rote.

Die Verschiedenheit der anziehenden zwischen den Molekülen der Körper und des Lichtes thätigen Kräfte mufste die Emissionstheorie deshalb annehmen, um gewisse Verschiedenheiten in dem Spektrum der verschiedenen Substanzen, die wir demnächst genauer zu betrachten haben werden, zu erklären. Es sind das die verschiedenen Ausdehnungen der einzelnen Farben in Spektren gleicher Länge, welche durch Prismen verschiedener Substanzen hervorgebracht werden und die verschiedene Länge der Spektren bei gleicher, die gleiche Länge der Spektren bei verschiedener Ablenkung einer, z. B. der roten, Strahlengattung. Man sieht, wäre nur die Verschiedenheit der Masse der Lichtteilchen der Grund der Dispersion, so müfsten, wenn durch zwei Prismen eine Strahlengattung in gleicher Weise abgelenkt würde, auch alle übrigen ganz gleich abgelenkt werden, oder die Spectra müfsten bei gleicher Ablenkung der roten Strahlen gleiche, bei verschiedener verschiedene Länge haben.

§ 25.

Vergleich beider Theorien. Foucaults Versuch. Sowohl die Undulationstheorie als die Emissionstheorie erklären somit die Brechung und Dispersion des Lichtes ziemlich gleich vollständig, wenn sich auch nicht leugnen läfst, dafs die Undulationstheorie auch hier wieder den Vorzug vor der Emissionstheorie hat, dafs sie zur Erklärung der Dispersion nur einer konsequenten Durchführung der Theorie bedarf, während die Emissionstheorie wieder eine neue Hypothese erfordert, die Verschiedenheit der anziehenden zwischen den Lichtteilchen und den Körpermolekülen thätigen Kräfte je nach Art der Lichtteilchen. Ferner liefert uns die Undulationstheorie einen mathematischen Ausdruck für die Dispersion, der uns, wenn wir die Brechungsexponenten für die verschiedenen Lichtarten und deren Wellenlängen bestimmt haben, eine Prüfung der Theorie gestattet, die Emissionshypothese kann aber nur qualitativ über die Dispersion Aufschlufs geben.

Wir haben indes in der Ableitung des Brechungsgesetzes noch ein anderes und zwar entscheidendes Mittel, um die Haltbarkeit der beiden Theorien zu prüfen. Beide Theorien liefern zwar den Ausdruck

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Nach der einen, der Wellentheorie, ist aber

$$n = \frac{c}{c'},$$

nach der Emissionstheorie dagegen

$$n = \frac{c'}{c},$$

wenn c die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Mittel bedeutet, in welchem das Licht mit dem Einfallslote den Winkel i bildet, c' in dem, in welchem Lichtstrahl und Einfallslot den Winkel r einschliefsen. Ist i gröfser wie r, so mufs nach der Undulationstheorie, da dann $n > 1$ ist, die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten Mittel die gröfsere sein; nach der Emissionstheorie dagegen im zweiten Mittel, und zwar ist nach der letztern das Geschwindigkeitsverhältnis der reciproke Wert von dem Verhältnis, wie es nach ersterer bestehen mufs.

Läfst man einen Lichtstrahl aus Luft in Wasser eintreten, so ergeben die Versuche

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{4}{3}.$$

Nach der Undulationstheorie ist demnach

$$\frac{c}{c'} = \frac{4}{3},$$

nach der Emissionstheorie ist dagegen c' die gröfsere und zwar

$$\frac{c}{c'} = \frac{3}{4},$$

nach der ersten ist die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser $\frac{3}{4}$, nach der zweiten $\frac{4}{3}$ von derjenigen in der Luft.

Foucault hat diese Forderungen experimentell geprüft, das Resultat seiner Versuche bestätigt die Forderungen der Undulationstheorie[1]. Die von ihm angewandte Methode ist die bereits § 4 beschriebene mit ganz geringen Abänderungen; er liefs durch eine kleine quadratische Öffnung von 2^{mm} Seite aa (Fig. 64), in deren Mitte ein feiner Platindraht m ausgespannt war, mittels eines Heliostaten ein Bündel Lichtstrahlen in ein dunkles Zimmer horizontal eintreten. Die Strahlen fielen dann auf das Objektiv eines Fernrohres F, dessen optische Axe den eintretenden Strahlen parallel war; jenseits des Fernrohres F war ein kleiner kreisförmiger Spiegel S vertikal aufgestellt, dessen Centrum in der Verlängerung der Fernrohraxe lag, welcher also von den durch die Öffnung dringenden Strahlen, nachdem sie das Fernrohr durchsetzt haben, getroffen wird. Auf beiden Seiten von dem Spiegel S ist ein sphärischer Hohlspiegel so angebracht, dafs der Krümmungsmittelpunkt in dem Centrum des Spiegels liegt und dafs die Hauptaxen der Spiegel mit den eintretenden Strahlen in einer Ebene liegen. Die Entfernung des Objektives F von dem Drahte m beträgt etwas weniger als die doppelte Brennweite der Linse, und der Abstand FS des Objektivs vom Spiegel plus dem Abstande des Hohlspiegels von dem Spiegelchen S ist so gewählt, dafs gerade in der Spiegelfläche des Spiegels HH das reelle durch die Linse erzeugte Bild des Drahtes m entsteht, wenn der um eine vertikale Axe drehbare Spiegel so steht, dafs die in der Richtung FS an-

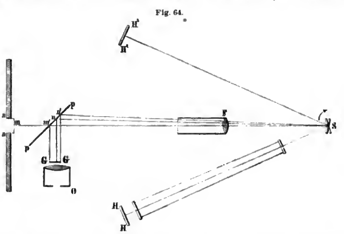
[1]) *Foucault*, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XLI. Berliner Berichte (herausgegeb. v. d. physik. Gesellschaft). Bd. X. 1854.

kommenden Strahlen von S nach HH oder $H'H'$ reflektiert werden. Zu dem Ende mufs, wie in einem der nächsten Paragraphen nachgewiesen wird, der Abstand $HS + SF$ etwas gröfser sein wie mF.

Die Anordnung unterscheidet sich von der im § 4 beschriebenen nur durch eine etwas andere Stellung der Linse F und dadurch, dafs anstatt fünf Hohlspiegel an jeder Seite des Spiegels nur einer benutzt wird. Da aber dieser Hohlspiegel so steht, dafs sein Krümmungsmittelpunkt in den Spiegel S fällt, somit die das reelle Bild in der Spiegelfläche bildenden Strahlen parallel der Axe einfallen, so kehren die Strahlen in derselben Richtung zum Spiegel S zurück und von dort durch die Linse nach m, wo dann ein reelles Bild des Bildes auf dem Hohlspiegel, also ein reelles Bild des Drahtes m erscheint.

Dieses Bild deckt auch hier den Draht m; um es beobachten zu können stellt Foucault auch hier die Glasplatte pp unter einem Winkel von 45^0 geneigt auf, so dafs die partiell reflektierten Strahlen auf der geteilten Glasplatte ein Bild α erzeugen, welches ebenso weit vor pp liegt als m hinter demselben. Dieses Bild wird durch eine Lupe beobachtet.

Fig. 64.



Versetzt man den auf einer Luftturbine, wie im § 4, befestigten Spiegel in rasche Rotation, so nimmt man auch hier eine Verschiebung des Bildes wahr, und zwar erscheinen, wenn die beiden Spiegel HH und $H'H'$ gleichweit von S entfernt sind und zwischen S und den Hohlspiegeln sich nur Luft befindet, die von den beiden Hohlspiegeln erzeugten Bilder um gleich viel verschoben, so dafs auch jetzt nur ein verschobenes Bild entsteht. Man beobachtet diese Verschiebung auf der Glasplatte GG, indem auf dieser das Bild ebenso verschoben wird als das bei m erzeugte.

Die Gröfse dieser Verschiebung läfst sich durch eine der im § 4 mitgeteilten ganz ähnliche Gleichung wiedergeben, es ergibt sich aus derselben, dafs wir die Verschiebung in ihrer Abhängigkeit von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes schreiben können

$$d = \frac{8 n \pi \cdot r \cdot l}{c},$$

wenn wir mit r den Abstand des Spiegels vom Punkte m, mit l den Abstand der Hohlspiegel vom Spiegel S und mit n die Anzahl der Umdrehungen des Spiegels in der Sekunde bezeichnen.

Die Verschiebung ist somit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes umgekehrt proportional.

Bringen wir nun zwischen S und die Hohlspiegel ein anderes Mittel als Luft, z. B. eine mit Wasser gefüllte Röhre, so daſs das Licht den Weg $2SH$ anstatt in Luft in Wasser zurücklegen muſs, so muſs die Verschiebung d bei gleicher Geschwindigkeit n des Spiegels kleiner werden, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser gröſser, gröſser jedoch, wenn die Geschwindigkeit im Wasser kleiner ist als in Luft.

Bringen wir anstatt vor beide Hohlspiegel nur vor einem derselben HH eine mit Wasser gefüllte Röhre an, so müssen in dem Fernrohr O statt eines Bildes zwei erscheinen, indem das durch den Spiegel, vor welchem das Wasser sich befindet, erzeugte Bild jetzt mehr oder weniger verschoben werden muſs als das von dem andern Spiegel erzeugte Bild. Da nun im übrigen alle Verhältnisse genau die gleichen sind, so haben wir für die Verschiebung des „Luftbildes", wenn c die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft bedeutet,

$$d = \frac{8 n \pi r l}{c} = \frac{b}{c},$$

für die Verschiebung des „Wasserbildes" dagegen, wenn c' die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser ist,

$$d' = \frac{b}{c'},$$

und somit die Proportion

$$c : c' = d' : d.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Luft und Wasser verhalten sich umgekehrt, wie die beobachteten Ablenkungen des Bildes.

Nach der Emissionstheorie müſste demnach

$$d : d' = 4 : 3,$$

nach der Undulationstheorie dagegen

$$d : d' = 3 : 4$$

sein.

Das Wasserbild ist von dem Luftbild sehr leicht zu unterscheiden durch seine geringere Helligkeit sowohl als durch seine grünliche Farbe.

Die Beobachtung zeigt, daſs das Wasserbild weiter seitlich verschoben ist als das Luftbild, und zwar wie die Undulationstheorie es verlangt, nahezu im Verhältnis von 4 : 3. Foucaults Messungen ergaben bei einem Abstande der Hohlspiegel von dem Planspiegel gleich 3^{m}, einem Abstande des Objektivs F von dem Drahte gleich 4^{m} und von dem Planspiegel gleich $1^{m},18$, ferner bei 500 Umdrehungen des Spiegels in der Sekunde

$$d' = 0^{mm},469, \quad d = 0^{mm},375,$$

Zahlen, welche besonders unter Beachtung, daſs der Raum zwischen S und H nicht vollständig mit Wasser angefüllt sein kann, so vollkommen den Forderungen der Undulationstheorie entsprechen, daſs sie als der direkteste

Beweis für ihre Zulässigkeit und für die Unhaltbarkeit der Emissionstheorie angesehen werden müssen. Ein Blick in Foucaults Fernrohr zeigt also dem Beobachter durch die stärkere Verschiebung des Wasserbildes buchstäblich die Überlegenheit der Undulationstheorie über die Emissionstheorie und Foucault kann mit Recht am Schlusse seiner Abhandlung sagen: „Der letzte Schlufs, den ich aus meinem Versuche ziehe, ist demnach der Beweis, dafs die Emissionshypothese mit den Lichterscheinungen nicht im Einklange steht.“

Wir werden daher den Versuchen der Anhänger der Emissionstheorie, die Erscheinungen des Lichtes zu erklären, nicht weiter zu folgen haben, und im weitern Verlaufe unserer Darstellung nur die Fragen uns vorlegen: kann die Undulationstheorie alle Erscheinungen, welche wir beim Lichte beobachten, erklären, und zeigen sich alle Folgerungen, welche wir aus dem einen obersten Satze, dafs das Licht eine Wellenbewegung des Äthers sei, in der Erfahrung bestätigt?

§ 26.

Darstellung eines reinen Spektrums. Fraunhofersche Linien. Da das verschiedenfarbige Licht eine verschiedene Brechbarkeit besitzt, so ist es zur Untersuchung der Brechungsverhältnisse vor allem notwendig, sich ganz homogenes einfarbiges Licht zu verschaffen. Ein nach unserm bisher angenommenen Verfahren hergestelltes Spektrum ist keineswegs rein, das heifst, seine einzelnen Stellen liefern kein homogenes Licht. Um es dahin zu bringen, ist zunächst erforderlich, dafs die zur brechenden Kante senkrechte Ausdehnung des Strahlenbündels möglichst klein sei, so dafs die Breite des Bündels derjenigen eines Strahles, also einer physischen Linie sich annähere.

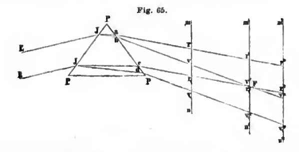
Denn nach dem Vorigen besteht das Spektrum aus den wegen der verschiedenen Brechbarkeit des farbigen Lichtes nach verschiedenen Richtungen austretenden verschiedenen Strahlen; diese Strahlen divergieren erst von ihrer Eintrittsstelle in das Prisma an, und zwar in der Einfallsebene, welche zur brechenden Kante des Prismas senkrecht ist. Ist nun jedes der farbigen Strahlenbündel, welches genau die Breite der Öffnung hat, von bedeutender Breite, so kann nahe hinter dem Prisma die Divergenz der Bündel noch nicht so grofs sein, dafs die verschiedenen Farben ganz auseinanderfallen. Ist z. B. $EEJJ$ ein breites Strahlenbündel, welches auf das Prisma PPP fällt, so werden die roten Strahlen in der Richtung $arr'r''cr_,r'_,r''_,$ austreten, die violetten dagegen in $bvv'v''dv_,v'_,v''_,$. Auf einem in die austretenden Strahlen gehaltenen Schirme mn wird dann der Raum $vr_,$ noch Licht von allen Farben enthalten, er wird ganz weifs sein und nur die Ränder rv und $r_,v_,$ sind gefärbt, aber nur an ihren äufsersten Grenzen homogen, da zunächst oberhalb v alle Farben aufser violett enthalten sind und erst gegen r hin eine Farbe nach der andern verschwindet. Durch weitere Entfernung von dem Prisma können die Farben auf dem Schirme weiter auseinander gelegt werden, da die Breite der Strahlenbündel an allen Stellen dieselbe und zwar die des einfallenden Bündels ist. Auf dem Schirme $m'n'$ erhält nur der Punkt F Licht aller Farben, und auf dem noch weiter entfernten Schirme $m''n''$ wird kein Punkt mehr von allen

Strahlen getroffen. In dem Raume $r''v''$ mischen sich aber noch alle übrigen Strahlen aufser violett und rot, und erst durch noch weiteres Entfernen des Schirmes fallen auch die übrigen farbigen Strahlen neben einander. Dasselbe nun, was wir durch eine sehr weite Entfernung des Schirmes bekommen, erreichen wir in viel bequemerer Weise durch ein Verkleinern der Öffnung.

Aber, wenn wir mit den durch einen Heliostaten in das Zimmer geleiteten Strahlen der Sonne unsere Versuche anstellen, so genügt es nicht, die der brechenden Kante senkrechte Ausdehnung der Öffnung sehr klein zu machen, da dann immer wegen der Ausdehnung der Sonnenscheibe das eintretende Strahlenbündel eine ziemliche Breite hat, die um so gröfser ist, je weiter von der Öffnung wir das Prisma aufstellen.

Man kann nun ein doppeltes Verfahren anwenden, um ein schmales scharf begrenztes Lichtbündel und damit ein reines Spektrum zu erhalten. In den Laden des Fensters macht man zunächst einen schmalen Spalt. In das durch denselben eintretende divergierende Lichtbündel stellt man dann in einiger Entfernung von der Öffnung einen zweiten Schirm, in welchem

Fig. 65.



sich dem ersten Spalte parallel ein zweiter ebensolcher Spalt befindet. Von dem durch den ersten Spalt dringenden divergierenden Strahlenbündel geht dann durch dem zweiten Spalt nur ein sehr schmaler Teil, und stellt man hinter den zweiten Spalt das Prisma auf, so erhält man in passender Entfernung auf einem Schirme ein reines Spektrum. Indes hat dieses Verfahren den Nachteil, dafs das Spektrum ziemlich lichtschwach ist.

Besser ist daher folgendes Verfahren, welches auf der Eigenschaft der Linsen beruht, von leuchtenden Punkten oder Gegenständen, welche Lichtstrahlen auf dieselben senden, in bestimmten Entfernungen von der Linse ein scharfes Bild zu entwerfen.

Wie wir im § 17 nachgewiesen haben, treten die Strahlen gleicher Brechbarkeit, welche von einer der brechenden Kante parallelen Linie herkommen, so aus einem Prisma hervor, als kämen sie von einer an derselben Seite des Prismas liegenden Linie her, welche von der Austrittsstelle der mittleren Strahlen aus gesehen um einen Winkel δ verschoben ist, wenn

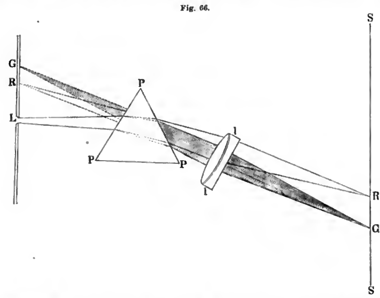
$$\delta = i + i' - \alpha,$$

worin i den Einfalls-, i' den Austrittswinkel der mittlern Strahlen und α den brechenden Winkel des Prismas bedeutet. Für die von ein und derselben Lichtlinie ausgehenden Strahlen verschiedener Brechbarkeit ist

der Winkel i' ein verschiedener; daraus folgt, dafs die von den verschieden brechbaren Strahlen entworfenen virtuellen Bilder nicht zusammen, sondern neben einander fallen, das rote liegt am nächsten bei der leuchtenden Linie, das violette ist am weitesten entfernt.

Bringen wir nun, wie in Fig. 66, sehr nahe hinter das Prisma eine achromatische Linse, so erzeugt diese, wie später nachgewiesen wird, in einer bestimmten Entfernnng hinter der Linse auf der Verbindungslinie des

Fig. 66.



betreffenden virtuellen Bildes mit dem Mittelpunkte der Linse ein reelles Bild jenes virtuellen Bildes, in dem alle Strahlen gleicher Brechbarkeit vereinigt sind. Da die verschieden gefärbten virtuellen Bilder der Lichtlinie neben einander fallen, so thun es auch die reellen Bilder auf einem Schirme, den wir an der Stelle aufstellen, wo die reellen Bilder entworfen werden. Es versteht sich von selbst, dafs wir auch hier nur eine sehr schmale Lichtlinie nehmen dürfen; denn ist dieselbe breit, so fallen auch die Bilder R und G und damit auch R_1 und G_1, deren Abstand durch die Differenz der Ablenkungen δ gegeben ist, nicht ganz neben, sondern noch teilweise über einander.

Will man so ein Spektrum objektiv auf einem Schirm entwerfen, so wendet man am besten eine Linse von 1^m Brennweite an, welche man in etwa 2^m Abstand von dem Spalte L unmittelbar hinter das Prisma stellt, während man dem Prisma eine solche Stellung gibt, dafs die mittlern Strahlen des Spektrums das Minimum der Ablenkung erhalten. Der Schirm SS mufs dann ebenfalls in etwa 2^m Entfernung von der Linse aufgestellt werden..

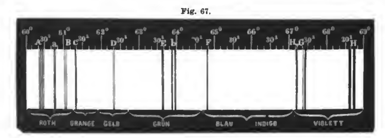
Erzeugt man so das Spektrum auf einem Schirme SS, so erscheint dasselbe als ein langes Farbenband, dessen Breite gleich ist der Länge der

Spaltöffnung und dessen Länge abhängig ist von dem brechenden Winkel und der Substanz des Prismas. Ausgezeichnet lange Spektra erzeugen die Prismen von 60° brechendem Winkel aus dem schwersten Flintglase des optischen Instituts von Merz in München. Eine Abbildung des Spektrums liefert Tafel I.

Bei einer oberflächlichen Betrachtung des Spektrums scheint dasselbe ganz stetig gefärbt zu sein und die Farben ganz allmählich in einander überzufliefsen. Eine genauere Betrachtung schon mit freiem Auge zeigt indes, dafs das keineswegs der Fall ist, dafs vielmehr völlig dunkle Streifen von geringerer oder gröfserer Breite das Spektrum der Quere nach, senkrecht zu seiner Längsausdehnung durchsetzen. Diese Streifen sind ganz unregelmäfsig im Spektrum verteilt, sie kommen in allen Farben vor.

Fig. 67 zeigt die Streifen, welche es gelingt mit freien Augen in einem Spektrum zu erkennen, welches mit dem erwähnten Prisma aus Flintglas in

Fig. 67.



der beschriebenen Weise auf einen Schirm geworfen wird. Die an dem Spektrum hingeschriebenen Zahlen geben die relative Lage der dunklen Linien an, dieselben bedeuten die Ablenkungen in Graden und Minuten, welche die Linien bei dem Minimum der Ablenkung in dem Merzschen Prisma von 60° brechendem Winkel erfahren. Leicht gelingt es mit freien Augen den Streifen *C* im Roten, *D* im Gelben, ungefähr an der Grenze von gelb und orange, *E* und *b* im Grünen, *G* im Blauen und die gezeichneten Streifen im Violett zu erkennen; unter günstigen Umständen sind auch *F* im Grünblauen und noch eine Menge anderer Streifen zu sehen.

Die Streifen liegen immer in demselben Teile des Spektrums, und behalten immer ihre gegenseitige Lage bei, wann und wo auch das Spektrum untersucht wird, vorausgesetzt nur, dafs man Sonnenlicht, direktes oder das von dem Himmel, weifsen Wolken oder den Planeten reflektierte anwendet. Die Streifen beweisen somit, dafs in dem von der Sonne zu uns gelangenden Lichte nicht Strahlen aller möglichen Brechbarkeit innerhalb der Grenzen des Spektrums vorhanden sind, dafs vielmehr Strahlen gewisser Brechbarkeit vollständig fehlen.

Die erwähnten dunklen Streifen im Sonnenspektrum wurden zuerst von Wollaston entdeckt und beschrieben[1]), später aber ebenfalls von Fraunhofer selbständig aufgefunden, der durch helle Streifen, die er im Spektrum

[1]) *Wollaston*, Philosophical Transactions for the year 1802.

des Lampenlichtes beobachtet hatte, veranlafst wurde, das Sonnenspektrum nach ähnlichen Erscheinungen zu untersuchen[1]).

Die Untersuchungsmethode Fraunhofers war etwas anders als die eben erwähnte. Er beobachtete das Spektrum mit einem Fernrohr. Ebenso nämlich, wie man die das Prisma verlassenden Strahlen auf einer Linse auffangen kann, welche auf einem Schirme ein reelles Bild entwirft, so kann man sie auch auf das Objektiv eines Fernrohrs fallen lassen und dann das im Brennpunkte des Objektives erzeugte reelle Bild durch das Okular des Fernrohrs betrachten. Fraunhofer liefs zu dem Ende die durch eine schmale Öffnung in ein verfinstertes Zimmer horizontal eintretenden Sonnenstrahlen auf ein Prisma von Flintglas mit vertikaler brechender Kante fallen, welches vor dem Fernrohr eines Theodolithen und mit demselben fest verbunden aufgestellt war (Fig. 68). Der Theodolith war in möglichst grosser Entfernung von der Spaltöffnung (5 Meter) aufgestellt und zwar so, dafs durch das Fernrohr der Spalt scharf begrenzt gesehen wurde, wenn das Prisma nicht vorgestellt war. Das Prisma war auf der Mitte einer drehbaren Scheibe befestigt, und wurde so gestellt, dafs die durch dasselbe tretenden Strahlen das Minimum der Ablenkung erfuhren; das Theodolithfernrohr wurde dann so gedreht, dafs die aus der zweiten Fläche des Prisma austretenden Strahlen in der Axe des Fernrohrs sich fortpflanzten. Auf diese Weise kann man zwar immer nur einen Teil des Spektrums übersehen, diesen aber um so schärfer. Um nach und nach die verschiedenen Teile zu betrachten, genügt eine kleine Drehung des Fernrohrs oder des Prismas.

Fig. 68.



Auf diese Weise betrachtet, bot das Spektrum Fraunhofer eine sehr grofse Zahl, weit über 500 dunkele Linien dar, welche teils schärfer, teils schmaler, teils breiter über das ganze Spektrum unregelmäfsig verteilt sind.

Die Wichtigkeit dieser Linien für die Lehre von der Lichtbrechung erkennend, da wir nur mit Hülfe dieser imstande sind, Licht von bestimmter Brechbarkeit zu erhalten, suchte Fraunhofer einige leicht erkennbare Streifen zu bestimmen und bezeichnete sie von dem Roten zum Violetten hin mit *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Diese Streifen sind in Fig. 61 in ihrer relativen Lage nebst einigen andern auffallenden Streifen dargestellt. Im roten Teile des Spektrums liegen die Streifen *A* und *B*, und an der Grenze gegen

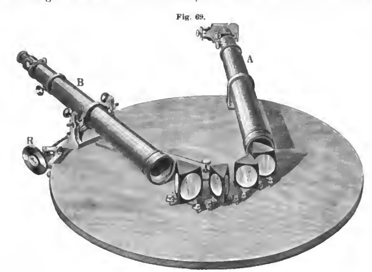
[1]) *Fraunhofer,* Denkschriften der Münchner Akademie. Bd. V für die Jahre 1814 und 1815. Auch Gilberts Annalen Bd. LVI.

Orange *C*. *A* ist ein einfacher, ziemlich breiter Streifen. *B* besteht aus einem Paar, dessen nach *A* gewandter Streifen der feinere ist. Zwischen *A* und *B*, näher bei *A* als bei *B*, liegt eine ziemlich breite Gruppe von Streifen *a*. *C* ist ein einfacher schwarzer Streifen. *D* an der Grenze von Gelb und Orange eine feine Doppellinie; *E* ist eine Gruppe von Streifen im Grünen, nahe bei ihm, ebenfalls noch im Grünen, liegt die Gruppe *b*. *F* im Grünblauen ist ein einfacher dunkler Streifen, während *G* im Tiefblauen, nahe der Grenze des Violett und *H* im Violetten ziemlich breite Streifengruppen sind.

Eine weit genauere Kenntnis des Spektrums verdanken wir Kirchhoff[1]), der nach seinen und seines Schülers Hofmann Beobachtungen von *A* bis *G* in dem Sonnenspektrum mehr als 2000 Linien bezeichnete.

Die Methode der Kirchhoffschen Beobachtung, welche seitdem im wesentlichen bei allen Spektralbeobachtungen angewandt wird, weicht in einem Punkte von der Fraunhoferschen ab; bei ihr läfst man nur parallele Strahlen auf das Prisma fallen. Den von Kirchhoff angewandten Apparat zeigt Fig. 69. Eine mit einem Fufs versehene oben glatt gehobelte Eisenplatte trägt zunächst ein Fernrohr *A*, in welchem an Stelle des Okulars

Fig. 69.



eine Spaltöffnung angebracht ist; die eine Schneide des Spaltes kann mit einer Mikrometerschraube verstellt werden, so dafs man dem Spalte jede beliebige Feinheit geben kann. Der Spalt, auf welchen der Fernrohraxe parallel mit einem Heliostaten die Strahlen der Sonne geworfen werden, befindet sich im Brennpunkte des Objektivs, so dafs die durch den Spalt in das Fernrohr eindringenden Strahlen dasselbe durch das Objektiv einander und der Fernrohraxe parallel verlassen. Die Strahlen durchdringen der

[1]) *Kirchhoff*, Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente. Abhandlungen der Berliner Akademie für 1861. Berlin 1861.

Reihe nach die 4 Prismen, welche zwischen dem Kollimatorrohre A und dem Fernrohr B aufgestellt sind, und treten dann in das Objektiv des Fernrohrs B. Da, wie wir § 17 nachwiesen, parallele Strahlen auch das Prisma als solche verlassen, so entwerfen die aus der letzten Prismenfläche austretenden Strahlen, wenn die Axe des Fernrohrs ihnen parallel gestellt ist, in dem Brennpunkte des Objektivs ein reelles Bild der Spaltöffnung. Dieses wird durch das Okular betrachtet.

Da man bei dieser Beobachtungsmethode den Spalt sehr enge nehmen kann, so ist das Spektrum natürlich ein sehr reines, um so mehr, da durch die viermalige Dispersion in den vier Prismen die Ablenkung der verschiedenen Farben sehr verschieden ist. Da man aufserdem ein stark vergröfserndes Fernrohr anwenden kann, Kirchhoff wandte durchschnittlich eine 40maligen Vergröfserug an, so müssen selbst sehr feine Linien, welche im Sonnenspektrum vorhanden sind, sichtbar werden.

Wir teilen auf Tafel II und III die Kirchhoffschen Zeichnungen mit, deren Wichtigkeit bei den neuern spektroskopischen Unternehmungen immer gröfser wird. Die Lage der Linien ist auf einer Millimeterskala angegeben, deren Anfangspunkt willkürlich gelegt ist; der Beginn des Spektrums ist mit 380 bezeichnet. Um die relative Lage der Linien zu bestimmen, diente die Mikrometerschraube am Fernrohr B. Das Fadenkreuz des Fernrohrs wurde auf eine Linie eingestellt und dann das Fernrohr mit der Mikrometerschraube so weit verschoben, dafs das Fadenkreuz die nächste Linie erreichte u. s. f. Die Drehung der Mikrometerschraube lieferte dann die Abstände der einzelnen Linien. Die Zeichnungen geben aufserdem so genau wie möglich die Breite und Dunkelheit der einzelnen Linien wieder.

Um bestimmte Strahlen des Spektrums zu bezeichnen, wendet man jetzt ziemlich allgemein die Zahlen der Kirchhoffschen Skala an, nur die von Fraunhofer schon mit Buchstaben bezeichneten Linien haben ihre alten Benennungen beibehalten. Wie indes die Tafeln zeigen, bestehen dieselben bei dieser Vergröfserung meist aus ganzen Gruppen von Linien, so C aus dreien, denen nach Kirchhoff die Zahlen 1633,4, 1648,3 und 1655 entsprechen. Bei Anwendung stark dispergierender Prismen und starker Vergröfserung wird man deshalb auch für die Fraunhofersche Bezeichnung besser die Kirchhoffsche wählen. Die Kirchhoffsche Zeichnung des Spektrums gibt nur die relative Lage der Linien im Spektrum, eine genauere Bestimmung derselben auf anderm Wege werden wir an einer andern Stelle kennen lernen. Ebenso werden wir im nächsten Kapitel die Bedeutung der auf den Spektraltafeln unter den einzelnen Spektren angegebenen Zeichen besprechen.

§ 27.

Bestimmung der Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper. Das früher angedeutete Verfahren, die Brechungsexponenten zu bestimmen, ist keiner grofsen Genauigkeit fähig. Wir haben aber in der Ablenkung des Lichtes durch Prismen ein Mittel erhalten, um die Brechungsexponenten sowohl der festen als der flüssigen Körper mit gröfster Genauigkeit und für ganz bestimmte Lichtarten zu erhalten, indem wir, die Dispersion durch eben dieselben Prismen benutzend, die Ablenkung einer bestimmten dunklen Linie beobachten.

Die festen Körper, Gläser und sonstige durchsichtige Substanzen werden unmittelbar in Prismenform hergestellt, und ihr brechender Winkel durch irgend ein Anlegegoniometer oder genauer durch das Wollastonsche Reflexionsgoniometer gemessen. Die zu untersuchenden Flüssigkeiten werden in Hohlprismen gefafst, deren Seiten aus genau planparallelen Glasplatten bestehen. Da das Licht durch parallele Flächen keine Ablenkung erfährt, so haben die Gläser auf den Gang der Lichtstrahlen keinen Einflufs, und die beobachtete Ablenkung wird nur durch die prismatisch begrenzte Flüssigkeit hervorgebracht.

Dieselbe Versuchsmethode, welche Fraunhofer dazu diente, um die dunklen Linien im Spektrum zu beobachten, wandte er auch an, um für eine Reihe von Substanzen die Brechungsexponenten zu bestimmen[1]). Der Theodolith, vor dessen Fernrohr die drehbare Scheibe angebracht ist, welche das zu untersuchende Prisma aufnehmen soll, wird zunächst in möglichst grofser Entfernung von der Spaltöffnung so aufgestellt, dafs der Beobachter die Mitte der Spaltöffnung am Fadenkreuz des Fernrohres sieht. Am Horizontalkreise des Theodolithen wird dann die Stellung der Fernrohraxe, also die Richtung der einfallenden Strahlen bestimmt. Nehmen wir an, der Nonius, an welchem die Stellung abgelesen wird, zeige gerade auf 0°. Hierauf wird auf der drehbaren Scheibe vor dem Fernrohr das Prisma mit vertikaler brechender Kante aufgestellt und das Fernrohr des Theodolithen so gedreht, dafs der Streifen des Spektrums, dessen Brechungsexponent bestimmt werden soll, an dem vertikalen Faden des Fadenkreuzes erscheint. Durch eine Drehung der Scheibe und mit ihr des Prismas wird dann der Einfallswinkel des Lichtes so lange geändert, bis der zu beobachtende Streifen gerade das Minimum der Ablenkung erfährt, und dann das Fernrohr wieder so gedreht, dafs der Streifen wieder an dem vertikalen Faden des Fadenkreuzes erscheint. Der Winkel, welchen die Fernrohraxe jetzt mit der ersten Lage bildet, und den wir direkt am Nonius des Horizontalkreises ablesen, ist der Winkel, welchen die abgelenkten Strahlen mit den einfallenden bilden. Dieser Winkel δ ist somit das Minimum der Ablenkung für den in Rede stehenden Streifen. Ist α der gemessene brechende Winkel des Prismas, so ist nach § 16

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

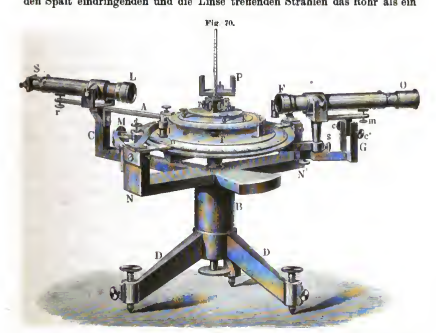
der Brechungsexponent des Lichtes, welches, wenn im Sonnenspektrum vorhanden, an der Stelle des Streifens erscheinen würde, oder der Brechungsexponent des entsprechenden Streifens. Durch erneuerte Drehung des Fernrohrs und Stellung des Prismas erhält man dann die Brechungsexponenten der übrigen Streifen.

Sehr viel bequemer und auch genauer läfst sich die Bestimmung der Brechungsexponenten vornehmen mit Hülfe von Apparaten, welche das Prisma in der Mitte des geteilten Kreises aufstellen, um dessen Axe das

[1]) *Fraunhofer*, Denkschriften der Münchener Akademie. Bd. V für die Jahre 1814–1815. Gilberts Annalen. Bd. LVI.

Fernrohr drehbar ist. Wir beschreiben von diesen Apparaten das von Meyerstein in Göttingen[1]) konstruierte Spektrometer. Die Einrichtung desselben zeigt Fig. 70. Der massive mit Stellschrauben versehene Dreifufs D des Instrumentes trägt eine Büchse, welche genau cylindrisch durchbohrt ist. An der Büchse sind drei in einer horizontalen Ebene befindliche massive Arme, N, N' und C befestigt, von denen der letztere ein ebensolches Kollimatorrohr SL trägt, wie es der Kirchhoffsche Spektralapparat besitzt; der Spalt S befindet sich in dem Brennpunkt der Linse L, so dafs die durch den Spalt eindringenden und die Linse treffenden Strahlen das Rohr als ein

Fig. 70.



paralleles Strahlenbündel verlassen. Die Axe des Rohres ist gegen den Mittelpunkt des Teilkreises T gerichtet; die kleine als dritter Unterstützungspunkt für das Rohr SL dienende Schraube r gestattet die Axe des Rohrs der Ebene des Teilkreises parallel zu stellen.

Der Teilkreis T ist auf einer starken in die Büchse B genau einpassenden Stahlaxe befestigt. An dieser Stahlaxe ist der Träger sm des Beobachtungsfernrohrs FO angeschraubt; derselbe ist eingerichtet wie der Träger des Kollimatorrohres, jedoch mit dem Unterschiede, dafs der ganze

[1]) Eine Beschreibung des Spektrometers in seiner ältern Form gibt *Meyerstein*, Poggend. Ann. Bd. XCVIII. Die von *Brunner* in Paris und andern für denselben Zweck konstruierten Apparate unterscheiden sich nur in unwesentlichen konstruktiven Details. Eine etwas gröfsere Verschiedenheit bietet das Spektrometer von *Abbe*, wie es von Zeiss in Jena angefertigt wird, und welches von *Abbe* in einer kleinen Schrift: „Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens etc.“ (Jena bei Mauke 1874) beschrieben ist.

Träger, wenn die Schraube bei *s* gelöst wird, mit dem Fernrohr von dem Apparate entfernt werden kann. Um die Axe des Rohres der Ebene des Kreises *T* parallel zu stellen, dient der dritte Stützpunkt des Fernrohrs, die Schraube *m*, und um die Axe genau gegen die Axe des Kreises *T* zu richten geht von dem Träger ein Ansatzstück vertikal herab, welches bis zwischen die Enden der Schrauben *c* und *c'* reicht. Durch Anziehen der einen Schraube *c* und Lösen der andern kann der Träger um seine Axe bei *s* etwas gedreht werden. Die Teilung des Kreises *T* ist auf einem eingelegten Silberstreifen so aufgetragen, dafs wenn die Axen des Rohres *SL* und des Beobachtungsfernrohres *FO* in einer geraden Linie liegen, der Nullpunkt der Teilung an dem Nullpunkt des Nonius *n* sich befindet. Dieser Nonius *n* wird von dem Arme *N* getragen; der Arm *N* trägt ebenfalls eine Mikrometerschraube, durch welche, wenn der Teilkreis durch die Druckschraube *d* an ihr befestigt wird, die feinste Einstellung des Teilkreises bewirkt wird. Die Ablesung am Nonius geschieht durch die Lupe *l*. Zur Kontrole der einen Ablesung am Nonius *n* dient ein zweiter Nonius, der gerade so an dem Arme *N'* befestigt ist, wie der Nonius *n* an *N*. An dem Arme *N'* ist aufserdem durch einen Bogen eine Gabel *P* befestigt, welche dieselbe Einrichtung hat als der Träger *sm*, und auf welche man zu gewissen Beobachtungen das Beobachtungsfernrohr *FO* legt.

Die den Teilkreis tragende Stahlaxe ist vertikal von oben nach unten genau cylindrisch angebohrt, und in diese Bohrung pafst eine zweite Stahlaxe, welche den kleinen Teilkreis *K* trägt, dessen Ebene genau der Ebene des grofsen Teilkreises parallel ist. Die Stellung des kleinen Teilkreises, der ebenfalls seine Teilung in einem eingelegten Silberstreifen trägt, wird an dem Nonius *v* abgelesen. Durch das Anziehen einer in der Zeichnung durch das Prisma verdeckten Druckschraube kann der kleine Teilkreis mit dem grofsen fest verbunden werden, so dafs er sich gleichzeitig und gemeinschaftlich mit demselben um die vertikale Hauptaxe des ganzen Instrumentes drehen kann. Andererseits kann aber auch der Teilkreis *K* durch eine an dem von *C* getragenen Arme *A* angebrachte Druckschraube festgestellt werden, so dafs er an der Drehung des grofsen Kreises nicht teilnimmt.

Auf dem kleinen Kreise *K* befindet sich ein kleines mit drei Stellschrauben versehenes Tischchen, dessen Ebene mit Hülfe dieser Stellschrauben der Ebene der Teilkreise genau parallel gestellt werden kann. Auf dieses Tischchen werden schliefslich die Prismen gestellt, deren optisches Verhalten untersucht werden soll. Das Prisma *p* in der Zeichnung stellt ein Meyersteinsches Hohlprisma zur Untersuchung von Flüssigkeiten dar. Dasselbe besteht aus einem Prisma von schwarzem Glase, welches eine zu der die brechende Kante aufnehmenden Halbierungsebene senkrechte weite Durchbohrung hat. Diese Durchbohrung wird auf den Seitenflächen des Prismas durch planparallele Glasplatten, die mit Federn angedrückt werden, geschlossen. Von der obern Basis des Prismas führt eine Durchbohrung in den Hohlraum, welche einmal dazu dient, das Prisma zu füllen, dann aber auch bei den Versuchen zur Aufnahme eines Thermometers, mit welchem man die Temperatur der untersuchten Flüssigkeit bestimmt.

Die Methode der Beobachtung ergibt sich aus der Beschreibung des Apparates unmittelbar. Das Beobachtungsfernrohr wird zunächst auf einen

fernen Gegenstand eingestellt, dann auf die entsprechende Gabel gelegt, und der Teilkreis so gestellt, dafs der Nonius auf Null zeigt. Die von dem Spalt ausgehenden und das Objektiv des Spaltrohrs durchsetzenden Strahlen fallen dann, wenn der Spalt genau im Brennpunkt des Objektives sich befindet, als paralleles Strahlenbündel auf das Objektiv des Beobachtungsrohres, und man sieht dann ein scharfes Bild der Spalte. Fällt dasselbe nicht genau mit dem Fadenkreuz zusammen, so wird durch die an dem Fernrohrträger angebrachte Korrektionsschraube c das Fernrohr so weit verstellt, bis das Fadenkreuz das Bild des Spaltes deckt. Ist das Bild des Spaltes nicht ganz scharf, so wird der Spalt selbst soweit verstellt, bis das Bild scharf erscheint.

Auf diese Weise ist die Richtung des einfallenden Lichtes fest bestimmt; man stellt jetzt auf den mittlern Tisch des Apparates das Prisma und schiebt das Beobachtungsfernrohr so weit zur Seite, bis die das Prisma verlassenden Strahlen das Objektiv des Fernrohrs treffen, und stellt dann das Fernrohr so, dafs das Fadenkreuz eine bestimmte Linie des Spektrums deckt. Um das Minimum der Ablenkung zu erhalten, dreht man den kleinen Teilkreis des Apparates und mit demselben das Prisma nach der einen oder andern Seite, und folgt, wenn die Ablenkung der betrachteten Linie kleiner wird, mit dem Beobachtungsrohr so lange, bis bei weiterer Drehung des Prismas in demselben Sinne die Ablenkung der Linie wieder gröfser wird. Man stellt dann das Fernrohr wieder genau auf die Linie ein, indem man zuletzt die Mikrometerschraube zu Hülfe nimmt. Der Winkel, um den man das Fernrohr jetzt aus seiner Anfangsstellung gedreht hat, und den man direkt am Nonius abliest, ist die Minimalablenkung des betrachteten Strahles.

Damit das genau der Fall sei, ist indes erforderlich, dafs die Einfallsebene des Strahles genau der Drehungsebene des Teilkreises parallel, oder dafs die Ebene der beiden Prismenflächen genau senkrecht zur Ebene des Teilkreises sei. Um das zu kontrolieren, eventuell zu korrigieren, benutzt man die Spiegelung des Fadenkreuzes. Zu dem Ende ist dem Apparate für das Beobachtungsfernrohr ein Okular beigegeben, welches an der Seite aufgeschnitten ist, und welches im Innern ein kleines planparalleles Gläschen hat, das gegen die Axe des Fernrohrs um 45° geneigt ist, so dafs Strahlen, welche durch den Ausschnitt des Okulares auf die Glasfläche fallen, nach dem Fadenkreuz und weiter nach dem Objektive des Fernrohrs hin reflektiert werden. Treffen diese Strahlen aufserhalb des Fernrohrs eine spiegelnde Fläche, welche senkrecht steht zur Axe des Fernrohrs, so werden dieselben zum Fernrohr hin reflektiert, und man sieht dann beim Hineinblicken in das Fernrohr das reflektierte Bild des Fadenkreuzes, und zwar deckt dasselbe das Fadenkreuz selbst, wenn die spiegelnde Fläche genau senkrecht ist zur Fernrohraxe.

Um diese Methode zur Korrektion zu benutzen, stellt man das Prisma, nachdem man den Teilkreis und Tisch des Apparates mit einer Libelle horizontal gestellt hat, auf den kleinen Tisch und richtet die eine Prismenfläche gegen das Fernrohr; durch vorsichtiges Drehen des Prismas mit dem Tischchen und eventuell gelindes Neigen der Prismenfläche wird man es dann unschwer dahin bringen, dafs man ein reflektiertes Bild des Fadenkreuzes sieht, und dafs der Vertikalfaden des reflektierten Bildes den



Vertikalfaden des Fadenkreuzes deckt; den Horizontalfaden des Bildes bringt man dann mit dem des Fadenkreuzes dadurch zur Deckung, daſs man die Hälfte der Abweichung durch Heben oder Senken der Fernrohraxe mit der dasselbe tragenden Schraube, die andere Hälfte durch Korrektion an den Stellschrauben des Tischchens fortnimmt. Nachdem so die eine Prismenfläche senkrecht zur Axe des Fernrohrs gestellt ist, dreht man das Tischchen mit dem Prisma so weit, bis man das Fadenkreuz von der zweiten Prismenfläche reflektiert sieht, und bis die Vertikalfäden des Bildes und des Fadenkreuzes sich decken; die Horizontalfäden werden sich dann im allgemeinen nicht decken; man bringt sie dann wieder zur Deckung, indem man zur Hälfte durch Korrektion des Fernrohrs, zur Hälfte durch Korrektion an den Stellschrauben des Tischchens die Abweichung zum Verschwinden bringt. Dreht man das Prisma dann in die frühere Lage, so ist eine neue Korrektion erforderlich, die man vornimmt; dann dreht man das Prisma wieder in die zweite Lage, korrigiert wieder u. s. f., bis zum Übergang aus der einen in die andere Lage keine Korrektion mehr erforderlich ist. Ist das erreicht, so ist die Einfallsebene der Strahlen der Ebene des Teilkreises parallel, und die in der vorhin angegebenen Weise beobachtete Ablenkung ist die Minimalablenkung.

Die Messung des brechenden Winkels wird ebenfalls mit demselben Apparate durch Spiegelung des Fadenkreuzes vorgenommen. Will man den brechenden Winkel an dem kleinen Kreise messen, so hat man bei den vorhin angegebenen Versuchen zur Justierung des Apparates nur an der Teilung des kleinen Kreises den Winkel zu messen, um welchen man denselben gedreht hat, um das Prisma aus der einen in die andere Lage zu bringen. Dieser Winkel ergänzt, wie leicht zu sehen ist, den brechenden Winkel zu 180°. Will man den brechenden Winkel am grossen Kreise messen, so legt man das Fernrohr auf die seitlich angebrachte feste Gabel *P*, und verfährt ganz in der angegebenen Weise, indem man jetzt den kleinen Kreis an dem groſsen festklemmt, und nun durch Drehung des groſsen Kreises das Prisma in die beiden Lagen bringt, daſs man das Bild des Fadenkreuzes von beiden Prismenflächen mit dem Fadenkreuz selbst zur Deckung bringt. Die gröſsten Spektrometer Meyersteins, mit zwölfzölligem Teilkreis, gestatten so die Winkel bis auf einzelne Sekunden genau zu bestimmen.

Der beschriebene Apparat hat also nicht nur den Vorzug, daſs man an demselben alle Korrektionen leicht anbringen, sondern, daſs man mit demselben auch alle erforderlichen Messungen ausführen kann. Derselbe hat noch einen weitern Vorzug, nämlich den, daſs man zu den Messungen künstliche Lichtquellen anwenden kann. Bei der Fraunhoferschen Methode muſs, wie wir erwähnten, die Entfernung des Theodolithen vom Spalt möglichst groſs genommen werden; deshalb kann man das Sonnenlicht nicht durch künstliche Lichtquellen, deren geringe Lichtstärke nicht ausreicht, ersetzen. Bei dem Spektrometer dagegen bringt man die Lichtlinie unmittelbar vor dem Spalt an, und da genügt schon eine geringe Lichtstärke zu den Beobachtungen. Man wendet deshalb in neuerer Zeit vielfach zu Bestimmungen von Brechungsexponenten das Licht des glühenden Wasserstoffgases an, welches sogenannte Geisslersche Röhren aussenden, in denen Wasserstoff unter einem Drucke von etwa 5^{mm} eingeschlossen ist,

wenn man durch sie den Strom eines elektrischen Induktionsapparates sendet. Wir werden diese Lichtqnellen im nächsten Kapitel besprechen, jetzt sei nur erwähnt, dafs das Wasserstofflicht unter diesen Umständen in seinem Spektrum nur drei helle Linien zeigt, welche Plücker $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ genannt hat. Die erste derselhen fällt mit der Fraunhoferschen Linie C, die zweite mit F zusammen, die dritte entspricht einer dunklen Linie nahe vor G, sie ist Fig. 67 in dem Spektrum als $H\gamma$ eingetragen.

In den Fällen, in welchen die Kenntnis der Brechungsexponenten von drei Linien nicht genügt, kann man durch die Perlen gewisser Salze gefärbte sonst nicht leuchtende Flammen des Bunsenschen Brenners benntzen. So liefert die durch ein Natronsalz gefärbte Flamme eine resp. zwei sehr nahe neben einander liegende gelhe Linien, welche genau der resp. den dunkeln Fraunhoferschen Linien D entsprechen. Andere Linien geben die mit Kalium, Lithium oder Thallinm gefärbten Flammen.

Bei der bisherigen Besprechung der Messung der Brechungsexponenten haben wir farblos dnrchsichtige Mittel voransgesetzt, nur diese liefern, wie wir sahen, ein normales Spektrum, in welchem die Fraunhoferschen Linien ihre normale Lage haben, so dafs wir im Spektrum des Sonnen- oder Tageslichtes aus der Lage derselben die Linien erkennen können. Bei wenig intensiv gefärbten Substanzen, bei welchen relativ dicke Schichten erforderlich sind, um das Znrückhalten gewisser Farhen, also deren Absorption zu erkennen, kann man dieselhe Methode benntzen, da anch bei diesen die Spektra normal sind. Dagegen bei anomal dispergierenden Snhstanzen können wir unter Anwendung von Sonnenlicht nicht in der hisherigen Weise verfahren, da eben infolge der Anomalie die Lage der Fraunhoferschen Linien eine von der im normalen Spektrum gegebenen verschiedene ist, somit die nnr durch diese Lage bestimmbaren Linien nicht mehr zur Angabe einer bestimmten Lichtart dienen können. Nur hei Anwendung der Linien künstlicher Lichtquellen können wir auch bei anomal dispergierenden Medien genau in derselben Weise verfahren, da diese an ihrer Farhe erkannt werden, und im allgemeinen nicht so zahlreich sind, dafs durch die Veränderung ihrer relativen Lage eine Verwirrung eintreten kann.

Will man Sonnenlicht anwenden, so mufs man die im § 20 erwähnte von Kundt angegebene Methode der gekreuzten Spektra anwenden. Man läfst zu dem Zwecke auf den Spalt des Kollimatorrohres ein möglichst scharfes Spektrum fallen, in welchem man die Fraunhoferschen Linien erkennen kann, dessen Längsausdehnung dem Spalt parallel ist. Das dieses Spektrum entwerfende Prisma wird so aufgestellt, dafs, eventnell unter Benutzung passender Spiegelung, die Strahlen der Axe des Kollimatorrohres parallel in das Spektrometer eindringen. Durch Drehung des Prismas kann man dann nach und nach alle Strahlen des Spektrums in der erforderlichen Richtung in das Spektrometer eintreten lassen. Noch bequemer bringt man nach Ketteler[1]), nm von den Fraunhoferschen Linien unabhängig zu sein, vor dem Spalt einen durchsichtigen Mafsstab an, dessen Teilstriche senkrecht zur Spaltrichtung sind, den man dnrch das von dem ersten Prisma entworfene Spektrum belenchtet. Der Mafsstab steht dem Spalt so nahe, dafs das auf den Spalt eingestellte Beobachtungsfernrohr die Teilstriche

[1]) *Ketteler*, Wiedem. Ann. Bd. XII. p. 481.

mit den an ihnen hingeschriebenen Zahlen erkennen kann. Man bestimmt die an einem bestimmten Teilstrich der Skala vorhandene Lichtart, resp. deren Wellenlänge direkt in später zu besprechender Weise mit einem Beugungsgitter. Um die sämtlichen Strahlen des Spektrums beobachten zu können, mufs man dann entweder das Spektrometer vor der Teilung auf und nieder verschieben können, oder man mufs die in dem Falle mit dem Prisma fest zu verbindende Skala mit dem Prisma gleichzeitig verstellen, so dafs das immer auf denselben Teilstrichen der Skala liegende Spektrum allmählich an dem Spalt vorüber geführt wird. Eine dazu geeignete Vorrichtung beschreibt Ketteler in der angegebenen Abhandlung.

Man hat hierdurch erreicht, dafs auf das anomal dispergierende Prisma Licht bekannter Wellenlänge fällt, dessen Ablenkung in dem Prisma man mifst.

Da die anomal dispergierenden Substanzen das Licht sehr stark absorbieren, darf man im allgemeinen nur dünne Schichten derselben benutzen. Man mufs deshalb Prismen mit nicht zu grofsen brechenden Winkeln, im Maximum etwa 45°, anwenden, und diese Prismen bis zur brechenden Kante hin durchsichtig machen, damit man das Licht so nahe wie möglich der brechenden Kante hindurch gehen lassen kann.

§ 28.

Brechung und Dispersion in farblos durchsichtigen Körpern. Wir untersuchen zunächst die Brechung und Dispersion des Lichtes in den farblos durchsichtigen Körpern, die also dadurch charakterisiert sind, dafs in denselben eine merkliche Absorption des Lichtes nicht stattfindet. In nachfolgenden Tabellen geben wir zunächst eine Anzahl Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper, welche nach den beschriebenen Methoden von Fraunhofer[1]), Dutirou[2]), Baden Powell[3]), Mascart[4]), van der Willigen[5]) und Verdet[6]) bestimmt sind.

[1]) *Fraunhofer,* Denkschriften der Münchner Akademie. Bd. V für die Jahre 1814—1815. Gilbert Ann. Bd. LVI.
[2]) *Dutirou,* Annales de chim. et de phys. III. Série Bd. XXVIII.
[3]) *Baden Powell,* Poggend. Ann. Bd. LXIX.
[4]) *Mascart,* Ann. de chim. et de phys. IV. Série T. XIV.
[5]) *van der Willigen,* Archives du musée Teyler vol. I.
[6]) *Verdet,* Ann. de chim. et de phys. III. Série T. LIX.

I. Verschiedene Glassorten.

Brechendes Mittel	Dichte	Brechungsexponent							Beobachter
		B	C	D	E	F	G	H	
Flintglas v. Guinand gelb mit Borsäure	3,417	1,769702	1,771761	1,777664	1,785254	1,792420	1,806195	1,818597	Dutirou
Flintglas von Merz		1,74056	1,74343	1,75153	1,76233	1,77230	1,79219	—	v. d. Willigen
Flintgl. v. Fraunhofer	2,135	1,701050	1,702642	1,707264	1,713134	1,718673	1,728423	1,738154	Dutirou
Flintgl. v. Bontemps	2,011	1,691900	1,693496	1,697967	1,703518	1,708917	1,718725	1,727522	"
Flintgl. von Guinand mit Borsäure	4,322	1,690627	1,692252	1,696515	1,702177	1,707312	1,717111	1,725883	"
Flintglas Nro. 13	3,723	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062	Fraunhofer
Guinandsches Glas mit Borsäure	2,642	1,618376	1,619340	1,622091	1,625459	1,628388	1,633945	1,638699	Dutirou
Flintglas von Rosette		1,61268	1,61443	1,61929	1,62569	1,63148	1,64269	1,65268	Mascart
Crowngl. v. Guinand	2,184	1,611668	1,612624	1,615193	1,618529	1,621274	1,626532	1,630805	Dutirou
Venetianisches Glas	2,713	1,610960	1,611960	1,614367	1,617718	1,620625	1,625994	1,630453	"
Crowngl. v. Dollond	2,484	1,607933	1,608933	1,611428	1,614660	1,617457	1,622696	1,627094	"
Flintglas Nro. 3	3,512	1,602042	1,603803	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373	Fraunhofer
Crowngl. v. Bontemps	2,447	1,596879	1,597770	1,600233	1,603323	1,606123	1,611211	1,615640	Dutirou
Glas von St. Gobin	2,329	1,586757	1,587683	1,590112	1,593036	1,595808	1,600642	1,604761	"
Crownglas. Ltr. M.	2,756	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470	Fraunhofer
Crownglas Nro. 9	2,535	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566	"
Crownglas Nro. 13	2,535	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684	"

Die verschiedenen Gläser unterscheiden sich durch ihre Zusammensetzung, das Flintglas zeichnet sich vor den übrigen durch einen Gehalt an Blei aus.

II. Flüssige Körper.

Brechendes Mittel	Dichte	Temperatur	Brechungsexponenten B	C	D	E	F	G	H	Beobachter
Wasser	1,000	15° R.	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177	Fraunhofer
Wasser	1,000	19°,5 C.	1,33048	1,33122	1,33307	1,33527	1,33720	1,34063	1,34350	v. d. Willigen
Alkohol	0,815	17°,6 C.	1,3628	1,3633	1,3654	1,3675	1,3696	1,3733	1,3761	Baden Powell
Salzsäure	1,162	18°,6 C.	1,4050	1,4065	1,4095	1,4130	1,4160	1,4217	1,4261	„
Schwefelsäure	1,835	18°,6 C.	1,4321	1,4329	1,4351	1,4380	1,4400	1,4440	1,4463	„
Terpentinöl	0,885	8°,5 R.	1,4704	1,4715	1,4744	1,4783	1,4817	1,4881	1,4938	Fraunhofer
Angelikaöl	—	21° C.	1,484	1,486	1,489	1,493	1,496	1,505	1,509	Baden Powell
Kreosot	—	18°,2 „	1,5319	1,5335	1,5383	1,5452	1,5515	1,5639	1,5744	„
Anisöl	—	15°,1 „	1,5486	1,5508	1,5572	1,5659	1,5743	1,5912	1,6084	„
Kassiaöl	—	10° „	1,5963	1,6007	1,6104	1,6249	1,6389	1,6698	1,7039	„
„	—	14° „	1,5945	1,5979	1,6073	1,6207	1,6358	1,6671	1,7025	„
„	—	22°,5 „	1,5895	1,5930	1,6026	1,6174	1,6314	1,6625	1,6985	„
Schwefelkohlenst.	—	24°,2 „	1,6114	1,6147	1,6240	1,6368	1,6487	1,6728	1,6956	Verdet
Salzlösungen										
Salpeters. Wismuthoxyd	—	22° „	1,3306	1,3315	1,3332	1,3355	1,3374	1,3410	1,3437	Baden Powell
Zinkchlorid	—	22° „	1,3351	1,3402	1,3421	1,3444	1,3466	1,3501	1,3534	„
Essigs. Bleioxyd, basisch	—	15° „	1,3350	1,3357	1,3373	1,3398	1,3417	1,3453	1,3481	„
„ „ neutral.	—	19° „	1,3429	1,3437	1,3455	1,3480	1,3498	1,3538	1,3571	„
Salpeters. Bleioxyd	—	17°,8 „	1,3455	1,3461	1,3482	1,3506	1,3528	1,3568	1,3600	„
Glaubersalz	—	22° „	1,3392	1,3398	1,3419	1,3442	1,3462	1,3499	1,3528	„
Chlorbarium	—	21°,8 „	1,3392	1,3398	1,3419	1,3442	1,3462	1,3499	1,3528	„
Chlorcalcium	—	22°,2 „	1,4006	1,4016	1,4040	1,4070	1,4099	1,4150	1,4190	„
Kalilösung	1,416	9° R.	1,3996	1,4005	1,4028	1,4056	1,4080	1,4125	1,4163	Fraunhofer
Natronlösung	1,34	16° C.	1,4036	1,4039	1,4075	1,4109	1,4134	1,4181	1,4221	Baden Powell

Man sieht aus diesen Tabellen, dafs die optische Dichtigkeit keineswegs mit der Dichtigkeit der Substanzen im gewöhnlichen Sinne zusammenfällt. Die Substanzen in der ersten Tabelle sind so geordnet, dafs die Brechungsexponenten von oben nach unten stetig kleiner werden; wie man sieht, ist das mit den Dichtigkeiten keineswegs der Fall. Die beiden specifisch leichtesten Glasarten, das von Dutirou untersuchte Flintglas von Bontemps und das von Fraunhofer haben fast den gröfsten Brechungsexponenten.

Die in den §§ 21 bis 23 vorgeführten Dispersionstheorien liefern uns die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von den Schwingungsdauern des Lichtes oder den Wellenlängen desselben im Weltenraume, welche das Produkt aus der Schwingungsdauer und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Weltenraume sind. Die Messung der Wellenlängen können wir allerdings erst im zweiten Abschnitt dieses Bandes besprechen; vorgreifend teilen wir hier, um die Dispersionstheorie an den Versuchen prüfen zu können, die von den verschiedenen Experimentatoren gefundenen Werte mit. Eine Vergleichung dieser Werte läfst uns gleichzeitig erkennen, innerhalb welcher Grenzen dieselben als zuverlässig gelten können.

In der ersten Kolumne der nachfolgenden Tabelle sind die Zeichen der einzelnen Linien des Spektrums nach Fraunhofer, in der zweiten die Längen der Wellen nach Fraunhofer[1]), in der dritten nach van der Willigen[2]), in der vierten nach Ditscheiner[3]), in der fünften nach Ångström[4]), in der sechsten nach Stefan[5]), in der siebenten nach Mascart[6]) und in der achten endlich das Mittel aus den sechs angegebenen Werten verzeichnet. Die Länge der Wellen ist in 0,000 1^{mm} angegeben, das heifst die Einheiten der Zahlen sind zehntausendstel Millimeter.

Tabelle der Wellenlängen der Hauptstrahlen im sichtbaren Spektrum.

Strahlen	Fraunh.	van d. W.	Ditsch.	Ångstr.	Stefan	Mascart	Mittel
B	6,878	6,871	6,883	6,867	6,873	6,867	6,872
C	6,564	6,565	6,571	6,562	6,578	6,561	6,567
D[7])	5,888	5,896	5,902	5,892	5,893	5,891	5,893
E	5,265	5,272	5,278	5,269	5,271	5,268	5,271
F	4,851	4,864	4,868	4,860	4,869	4,860	4,862
G	4,292	4,311	4,317	4,307	4,291	4,307	4,304
H[8])	3,945	3,955	3,957	3,950	3,959	3,967	3,956

1) *Fraunhofer*, Denkschriften der Münchner Akademie Bd. VIII. Gilbert Ann. Bd. LXXIV.

2) *van der Willigen*, Archives du musée Teyler. I. p. 280—343.

3) *Ditscheiner*, Berichte der Wiener Akademie Bd. L und LII.

4) *Ångström*, Recherches sur le spectre solaire. Berlin 1869.

5) *Stefan*, Berichte der Wiener Akademie Bd. LIII.

6) *Mascart*, Annales scientifiques de l'école normale Bd. IV.

7) Bei *van der Willigen, Ditscheiner, Ångström, Mascart* als Mittel aus D_1 und D_2 oder bei *Kirchhoff* 1002,8 und 1006,8.

8) Bei *van der Willigen, Ditscheiner, Ångström* als Mittel von H_1 und H_2.

Wie die Tabelle zeigt differieren die von den verschiedenen Experimentatoren angegebenen Werte in einzelnen Fällen von einander um mehr als eine Einheit der zweiten Decimale, ja es kommen einzelne Differenzen vom Mittel vor, welche eine Einheit der zweiten Decimale erreichen. Im allgemeinen stimmen aber die Werte der verschiedenen Messungen mit dem Mittel bis auf 5 Einheiten der dritten Decimale, so dafs wir diese Grenze der Unsicherheit für die Mittelwerte annehmen können.

Die Helmholtzsche Dispersionstheorie lieferte für den Brechungsexponenten n und den Absorptionskoefficienten $\varkappa$ die Gleichungen

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -\Sigma P \lambda^2 + \Sigma \frac{Q \lambda^4 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2 \lambda^2}$$

$$2 n \varkappa = \Sigma \frac{Q \alpha \lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2 \lambda^2},$$

wenn das Zeichen Σ andeutet, dafs wir so viele Glieder gleicher Form mit eigenen Konstanten P, Q, λ_m, α nehmen müssen, als im Innern des brechenden Körpers verschiedenartige körperliche Moleküle, das heifst Moleküle mit verschiedenen elastischen Kräften angenommen werden müssen. Für zwei Arten von Molekülen würde also die erste Gleichung

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -(P_1 + P_2)\lambda^2 + Q_1 \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - \lambda_{m_1}^2)}{(\lambda^2 - \lambda_{m_1}^2)^2 + \alpha_1^2 \lambda_{m_1}^2} + Q_2 \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)}{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha_2^2 \lambda_{m_2}^2}.$$

In den farblos durchsichtigen Medien findet für alle sichtbaren Lichtwellen eine so geringe Absorption statt, dafs wir für alle diese $\varkappa = 0$ setzen dürfen, wir müssen, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, schon sehr dicke Schichten der Körper benutzen, um überhaupt eine Absorption zu erkennen. Es kann nun $\varkappa$, ohne dafs Q und damit auch P gleich null werden, somit überhaupt keine Brechung eintritt, nur gleich null sein, wenn die Werte $\alpha = 0$ sind, also da α dem Reibungskoefficienten δ proportional ist, wenn keine oder doch nur eine so unmerkliche Reibung stattfindet, dafs wir dieselbe aufser Acht lassen können. Dann wird unsere Gleichung für durchsichtige Medien

$$n^2 - 1 = -\Sigma P \lambda^2 + \Sigma Q \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Für eine Art Moleküle würde das Zeichen Σ fortfallen.

Da wir die Konstanten der Dispersionsgleichung nicht theoretisch bestimmen können, so läfst sich eine Prüfung der Theorie nur so durchführen, dafs wir aus der notwendigen Zahl von Brechungsexponenten und den zugehörigen Wellenlängen die Konstanten der Gleichung bestimmen, und mit den so bestimmten Konstanten dann die übrigen Brechungsexponenten aus den Wellenlängen des Lichtes berechnen. Die so berechneten Brechungsexponenten müssen mit den beobachteten innerhalb der Unsicherheitsgrenzen übereinstimmen, welche durch die Ungenauigkeit der Wellenlängen und der zur Bestimmung der Konstanten benutzten Brechungsexponenten bedingt sind.



Nehmen wir an, dafs in dem farblos durchsichtigen Medium, für welches die Untersuchung geführt werden soll, nur eine Art von Molekülen vorhanden ist, so sind in der Gleichung

$$n^2 - 1 = - P\lambda^2 + Q\,\frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}$$

drei Konstanten zu bestimmen, P, Q und λ_m, wozu drei Brechungsexponenten gegeben sein müssen. Wir können die Gleichung zunächst schreiben

$$\left(\frac{n^2-1}{\lambda^2} + P\right)\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right) - Q = 0.$$

Sind nun o und p zwei andere Brechungsexponenten, zu denen die Wellenlängen μ und ν gehören, und setzen wir

$$\frac{n^2-1}{\lambda^2} = r \qquad \frac{o^2-1}{\mu^2} = s \qquad \frac{p^2-1}{\nu^2} = t,$$

so erhalten wir drei Gleichungen

$$(r+P)\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right) - Q = 0 \quad (s+P)\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\mu^2}\right) - Q = 0$$

$$(t+P)\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\nu^2}\right) - Q = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht

$$\lambda_m^2 = \frac{r\lambda^2(\mu^2-\nu^2) - s\mu^2(\lambda^2-\nu^2) + t\nu^2(\lambda^2-\mu^2)}{r(\mu^2-\nu^2) - s(\lambda^2-\nu^2) + t(\lambda^2-\mu^2)}$$

$$P = \frac{st\lambda^2(\mu^2-\nu^2) - rt\mu^2(\lambda^2-\nu^2) + rs\nu^2(\lambda^2-\mu^2)}{r\lambda^2(\mu^2-\nu^2) - s\mu^2(\lambda^2-\nu^2) + t\nu^2(\lambda^2-\mu^2)}.$$

Den Wert der Konstanten Q bestimmt man dann am besten aus einer der drei Q noch enthaltenden Gleichungen, resp. zur Kontrole der Rechnungen aus allen dreien.

Wenn auch nach der Entdeckung der anomalen Dispersion die Cauchysche Theorie der Dispersion nicht mehr als zulässig angesehen werden kann, ist es immer interessant zu zeigen, in wie weit mit den aus derselben sich ergehenden Gleichungen sich die Brechungsexponenten darstellen lassen.

Für die Formeln mit zwei Konstanten genügen zwei beobachtete Brechungsexponenten mit den zugehörigen Wellenlängen. Sind dieselben n und o, die zugehörigen Wellenlängen λ und μ, so giebt die Cauchysche Formel folgende zwei Gleichungen

$$n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda^2} \qquad o = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\mu^2}$$

und daraus

$$\alpha_2 = \frac{o-n}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\lambda^2}} \qquad \alpha_1 = \frac{n\,\frac{1}{\mu^2} - o\,\frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\lambda^2}}.$$

Um die Konstanten n_0 und λ_0 der Christoffelschen Formel zu berechnen, schreiben wir dieselbe zunächst, wie § 21

$$n^2 = \frac{n_0^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}} = \frac{n_0^2 \lambda}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2}}$$

$$n^2 \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2} = \lambda (n_0^2 - n^2)$$

$$\lambda^2 - \lambda_0^2 = \lambda^2 \left(\frac{n_0^2}{n^2} - 1\right)^2 \ldots\ldots (a).$$

Sind jetzt wieder die Elemente zweier Strahlen n, λ, o, μ, so ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\lambda^2 - \mu^2 = \lambda^2 \left(\frac{n_0^2}{n^2} - 1\right)^2 = \mu^2 \left(\frac{n_0^2}{o^2} - 1\right)^2,$$

aus welcher man unmittelbar für n_0 ableitet

$$n_0^2 = 2 \frac{\frac{\lambda^2}{n^2} - \frac{\mu^2}{o^2}}{\frac{\lambda^2}{n^4} - \frac{\mu^2}{o^4}} = 2 \frac{n^2 \frac{o^4}{\mu^2} - o^2 \frac{n^4}{\lambda^2}}{\frac{o^4}{\mu^2} - \frac{n^4}{\lambda^2}}.$$

Lösen wir die Gleichung (a) nach λ_0 auf, so erhält man leicht

$$\lambda_0^2 = 2 n_0^2 \frac{o^2 - n^2}{\frac{o^4}{\mu^2} - \frac{n^4}{\lambda^2}}.$$

Im Folgenden sind für das Flintglas von Rosette, dessen Brechungsexponenten nach den Messungen von Mascart in der Tabelle I angegeben sind, die Rechnungen nach den drei angegebenen Gleichungen durchgeführt worden.

I. Flintglas von Rosette.

Die Konstanten der Helmholtzschen Gleichung aus den Brechungsexponenten der drei Strahlen B, E, H werden

$\lambda_m^2 = 1{,}739\,5$ $\quad$ $\log \lambda_m^2 = 0{,}240\,440\,9$
$P = 0{,}883\,821$ $\quad$ $\log P = 0{,}946\,364\,5 - 1$
$Q = 0{,}883\,911$ $\quad$ $\log Q = 0{,}946\,408\,5 - 1.$

Die Konstanten der Cauchychen Formel aus B und G werden

$$\alpha_1 = 1{,}593\,31 \qquad \alpha_2 = 0{,}914\,708,$$

diejenigen der Christoffelschen Formel auch aus B und G

$$n_0 = 2{,}255\,988 \qquad n_0 \sqrt{2} = 3{,}190\,450 \qquad \lambda_0 = 1{,}995\,036.$$

Die erste Kolumne der folgenden Tabelle enthält die Bezeichnung der Strahlen, die zweite die beobachteten Brechungsexponenten, die dritte die Unterschiede zwischen Beobachtung und den nach der Helmholtzschen, die vierte und fünfte die Unterschiede zwischen Beobachtung und den nach der Cauchyschen und Christoffelschen Formel berechneten Werten der Brechungexponenten.

Strahl	n beobachtet	Die berechneten Werte sind gleich den beobachteten		
		nach H.	n. Cauchy	nach Chr.
B	1,612 68	± 0	± 0	± 0
C	1,614 43	— 10	+ 9	— 1
D	1,619 29	— 7	+ 36	+ 2
E	1,625 69	± 0	+ 54	— 5
F	1,631 48	+ 4	+ 52	+ 8
G	1,642 69	+ 4	± 0	± 0
H	1,652 68	± 0	— 92	— 8

II. Wasser bei 19,°5 C.

Folgende Tabelle, ebenso angeordnet wie die vorhergehende, gibt die Berechnung für Wasser, dessen Brechungsexponenten nach den von van der Willigen gefundenen Werten benutzt worden sind. Die Konstanten der Helmholtzschen Gleichung aus B, D und F berechnet sind

$$\lambda_m^2 = 0{,}879\,79 \qquad \log \lambda_m^2 = 0{,}944\,380\,2 - 1$$
$$P = 0{,}865\,895 \qquad \log P = 0{,}937\,465\,2 - 1$$
$$Q = 0{,}865\,767 \qquad \log Q = 0{,}937\,400\,8 - 1.$$

Die Konstanten der Caucbyschen Formel sind aus den von mir beobachteten[1]) Brechungsexponenten für C und den blauen Strahl des Wasserstoffspektrums, $H\gamma$, dessen Wellenlänge nach den Messungen von Ångström 4,340 ist, berechnet

$$\alpha_1 = 1{,}324\,137 \qquad \alpha_2 = 0{,}305\,31;$$

die Konstanten der Christoffelschen Formel berechnet aus den Brechungsexponenten für C und G sind

$$n_0 = 1{,}873\,06 \qquad n_0\sqrt{2} = 2{,}648\,81 \qquad \lambda_0 = 1{,}318\,02.$$

Strahl	n beobachtet	Die berechneten Werte sind gleich den beobachteten nach		
		Helmholtz	Cauchy	Christoffel
B	1,330 48	± 0	+ 12	+ 12
C	1,331 22	— 5	— 1	± 0
D	1,333 07	± 0	— 12	— 14
E	1,335 27	+ 5	— 15	— 16
F	1,337 20	± 0	— 3	— 18
G	1,340 63	+ 1	— 2	0
H	1,343 50	+ 4	+ 14	+ 25

Dafs die Helmholtzsche Gleichung in der That die beobachteten Brechungsexponenten vollständig wiedergibt, lassen beide Tabellen zweifellos erkennen; um zu übersehen, wie weit auch die beiden andern Gleichungen

[1]) *Wüllner*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIII.

die Brechungsexponenten hinreichend wiedergeben, müssen wir untersuchen, welche Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung durch die Ungenauigkeit in den Werten der Wellenlängen und der zur Berechnung der Konstanten benutzten Brechungsexponenten möglich sind, unter der Voraussetzung, daſs bei voller Genauigkeit dieser Werte die betreffende Gleichung die Beobachtungen absolut genau wiedergeben würde.

Betreffs der Wellenlängen haben wir bereits erwähnt, daſs schon die Vergleichung der von den verschiedenen Beobachtern erhaltenen Werte ergibt, daſs dort nur die zwei ersten Decimalen sicher, die dritte aber unsicher ist, und daſs wir die Unsicherheit der von uns angenommenen Mittelwerte auf mindestens 5 Einheiten der 3. Decimale annehmen müssen.

Die Genauigkeiten der Brechungsexponenten sind verschieden für die festen und flüssigen Körper, da bei letztern die Veränderlichkeit der Exponenten mit der Temperatur eine ziemlich beträchtliche ist. Bei den festen Körpern sind, wie ich bei einer ausführlichen Untersuchung der Genauigkeitsgrenzen gezeigt habe[1]), die 4 ersten Decimalen als sicher anzunehmen, die 5. Decimale ist unsicher; die Gröſse dieser Unsicherheit ist etwas verschieden nach der Stärke der Brechung, bei stark brechenden Substanzen ist sie etwas kleiner als bei schwach brechenden, im Mittel wird sie etwa zu 5 Einheiten der 5. Decimale angenommen werden dürfen.

Die Brechungsexponenten der flüssigen Körper ändern sich, wie wir im nächsten Paragraph specieller nachweisen werden, stark mit der Temperatur; der für eine bestimmte Temperatur gemessene Brechungsexponent erhält deshalb gegenüber denen der festen Körper eine weitere Unsicherheit in der Unsicherheit der Temperaturbestimmung. Nehmen wir an, daſs die Temperatur bis auf 0,°1 sicher bestimmt ist, so tritt dadurch eine Ungenauigkeit in den Brechungsexponenten ein, welche für die verschiedenen Substanzen allerdings verschieden ist, die aber im Mittel ebenfalls 5 Einheiten der 5. Decimale beträgt. Für Flüssigkeiten würde also die Unsicherheit der Brechungsexponenten etwa eine Einheit der 4. Decimale erreichen.

Welche Unsicherheit durch diese Ungenauigkeiten in den berechneten Werten der Brechungsexponenten entstehen könne, übersieht man am besten, wenn man zur Berechnung der Konstanten etwas verschiedene Werte zu Grunde legt. Den Einfluſs etwas verschiedener Werte der Wellenlänge zeigt folgende Tabelle, in welcher die nach der Christoffelschen Gleichung berechneten Brechungsexponenten zusammengestellt sind, die Konstanten beide Male aus B und G bestimmt, das eine Mal unter Anwendung unserer Mittel der Wellenlängen, das andere Mal mit den von Mascart angegebenen Werten. Die letzteren Werte sind von Ketteler berechnet[2]). Die von Ketteler berechneten Konstanten sind

$$n_0 = 2{,}255\,585\,1 \qquad n_0\sqrt{2} = 3{,}190\,258 \qquad \lambda_0 = 1{,}998\,836;$$

man sieht, die Konstanten werden schon in der dritten und vierten Decimale von den oben berechneten verschieden.

[1]) *Wüllner*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIII.
[2]) *Ketteler*, Poggend. Ann. Bd. CXL.

Strahl	n beobachtet	n berechnet $-$ n beobachtet	
		Mittel	Mascart
B	1,612 68	0	0
C	1,614 43	$-$ 1,4	$-$ 0,5
D	1,619 29	$+$ 1,7	$+$ 6,9
E	1,625 69	$-$ 5,3	$+$ 12,7
F	1,631 48	$+$ 8,2	$+$ 15,8
G	1,642 69	0	0
H	1,652 68	$-$ 7,7	$-$ 32,3

Der von Mascart für B angegebene Wert der Wellenlängen weicht um 5 Einheiten der dritten Decimale von unserm Mittel ab, die übrigen nur um 2 bis 3 Einheiten, nur C um 6 und H um 11 Einheiten. Die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Brechungsexponenten erreichen dreimal die vierte Decimale.

Der Einfluſs der Ungenauigkeit der Brechungsexponenten, welche zur Berechnung der Konstanten verwendet werden, ist noch erheblich gröſser. Wir haben vorhin für das Flintglas mit der Helmholtzschen Gleichung und den aus B, E und H berechneten Konstanten für D einen um 7 Einheiten der 5. Decimale kleinern, für F einen um 4 Einheiten gröſsern Wert erhalten, als er beobachtet war. Würde man die so berechneten Werte für die Strahlen B, D, F zur Ableitung der Konstanten benutzen, so würden dieselben natürlich gleich den vorhin gefundenen, und damit alle berechneten Brechungsexponenten dieselben. Ganz anders aber, wenn man die von den berechneten nur so wenig abweichenden beobachteten Werte von D und F mit B kombiniert zur Berechnung der Konstanten verwendet. Die Konstanten werden ganz andere

$$\lambda_m^2 = 1{,}692\,2 \qquad P = 0{,}911\,330 \qquad Q = 0{,}911\,350.$$

Die für C und E mit diesen Konstanten berechneten Brechungsexponenten werden dann den frühern fast genau gleich, für G und H werden dagegen die Werte wesentlich anders, es werden

	n beob.	n ber.	Δ
C	1,614 43	1,614 37	$-$ 6
E	1,625 69	1,625 70	$+$ 1
G	1,642 69	1,642 50	$-$ 19
H	1,652 68	1,652 18	$-$ 50.

Bei H beträgt also der Unterschied 5 Einheiten der vierten Decimale.

Ganz ähnliches zeigt sich bei den Brechungsexponenten des Wassers, wie folgende Tabelle zeigt, welche die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung zusammenstellt, je nachdem die Konstanten aus C und F oder aus B und F berechnet sind unter Benutzung der Christoffelschen Formel.



Strahl	n beobachtet	n berech. = n beob. aus	
		C und G	B und G
B	1,330 48	+ 12	0
C	1,331 22	0	— 12
D	1,333 07	— 14	— 27
E	1,335 27	— 16	— 27
F	1,337 20	— 18	— 25
G	1,340 63	0	0
H	1,343 50	+ 25	+ 28

Die Zahlen zeigen, dafs Unterschiede in den zur Berechnung der Konstanten gewählten Brechungsexponenten, die nur die fünfte Decimale treffen, sich bei der Berechnung der Brechungsexponenten bis auf mehrere Einheiten der vierten Decimale fühlbar machen, wir müssen daher eine Gleichung zur Darstellung der Dispersionserscheinungen für genügend ansehen, wenn sie die beobachteten Brechungsexponenten bis auf einige Einheiten der vierten Decimale darzustellen imstande ist.

Darnach ergibt sich das auf den ersten Blick sehr auffallende Resultat, dafs die Christoffelsche Gleichung die Beobachtungen ganz hinreichend, die Cauchysche mit zwei Konstanten allerdings nicht die starke Dispersion des Flintglases, wohl aber diejenige des Wassers ganz hinreichend darstellt. Nimmt man bei der Cauchyschen Formel noch ein drittes Glied mit λ^4 im Nenner hinzu, so lassen sich selbst für stark dispergierende Körper die Brechungsexponenten recht gut darstellen, wie wir in einem der nächsten Paragraphen an den Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffes nachweisen werden.

Dieses Auffallende schwindet aber, wenn wir der Helmholtzschen Gleichung eine etwas andere Form geben. In der Gleichung

$$n^2 - 1 = - P\lambda^2 + Q\,\frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}\,,$$

welche für die farblos durchsichtigen Medien ohne Hinzuziehung eines dritten Gliedes ausreicht, mufs, wie es auch die berechneten Beispiele zeigten, $\lambda_m < \lambda$, also kleiner als alle im sichtbaren Spektrum vorkommenden Wellenlängen sein, denn für alle Werte $\lambda < \lambda_m$ wird die rechte Seite der Gleichung negativ, somit würden die Brechungsexponenten kleiner als eins. Das heifst aber, dafs das Licht dieser Wellenlängen in dem brechenden Körper sich rascher fortpflanzt, wie im leeren Raum. Da das erfahrungsgemäfs für keinen brechenden Körper und für keine Wellenlänge der Fall ist, so mufs stets die oben angegebene Bedingung $\lambda_m < \lambda$ erfüllt sein. In dem Falle können wir aber das zweite Glied auf die Form bringen

$$Q\,\frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2} = Q\lambda^2\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$$

und den Faktor $\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$ nach dem binomischen Satze in die Reihe entwickeln

$$\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_m^4}{\lambda^4} + \frac{\lambda_m^6}{\lambda^6} + \cdots$$

Die Reihe konvergiert sicher und um so rascher, je kleiner λ_m im Verhältnis zu λ ist. In den von uns berechneten Beispielen war sogar λ_m^2 kleiner als sämtliche λ des sichtbaren Spektrums.

Setzen wir diese Reihe in unsere Gleichung für n^2, so wird

$$n^2 = 1 - P\lambda^2 + Q\lambda^2 + Q\lambda_m^2 + Q\lambda_m^2 \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2} + Q\lambda_m^2 \frac{\lambda_m^4}{\lambda^4} + \cdots$$

oder

$$n^2 = 1 + Q\lambda_m^2 - (P - Q)\,\lambda^2 + Q\lambda_m^2 \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2} + Q\lambda_m^2 \frac{\lambda_m^4}{\lambda^4}.$$

Auch wenn wir nicht annehmen, dafs die Helmholtzsche Gleichung mit zwei Gliedern ausreicht, wenn wir zwei verschiedene Arten körperliche Moleküle annehmen, erhalten wir eine ebensolche Reihe nur mit etwas andern Konstanten, es würde statt

$$Q\lambda_m^2 \quad \text{eintreten} \quad Q_1\lambda_{m_1}^2 + Q_2\lambda_{m_2}^2$$
$$P - Q \quad \text{„} \quad P_1 + P_2 - Q_1 - Q_2$$

und die Zähler der Reihe würden $\lambda_{m_1}^2 + \lambda_{m_2}^2$, $\lambda_{m_1}^4 + \lambda_{m_2}^4$ u. s. f.

In den von uns berechneten Beispielen fanden wir sehr annähernd $P = Q$, für Flintglas war Q, für Wasser P ein klein wenig gröfser. Daraus folgt, dafs das mit λ^2 multiplicierte Glied bei den farblos durchsichtigen Medien nur sehr wenig Einflufs hat, und dafs man stets, wenn man dasselbe gleich null setzt, die übrigen Konstanten, indem man, ohne die theoretische Bedeutung der Konstanten zu beachten, in der Reihe hinreichend weit geht, so bestimmen kann, dafs die Brechungsexponenten mit der erreichbaren Genauigkeit dargestellt werden.

Dafs also für alle farblos durchsichtigen Medien die Brechungsexponenten durch die Cauchysche Reihe mit einer hinreichenden Zahl von Gliedern dargestellt werden können, beweist dann, dafs für alle diese Substanzen sehr annähernd $P = Q$ oder $\Sigma P = \Sigma Q$ ist.

Für manche farblos durchsichtige Körper ergeben sich die Werte der beiden Konstanten P und Q so nahe gleich, dafs man ohne weiteres $P = Q$ setzen kann. Unsere Gleichung für n nimmt dann die Form an

$$n^2 - 1 = Q\lambda^2\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} - 1\right) = Q\,\frac{\lambda_m^2}{1 - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2},$$

eine Form für die Brechungsexponenten, welche auch Lommel[1]) als Näherungsgleichung aus der von ihm entwickelten Theorie der Dispersion abgeleitet hat.

In folgender Tabelle sind für 8 Substanzen die von mir berechneten Werte P, Q, λ_m^2 zusammengestellt. Die Werte für die Flüssigkeiten und das

[1]) *Lommel*, Wiedemann Ann. Bd. III. Man sehe auch Wiedem. Ann. Bd. VIII.

schwere Flintglas von Merz sind aus meinen Messungen[1]), die Werte für Kalkspat aus den im § 56 mitzuteilenden Messungen Mascarts abgeleitet.

	P	Q	λ_m^2	$Q-P$
Wasser	0,865 895	0,865 767	0,879 79	— 128
Alkohol	0,873 066	0,873 068	0,976 72	2
Glycerin	1,151 797	1,151 771	0,970 38	— 26
Chlorzink	0,898 332	0,898 295	1,378 60	— 37
Schwefelkohlenstoff	0,423 802	0,424 350	3,434 92	548
Flintglas von Rosette	0,883 821	0,883 911	1,739 50	91
Kalkspat	1,329 018	1,329 010	1,268 60	— 8
Flintglas von Merz	0,761 897	0,762 374	2,503 60	477

Für das Flintglas von Rosette hat Lommel gezeigt, dafs dessen Brechungsexponent noch hinreichend durch die Gleichung mit zwei Konstanten dargestellt wird; dafs für Schwefelkohlenstoff die Cauchysche Gleichung mit drei Konstanten ausreicht, werden wir in einem der nächsten Paragraphen zeigen.

Nach der ältern Dispersionstheorie sollte sich der Brechungsexponent mit wachsendem λ immer mehr einer bestimmten Grenze nähern. Derselbe ist in der Cauchyschen Reihe durch das konstante Glied gegeben, in welches die Reihe für $\lambda = \infty$ übergeht. In der Christoffelschen Formel ist diese Grenze $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$, denn setzen wir in derselben

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{\lambda_0}{\lambda}}+\sqrt{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}}$$

$\lambda = \infty$, so wird

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{n_0}{\sqrt{2}}.$$

Die Helmholtzsche Theorie ergibt eine solche Grenze nur unter der Voraussetzung, dafs $P = Q$ ist, denn in dem Falle wird für $\lambda = \infty$

$$n = \sqrt{1 + Q\lambda_m^2}.$$

Ist $P < Q$, so würde dieser Wert das Minimum sein, dem sich n mit wachsendem λ zunächst annähert; bei einem bestimmten Werte von λ wird dasselbe erreicht, und bei weiterm Wachsen von λ wächst dann n wieder bis ins Unendliche. Ist $P > Q$, so nimmt n mit wachsendem λ stets ab, wird kleiner als 1, und schliefslich, da n^2 dann negativ würde, imaginär, was heifsen würde, dafs Wellen über eine gewisse Länge in die brechenden Medien aus dem freien Äther nicht übergehen können.

Da wie wir sahen für die farblos durchsichtigen Medien immer sehr annähernd $\Sigma P = \Sigma Q$, so ist der Gang der Brechungsexponenten in farb-

[1]) Betreffs der Werte für die Flüssigkeiten sehe man § 30. Die Konstanten für Alkohol, Glycerin, concentrierte Lösung von Chlorzink gelten für 0°, Schwefelkohlenstoff für 24,°8. Die Brechungsexponenten des Flintglases von Merz habe ich Wiedem. Ann. Bd. VIII. p. 604 mitgeteilt.



los durchsichtigen Körpern mit grofser Annäherung so, dafs sie mit wachsendem λ sich einem konstanten Werte annähern. Für grofse Wellen würde somit jeder brechende Körper gewissermafsen wieder ein einfaches Medium, das sich nur durch gröfsere Dichtigkeit von dem freien Äther unterschiede.

§ 29.

Brechungsexponenten anomal dispergierender Medien. Messungen der Brechungsexponenten von anomal dispergierenden Substanzen liegen bisher noch nicht zahlreiche vor, es sind aufser den ersten von Christiansen[1]), der einige Lösungen von Fuchsin in Alkohol untersuchte und denjenigen von Kundt[2]), der die Brechungsexponenten von Lösungen von Cyanin und Fuchsin in Alkohol und übermangansaurem Kali in Wasser mafs, ausgedehntere Messungen von Sieben[3]) über Lösungen verschiedener Farbstoffe, Chlorophyll, Fuchsin, Cyanin, Anilinblau in Alkohol, Benzol etc. und von Ketteler[4]) über Lösungen von Cyanin in Alkohol.

Kundt giebt für eine concentrierte Lösung von Cyanin und eine solche von Fuchsin in Alkohol folgende Werte der Brechungsexponenten, n, und der Differenzen Δn der Brechungsexponenten der betreffenden Lösungen gegen Alkohol.

	Cyanin				Fuchsin	
	n	Δn			n	Δn
B	1,378 1	+ 139		B	1,387 3	+ 231
C	1,383 1	+ 182		C	1,391 8	+ 269
E	1,365 8	— 34		D	1,398 2	+ 315
F	1,370 5	— 7	äufserstes nicht absorhiertes Blau etwa	F	1,361 3	—
G	1,377 9	+ 29		G	1,366 8	— 82
H	1,382 1	—		H	1,375 9	—

Nachfolgende Tabelle enthält eine Anzahl der von Ketteler für mehrere verschieden concentrierte Cyaninlösungen gemessenen Brechungsexponenten. Die als concentriert bezeichnete Lösung war frisch bereitet und enthielt soviel Cyanin als aufgelöst werden konnte. Bei längerm Stehen schied sich wieder etwas des gelösten Cyanins ab, und die so entstandene Lösung ist als Normallösung bezeichnet. Die als Conc. $\frac{2}{3}$ bezeichnete wurde aus der Normallösung bereitet, indem zu zwei Volumteilen Lösung ein Teil Alkohol hinzugefügt wurde, die Lösung Conc. $\frac{1}{3}$, indem zu einem Teil Lösung zwei Teile Alkohol hinzugefügt wurden. Die Cyaninlösungen absorbieren von dem Spektrum das Orange, Gelb und einen grofsen Teil des Grünen, die von Ketteler gemessenen Brechungsexponenten reichen an der weniger brechbaren Seite des Absorptionsstreifens nur bis etwa zur Linie C und beginnen an der brechbaren Seite wieder etwas vor F. In dem ganzen Zwischen-

[1]) *Christiansen*, Poggend. Ann. Bd. CXLIII und CXLVI.
[2]) *Kundt*, Poggend. Ann. Bd. CXLV.
[3]) *Sieben*, Wiedem. Ann. Bd. VIII.
[4]) *Ketteler*, Wiedem. Ann. Bd. XII.

raum waren, wegen der Absorption des Lichtes, scharfe Messungen nicht möglich. Die letzte Kolumne der Tabelle giht die entsprechenden Brechungsexponenten des Alkohol. Die Temperatur, für welche die Brechungsexponenten gelten, ist 25° C.

Wellenl. λ	Brechungsexponenten n				
	Concentr.	Normallös.	Conc. $\frac{2}{3}$	Conc. $\frac{1}{3}$	Alkohol
7,867	1,378 35	1,369 93	—	1,361 97	—
7,555	1,380 23	1,371 28	1,366 98	1,362 79	1,357 43
7,267	1,382 65	1,373 01	—	1,363 59	1,357 89
7,015	1,285 66	1,374 95	1,369 66	1,364 64	—
6,785	—	1,377 63	1,371 60	1,365 91	—
6,591	—	1,381 22	—	1,367 59	1,359 22
—	—	—	—	—	—
4,957	—	—	—	1,364 81	—
4,898	—	—	—	1,365 28	1,365 06
4,838	—	1,364 49	—	1,365 73	—
4,733	—	1,366 20	—	1,366 76	—
4,682	—	1,366 90	1,367 72	1,367 20	—
4,582	—	1,368 53	1,368 79	1,368 08	1,367 11
4,504	—	1,369 77	1,369 56	1,369 24	1,367 61
4,275	1,373 26	—	1,372 32	1,371 00	1,369 40

Zur Prüfung der Theorie der Dispersion in den anomal dispergierenden Medien müssen wir auf die vollständige Helmholtzsche Gleichung zurückgehen

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = - \Sigma P\lambda^2 + \Sigma Q \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^4 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2\lambda^2}$$

$$2 n \varkappa = \Sigma Q \frac{\alpha \lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2\lambda^2}.$$

Die untersuchten Lösungen sind keinesfalls optisch einfache Medien, sie hestehen vielmehr aus dem durchsichtigen Lösungsmittel und der die Absorption und damit die anomale Dispersion bedingenden gelösten Suhstanz. Wir werden demnach in der Gleichung für n mindestens je zwei Glieder an der rechten Seite nehmen müssen, deren eines der Brechung und Dispersion des Alkohols entspricht, deren zweites dann die Dispersion des Farbstoffs liefert. Wenn wir auch nicht annehmen können, dafs die Brechung in dem Alkohol, nachdem er den Farbstoff gelöst hat, identisch ist mit derjenigen, welche der reine Alkohol hat, so wird man doch für das Lösungsmittel $\varkappa = 0$ setzen dürfen. Würde man dann für den Farhstoff nur eine Art von Molekülen annehmen, so würden die Gleichungen für die Brechungsexponenten einer solchen Lösung

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = - P_1\lambda^2 + Q_1 \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_{m_1}^2} - P_2\lambda^2 + Q_2 \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)}{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2}$$

$$2 n \varkappa = Q_2 \frac{\alpha \lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2},$$

deren erste sich schreiben läfst

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -(P_1 + P_2)\lambda^2 + Q_1 \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_{m_1}^2} + Q_2 \frac{\lambda^4(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)}{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2}.$$

Die beiden Gleichungen für n und $\varkappa$ enthalten sieben, oder wenn wir die Summe $P_1 + P_2$ als eine zusammenfassen, sechs Konstanten; zur numerischen Berechnung derselhen bedarf es daher mindestens dreier beobachteter Brechungsexponenten und der entsprechenden Absorptionskoefficienten. Dann liefert die zweite der Gleichungen die drei Konstanten Q_2, λ_{m_2} und α, und die erstere die drei übrigen Konstanten.

Ketteler hat, indem er gleichzeitig die Absorptionskoefficienten der Cyaninlösung gemessen hat, diese Rechnungen allerdings in etwas anderer Weise und mit einer etwas abweichenden Dispersionsgleichung, gegen deren Richtigkeit ich ebenso wie gegen den Ausgangspunkt der Kettelerschen Entwicklungen einige Bedenken habe, durchgeführt. Der Gang der Brechungsexponenten in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge ist aber nach den Kettlerschen Gleichungen im wesentlichen derselhe wie nach den Helmholtzschen, und durch etwas verschiedene Konstanten lassen sich nach beiden die beobachteten Brechungsexponenten darstellen. Eine Durchführung der Rechnungen würde hier viel zu weit führen, die Angabe der Kettelerschen Berechnungen unterlasse ich aus dem oben angegebenen Grunde, ich begnüge mich vielmehr damit zu zeigen, dafs der Gang der beobachteten Brechungsexponenten im grofsen und ganzen der Theorie entspricht.

Die vorgeführten Zahlen, sowohl die von Kundt als auch die von Ketteler entsprechen dem Kundtschen Satze, dafs wenn man sich im Spektrum mit abnehmender Wellenlänge, also von der roten Seite her dem Absorptionsstreifen nähert, die Brechungsexponenten sehr stark wachsen, dagegen wenn man sich demselben von der andern Seite her nähert, sehr stark abnehmen, bei sämtlichen angeführten Lösungen sind die Brechungsexponenten an der, kurz ausgedrückt, roten Grenze des Absorptionsstreifens gröfser als an der violetten.

Um die Übereinstimmung von Theorie und Erfahrung zu zeigen, müssen wir deshalb zunächst die Frage beantworten, wo denn der Absorptionsstreifen nach unsern Gleichungen liegen mufs. Da die Stärke der Absorption die Menge des in dem Körper zurückgehaltenen Lichtes durch die Gröfse des der Längeneinheit zukommenden Absorptionskoefficienten k bedingt wird, so liegt der Absorptionsstreifen im Spektrum dort, das heifst es werden die Wellenlängen in dem Teile des Spektrums zurückgehalten, wo k den gröfsten Wert hat. Wir erhalten diese Wellenlängen hinreichend genau, wenn wir diejenigen Werte von λ aufsuchen, für welche $2nk$ den gröfsten Wert hat, da die Werte von n nicht so sehr verschieden sind, dafs das Maximum von $2nk$ einem wesentlich andern Werte von λ entspricht, als das Maximum von k.

In der Differentialrechnung wird nun bewiesen, dafs eine Funktion für diejenigen Werte ihrer Veränderlichen einen gröfsten Wert hat, für welche der erste Differentialquotient der Funktion gleich null wird und der zweite Differentialquotient einen negativen Wert hat. Ohne auf den Beweis dieses Satzes näher einzugehen, erkennt man die Richtigkeit desselben aus der Bedeutung des Differentials leicht. Das erste Differential einer Funktion

bedeutet die Differenz zweier Werte der Funktion, welche zwei unendlich wenig von einander verschiedenen Werten der Veränderlichen entsprechen. Da wir nun dieses Differential der Funktion stets als das Produkt des Differentialquotienten und des Differentials der Veränderlichen schreiben können, folgt, dafs wenn der Differentialquotient gleich null ist, der Wert der Funktion für zwei unendlich nahe Werte der Veränderlichen sich gleich bleibt, das heifst also, dafs dieselbe an dieser Stelle weder zunimmt noch abnimmt. Ist ersteres der Fall, so hat die Funktion an dieser Stelle einen gröfsten, ist letzteres der Fall, einen kleinsten Wert. Ob nnn ein gröfster oder kleinster Wert vorhanden ist, läfst das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten der Funktion erkennen. Ist nämlich a der Wert der Funktion, wenn die veränderliche Gröfse den Wert λ hat, b für $\lambda + d\lambda$ und c für $(\lambda + d\lambda) + d\lambda$, so ist das zweite Differential

$$(c - b) - (b - a).$$

Ist der erste Differentialquotient gleich null, so heifst das $b = a$; ist dann der zweite negativ, so bedeutet das, dafs $b > c$, da wenn der zweite Differentialquotient negativ ist, anch die Differenz der beiden auf einander folgenden Differentialien der Funktion negativ sein mufs. Ist aber $b > c$, so folgt, dafs die Fnnktion, sobald sie infolge stetiger Znnahme der Veränderlichen λ den Wert b überschritten hat, kleinere Werte annimmt, oder an der Stelle von $b = a$ hat sie einen gröfsten Wert. Ist derselbe positiv, also $c > b$, so nimmt die Fnnktion bei weiterem Wachsen der Veränderlichen λ zu, also die Stelle von $b = a$ giht einen kleinsten Wert der Funktion.

Wir finden also den Maximalwert von $2nk$ und damit hinreichend nahe von k, wenn wir jenen Wert von λ anfsuchen, der den ersten Differentialquotienten des Ausdruckes

$$2nk = 2\pi Q \frac{\alpha\lambda^4}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2\lambda^2}$$

nach λ gleich null werden läfst.

Dieser Differentialquotient ist nach den Entwicklungen der mathematischen Einleitnng, insbesondere des Satzes EIII

$$2\pi Q \frac{\{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2\} 4\alpha\lambda^3 - \alpha\lambda^4 \{4\lambda(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2) + 2\alpha^2\lambda\}}{\{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2\}^2}.$$

Da unserer Voraussetzung nach Q von nnll verschieden, und da der Nenner für keinen endlichen Wert von λ null oder unendlich werden kann, so wird der Ausdruck null, wenn der Zähler null wird, wir haben also λ zu bestimmen aus der Gleichung

$$\{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2\} 4\alpha\lambda^3 - \alpha\lambda^4 \{4\lambda(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2) + 2\alpha^2\lambda\} = 0.$$

Da beide Glieder den Faktor λ enthalten, wird der Ausdruck zunächst gleich null für $\lambda = 0$, damit wird auch $k = 0$. Diesem Werte entspricht also, da k nicht negativ werden kann, der Minimalwert der Funktion. Zweitens wird die Gleichung null, wenn

$$4\{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2) + \alpha^2\lambda^2\} = \lambda\{4\lambda(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2) + 2\alpha^2\lambda\},$$

aus welcher man ohne Mühe ableitet

$$\lambda^2 = \frac{\lambda^4_{m_2}}{\lambda^2_{m_2} - \frac{\alpha^2}{2}}.$$

Dieser Wert von λ gibt dem Ausdrucke für $2nk$, und damit hinreichend dem Absorptionskoefficienten k seinen gröfsten Wert. Da α jedenfalls einen kleinen Wert hat, so folgt, dafs das Maximum der Absorption sehr nahe jene Wellenlänge trifft, welche gleich λ_m ist, oder auch, dafs annähernd diese Wellenlänge die Mitte des Absorptionsstreifens ist. Eine Annäherung an den Absorptionsstreifen bedeutet also eine Annäherung an die Wellenlänge λ_{m_2}, oder die absorbierten Teile des Spektrums sind jene, deren Wellenlängen nicht sehr von λ_{m_2} verschieden sind, die etwas gröfser und etwas kleiner als λ_{m_2} sind.

Die Gleichung für die Brechungsexponenten können wir schreiben

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -(P_1 + P_2)\lambda^2 + Q_1\lambda^4\left(\frac{1}{\lambda^2 - \lambda^2_{m_1}} + \frac{Q_2}{Q_1}\frac{\lambda^2 - \lambda^2_{m_2}}{(\lambda^2 - \lambda^2_{m_2})^2 + \alpha^2\lambda^2}\right).$$

Da man nur die Brechungsexponenten solcher Strahlen beobachten kann, welche nicht stark absorbiert werden, so kann man in dieser Gleichung $\varkappa^2$ vernachlässigen, und erhält dann direkt aus derselben n^2.

Der Einflufs des anomal dispergierenden gelösten Farbstoffes wird hauptsächlich durch das zweite Glied in der Klammer des zweiten Gliedes der rechten Seite ausgedrückt. Die Werte von n, welche man erhalten würde, wenn man $Q_2 = 0$ setzt, könnte man als die Brechungsexponenten des Lösungsmittels bezeichnen, welche sich indes von denen des reinen Lösungsmittels erheblich unterscheiden können, da wir keineswegs annehmen können, dafs nach Zwischenlagerung der gelösten Substanz die Konstanten P_1 und Q_1 denselben Wert haben wie für das Lösungsmittel, wenn es die Substanz nicht gelöst enthält.

Die Brechungsexponenten der farbigen Lösung sind dann gröfser als die des Lösungsmittels, wenn das Glied

$$\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\lambda^2 - \lambda^2_{m_2}}{(\lambda^2 - \lambda^2_{m_2})^2 + \alpha^2\lambda^2}$$

positiv ist, und um so mehr, je gröfser der Wert dieses Gliedes ist, sie sind kleiner als die des Lösungsmittels, wenn dieses Glied negativ ist, und wieder um so mehr, je gröfser der negative Wert desselben ist.

Der Nenner dieses Gliedes als die Summe zweier Quadrate ist notwendig positiv, das Vorzeichen desselben hängt also nur von dem Vorzeichen des Zählers ab. Daraus folgt, dafs für alle Werte $\lambda > \lambda_{m_2}$ die Brechungsexponenten gröfser sind als die des Lösungsmittels für alle Werte $\lambda < \lambda_{m_2}$ dagegen kleiner. An der roten Seite des Absorptionsstreifens findet somit infolge der Absorption eine Zunahme, an der violetten Seite eine Abnahme der Brechungsexponenten statt. Die Zunahme ist dort am gröfsten, wo das Glied

$$\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\lambda^2 - \lambda^2_{m_2}}{(\lambda^2 - \lambda^2_{m_2})^2 + \alpha^2\lambda^2}$$

seinen gröfsten Wert hat. Der entsprechende Wert von λ ergibt sich nach



dem Vorigen aus der Gleichung

$$\frac{Q_2}{Q_1} \frac{\{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2\} 2\lambda - (\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)\{4\lambda(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2) + 2\alpha^2\lambda\}}{\{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2\}^2} = 0.$$

Diese Gleichung kann nur null werden, wenn der Zähler zur Null wird, somit ist λ zu berechnen aus der Gleichung

$$2\{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2\} = 4(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + 2\alpha^2(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2),$$

aus der man unmittelbar erhält

$$(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 = \alpha^2\lambda_{m_2}^2$$

$$\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2 = \pm\,\alpha\lambda_{m_2}$$

$$\lambda^2 = \lambda_{m_2}^2\left(1 \pm \frac{\alpha}{\lambda_{m_2}}\right).$$

Man erkennt sofort, dafs das obere Vorzeichen des zweiten Gliedes in der Klammer dem gesuchten gröfsten Wert entspricht, denn nur mit diesem wird der Ausdruck

$$\frac{Q_2}{Q_1} \frac{\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2}{(\lambda^2 - \lambda_{m_2}^2)^2 + \alpha^2\lambda^2}$$

positiv. Dann erkennt man auch ohne weiteres, dafs der Wert

$$\lambda^2 = \lambda_{m_2}^2\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_{m_2}}\right)$$

der negativ gröfste Wert ist, den unser Ausdruck auf der violetten Seite des Absorptionsstreifens annehmen kann, auf welcher

$$\lambda < \lambda_{m_2}$$

ist. Demnach folgt, dafs die Brechungsexponenten der Lösung auf der roten Seite des Absorptionsstreifens mit abnehmender Wellenlänge um so mehr über die des Lösungsmittels sich erheben, je mehr sich die Wellenlänge dem Werte $\lambda^2 = \lambda_{m_2}^2\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_{m_2}}\right)$ nähert, der nur wenig gröfser ist als jener Wert der Wellenlänge, für welchen die Absorption ihr Maximum hat. Für diesen, wohl stets schon in dem Absorptionsstreifen liegenden Wert, dessen Brechungsexponent sich deshalb nicht mehr messen läfst, wird der Brechungsexponent am gröfsten. Nimmt λ weiter ab, so sinkt der Wert des Brechungsexponenten schnell, und für $\lambda = \lambda_m$ wird das zweite Glied der Klammer in dem zweiten Gliede der Gleichung für n^2 gleich null; bei weiterer Abnahme von λ wird es negativ, die Brechungsexponenten werden kleiner als die des Lösungsmittels. Der Brechungsexponent wird am kleinsten für

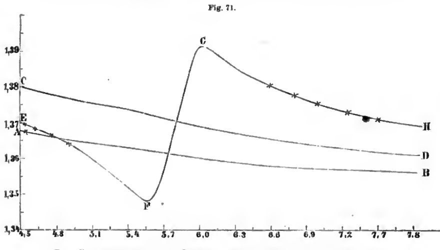
$$\lambda^2 = \lambda_{m_2}^2\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_{m_2}}\right),$$

um dann wieder allmählich zu wachsen und sich um so mehr dem des Lösungsmittels zu nähern, je kleiner λ wird. Dabei heben wir nochmals hervor, dafs die von uns kurz als Brechungsexponenten des Lösungsmittels bezeichneten Werte nicht jene der reinen Flüssigkeit, also bei den vorhin vorgeführten Zahlen Kundts und Kettelers nicht die des reinen Alkohols sind,

dafs wir vielmehr als Brechungsexponenten des Lösungsmittels jene Werte von n bezeichnet haben, welche der Gleichung für n ohne das letzte von λ_{m_2} abhängige Glied entsprechen.

Fig. 71 stellt den Gang der Brechungsexponenten dar, wie er etwa der Normallösung des Cyanins in Alkohol von Ketteler entspricht. Auf der Abscissenaxe sind die Wellenlängen aufgetragen, drei zehntel derselben nach unserer Bezeichnungsweise gleich 1^{cm}, auf der Ordinatenaxe die Brechungsexponenten, die hundertstel gleich 1^{cm}. Die Kurve AB gibt etwa die des reinen Alkohols, CD die des Lösungsmittels, welche bei $\lambda = \lambda_{m_2}$ die Kurve der Brechungsexponenten der Lösung gerade in der Mitte zwischen Minimum und Maximum schneidet. $EFGH$ ist dann die Kurve der Brechungsexponenten der Cyaninlösung. Die Mitte des Absorptionsstreifens entspricht etwa der Wellenlänge 5,9, die Beobachtungen liefsen sich indes nur bis zu einer ziemlichen Entfernung von der Mitte durchführen, auf der roten Seite nur bis zur Wellenlänge 6,6, auf der violetten bis zur Wellenlänge 4,84. Die von Ketteler beobachteten Werte sind in der Kurve angedeutet.

Fig. 71.



Der Zusammenhang der Brechungsexponenten und der Wellenlänge λ_m für das Maximum der Absorption ergibt auch sofort, dafs, wenn das Spektrum einer Lösung mehrere Absorptionsstreifen hat, der Gang der Brechungsexponenten der im § 20 nach den Beobachtungen von Kundt dargelegte sein mufs. Jedem Absorptionsstreifen entspricht ein bestimmter Wert von λ_m, und für jeden kommt in die Gleichung für n ein neues Glied, welches in der Nähe des Absorptionsstreifens den Gang der Brechungsexponenten in der Fig. 71 dargestellten Weise modificiert, es mufs also für jeden Absorptionstreifen bei Annäherung von der roten Seite an den Streifen stets ein Wachsen der Brechungsexponenten bis zu einem Maximum, beim Annähern von der violetten Seite eine Abnahme bis zu einem Minimum eintreten, das Maximum und Minimum selbst läfst sich indes nicht beobachten, weil dieselben in das Gebiet des absorbierten Lichtes fallen.

Es ergibt sich hiernach, dafs die Helmholtzsche Theorie der Brechung

und Dispersion des Lichtes uns über alle Erscheinungen desselben vollständig Rechenschaft zu geben imstande ist, sowohl über die Brechung und Dispersion in farblos durchsichtigen Mitteln als auch über jene in absorbierenden Mitteln. Wir werden bei Besprechung der Absorptionserscheinungen sehen, dafs sie noch weitere bemerkenswerte Folgerungen zuläfst.

§ 30.

Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Dichtigkeit der brechenden Körper. Schon die wenigen Zahlen Baden Powells für die Brechungsexponenten des Cassiaöles zeigen, dafs mit steigender Temperatur die Brechungsexponenten sich ändern. Für feste Körper ist diese Änderung im allgemeinen sehr unbedeutend, es tritt zuweilen ein Wachsen, zuweilen ein Abnehmen ein[1]); für Flüssigkeiten ist dagegen die Änderung sehr merklich, und zwar tritt dort mit steigender Temperatur stets eine Abnahme ein. Zunächst zeigte Jamin[2]) nach einer Methode, welche nur die Änderungen der Brechungsexponenten mit der Temperatur zu bestimmen gestattete, dafs der Brechungsexponent des Wassers stetig abnimmt; für Licht mittlerer Brechbarkeit erhielt er zwischen 0^0 und 30^0 den Brechungsexponenten des Wassers dargestellt durch die Gleichung

$$n_t = n_0 - 0{,}000\,012\,573\; t - 0{,}000\,001\,929\; t^2,$$

worin t die Temperatur nach Graden des hundertteiligen Thermometers bedeutet.

Dale und Gladstone[3]) zeigten dann bei einer Reihe von Flüssigkeiten, dafs die Abnahme der Brechungsexponenten mit steigender Temperatur zum Teil eine sehr rasche ist. So geben sie z. B. für Schwefelkohlenstoff folgende Zahlen.

Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs.

Temperatur	Brechungsexponenten			Abnahme für 5°		
	A	*D*	*H*	von *A*	von *D*	von *H*
0° C	1,621 7	1,644 2	1,717 5			
5	1,618 0	1,639 7	1,711 9	0,003 7	0,004 5	0,005 6
10	1,614 4	1,634 6	1,708 1	0,003 6	0,005 1	0,003 8
15	1,611 4	1,630 3	1,703 5	0,003 0	0,004 3	0,004 6
20	1,607 6	1,626 1	1,699 3	0,003 8	0,004 2	0,004 2
25	1,603 6	1,622 0	1,694 2	0,004 0	0,004 1	0,005 1
30	1,599 5	1,618 2	1,689 6	0,004 1	0,003 8	0,004 6
35	1,595 6	1,614 0	1,685 0	0,003 9	0,004 2	0,004 6
40	1,591 9	1,610 3	1,681 0	0,003 7	0,003 7	0,004 0
42,5	1,590 0	1,608 2	1,677 8	0,003 8	0,004 2	0,006 4

1) Man sehe § 69. Interferenz des Lichtes bei grofsen Gangunterschieden und *Stefan*, Wiener Berichte Bd. LXIII.

2) *Jamin*, Comptes Rendus XLIII p. 1191. Poggend. Ann. Bd. C.

3) *Dale* und *Gladstone*, Philosoph. Transactions for 1858.

Die Abnahme der Brechungsexponenten ist innerhalb dieses Temperaturintervalls für jeden Strahl bei gleichem Temperaturzuwachs konstant, für die verschiedenen Strahlen aber merklich verschieden; für A ist die Abnahme im Mittel für je $5^0 = 0{,}003\,7$, für $D = 0{,}004\,2$, für $H = 0{,}004\,8$. Es ergibt sich daraus, dafs mit steigender Temperatur nicht nur die Brechung, sondern auch die Dispersion abnimmt.

Wie wir im § 24 entwickelten, folgt aus der Emissionstheorie, dafs das specifische Brechungsvermögen eines Körpers, der Quotient

$$\frac{n^2 - 1}{d} = c$$

konstant sei.

Man hat vielfach versucht, auch aus der Undulationstheorie eine Beziehung zwischen den Brechungsexponenten und der Dichtigkeit einer Substanz abzuleiten, und hat je nach den Voraussetzungen, von denen man ausging, sehr verschiedene Beziehungen aufgestellt. Hoek[1]) glaubte aus der Undulationstheorie die Konstanz des specifischen Brechungsvermögens im Newtonschen Sinne ableiten zu können. Er ging dabei von der ältern Anschauung aus, dafs die Brechung darin ihren Grund habe, dafs in den brechbaren Körpern der Äther eine gröfsere Dichtigkeit habe, als im freien Raum, und dafs der Überschufs des in der Volumeinheit eines brechenden Körpers vorhandenen Äthers über den in der Volumeinheit des freien Raumes vorhandenen Äther fest mit den Molekülen des Körpers verbunden sei. Ist e die Elasticität des Äthers im freien Raum, σ die Dichtigkeit, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Raume

$$c = C\sqrt{\frac{e}{\sigma}}.$$

Ist die Dichtigkeit des Äthers im Innern des brechenden Körpers σ_1 und ist die Brechung lediglich Folge dieser gröfsern Dichtigkeit, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Innern des Körpers

$$c_1 = C\sqrt{\frac{e}{\sigma_1}},$$

somit ist dann

$$n^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma}$$

$$n^2 - 1 = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma} = \delta$$

oder der Überschufs des in einem brechenden Körper vorhandenen Äthers, die im gleichen Raume des freien Äthers vorhandene Menge gleich eins gesetzt, ist gleich dem um eins verminderten Quadrat des Brechungsexponenten.

Geben wir nun dem brechenden Körper durch Kompression oder Ausdehnung ein anderes Volumen, so wird bei der Annahme, dafs der Überschufs fest mit den Molekülen des Körpers verbunden ist, der in der

[1]) *Hoek*, Poggend. Ann. Bd. CXII.

Volumeinheit des komprimierten Körpers vorhandene Überschufs des Äthers verglichen mit der in der Volumeinheit des freien Raumes vorhandenen Äthermenge in demselben Verhältnis gröfser als das Volumen kleiner geworden ist. Würde der Körper zum Beispiel auf den halben Raum komprimiert, so würde der vorher in dem Volumen zwei vorhandene Überschufs jetzt im Volumen eins sein, der Wert von δ wäre also verdoppelt. Ist daher d_1 die Dichtigkeit eines Körpers nach der Kompression, δ_1 der Überschufs des in der Volumeinheit enthaltenen Äthers und sind d und δ die entsprechenden Werte vor der Kompression, so mufs

$$\delta_1 = \delta \frac{d_1}{d}$$

oder

$$\frac{\delta_1}{d_1} = \frac{\delta}{d} = \text{const.}$$

Ist ν der Brechungsexponent des komprimierten Körpers, so ist

$$\nu^2 - 1 = \delta_1 = \delta \frac{d_1}{d}; \quad \frac{\nu^2 - 1}{d_1} = \frac{\delta}{d} = \frac{n^2 - 1}{d},$$

oder das specifische Brechungsvermögen im Sinne der Emissionstheorie müfste bei Variation der Dichte eines Körpers konstant sein.

Nach der durch Entdeckung der anomalen Dispersion bedingten neuern Theorie der Brechung und Dispersion ist die obige Ableitung nicht mehr gültig; die von uns mitgeteilte Theorie führt überhaupt ohne besondere der Theorie fremde Hypothesen zu keiner Beziehung zwischen den Brechungsexponenten und der Dichte eines Körpers[1]). Es ist indes immerhin interessant zu untersuchen, ob die schon von Newton vermutete Beziehung zwischen den Brechungsexponenten und der Dichte eines Körpers in der That besteht.

Schrauff[2]) hat in einer Reihe von Abhandlungen in der That diese Beziehung vorzugsweise auf Beobachtungen von Dale und Gladstone gestützt nachweisen zu können geglaubt, indem er an Stelle der Brechungsexponenten das konstante Glied der Cauchyschen Dispersionsgleichung zu seinen Rechnungen benutzte. Wie wir sahen läfst sich auch nach der Helmholtzschen Theorie dieses Glied als der Grenzwert auffassen, dem sich die Brechungsexponenten mit wachsender Wellenlänge annähern, so dafs wir es auch als den Brechungsexponenten bezeichnen können, den das Mittel haben würde, wenn keine Dispersion stattfände. Man benutzt zu den Rechnungen dieses Glied, weil die Erfahrung zeigt, dafs auch die Dispersion sich mit der Dichte eines Körpers ändert.

Dale und Gladstone[3]) selbst interpretierten ihre Versuche nicht in der Weise wie Schrauff, sie folgerten vielmehr aus denselben, dafs sehr viel näher der Ausdruck

$$\frac{A - 1}{d} = \text{const.},$$

[1]) Man sehe *Ketteler*, Wiedem. Ann. Bd. VII; *Helmholtz*, Pogg. Ann. CLIV.
[2]) *Schrauff*, Poggend. Ann. Bd. CXVI, CXVIII, CXIX, CXXVI und physikalische Studien. Wien 1867.
[3]) *Dale* und *Gladstone*, Philosophical Transactions for 1863.

wenn wir mit A das konstante Glied der Dispersionsgleichung bezeichnen, und d die Körperdichte ist, konstant sei. Sie schlossen das aus ihren Versuchen über die Änderung der Brechungsexponenten mit der Temperatur. Der Einfluſs der Temperatur auf die Körper besteht nämlich darin, daſs ihre Dichtigkeit sich ändert. Wir werden diese Änderung in der Wärmelehre besprechen. Eine Vergleichung der Änderung der Brechungsexponenten und der Körperdichten mit der Temperatur gestattet daher die Frage, ob einer der beiden Ausdrücke und welcher konstant sei, zu beantworten.

Folgende kleine Tabelle enthält einige der von Dale und Gladstone gegebenen Zahlen für Schwefelkohlenstoff, Wasser und Alkohol.

Substanz	Temperatur	$\frac{1}{d}$	A	$\frac{A-1}{d}$	$\frac{A^2-1}{d}$
Schwefelkohlenstoff	11° C.	0,955 4	1,596 0	0,569 4	1,478 2
	22,5	0,968 5	1,586 5	0,568 0	1,471 4
	36,5	0,985 4	1,575 3	0,566 9	1,459 9
Wasser	1°	0,999 9	1,322 7	0,322 7	0,749 5
	15,5	1,000 7	1,322 8	0,323 0	0,749 7
	27,5	1,003 4	1,321 6	0,322 7	0,749 2
	48°	1,010 9	1,319 3	0,322 7	0,748 6
Alkohol	0°	0,913 2	1,359 8	0,328 6	0,775 4
	20°	0,932 6	1,351 8	0,328 0	0,771 4
	40°	0,953 4	1,343 5	0,327 5	0,767 5
	60°	0,976 2	1,334 7	0,326 8	0,763 0

Die letzte Kolumne dieser Tabelle läſst deutlich erkennen, daſs das specifische Brechungsvermögen im Sinne der Emissionstheorie mit abnehmender Dichtigkeit ebenfalls abnimmt, daſs dagegen der Quotient $\frac{A-1}{d}$ mit sehr groſser Annäherung konstant ist. Dale und Gladstone nennen deshalb diesen Quotienten das specifische Brechungsvermögen, und schlieſsen aus ihren Versuchen, daſs dieses Vermögen konstant sei, und daſs die geringe Änderung, die sich zuweilen zeige, dem Einflusse der Dispersion zuzuschreiben sei.

Gleichzeitig mit Dale und Gladstone untersuchte Landolt[1]) die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Körperdichte, indem auch er die Änderung der Brechungsexponenten mit steigender Temperatur mit der aus den Untersuchungen Kopps bekannten Änderung der Dichtigkeit verglich. Auch Landolt gelangt zu dem Resultate, daſs der Quotient $\frac{A-1}{d}$ als konstant angesehen werden könne, wie sich aus folgenden Zahlen ergibt.

[1]) *Landolt*, Poggend. Annal. Bd. CXVII, CXXII, CXXIII.

Substanz	Temperatur	d	A	$\frac{A-1}{d}$	$\frac{A^2-1}{d}$
Propionsäure	18° C	0,997 0	1,377 2	0,378 4	0,899 4
	24°	0,990 5	1,374 7	0,378 3	0,898 4
	28°	0,986 1	1,373 2	0,378 5	0,898 1
Äthylalkohol	12°	0,805 4	1,356 4	0,442 6	1,047 2
	20°	0,798 6	1,353 2	0,442 3	1,040 8
	28°	0,791 7	1,350 2	0,442 3	1,039 6
Bittermandelöl	16°	1,049 6	1,511 3	0,487 2	1,223 3
	20°	1,045 7	1,509 4	0,487 1	1,222 4
	26°	1,040 1	1,506 5	0,487 0	1,220 6

Bei den Versuchen von Landolt und mehr noch bei denen von Dale nnd Gladstene zeigt sich noch eine kleine stetige Änderung des Quotienten $\frac{A-1}{d}$, welche indes möglicherweise ihren Grund darin haben kann, dafs die zu diesen Untersuchungen benutzten Präparate nicht mit denen von Kopp identisch waren.

Es sind deshalb späterhin gleichzeitig von Rühlmann[1]) und mir[2]) Versuche angestellt, um die Frage zu entscheiden, ob der Quotient $\frac{A-1}{d}$ in der That als ganz konstant anzusehen sei; Rühlmann benutzte zu seinen Versuchen destilliertes Wasser, ich anfserdem eine Reihe anderer Flüssigkeiten, deren Dichtigkeit ich selbst in den verschiedenen Temperaturen bestimmte. Beide gelangten wir zu dem Resultate, dafs die Konstanz dieses Quotienten nur eine angenäherte sei. Die Strahlen, welche Rühlmann benutzt hat, liegen leider zu nahe zusammen, um die Konstante A mit Sicherheit berechnen zu können; ich erhalte für die Brechungsexponenten des Wassers den Ausdruck

$$n_\lambda = 1{,}326\,067 - 0{,}000\,099\, t + \frac{0{,}305\,31}{\lambda^2},$$

worin n_λ den Brechungsexponenten des Strahles von der Wellenlänge λ und t die Temperatur in Graden der Centesimalskala bedeutet. Wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, stellt diese Gleichung die Beobachtungen van der Willigens ebenfalls vollständig dar. Für 19°,5 wird darnach der Brechnngsexponent der Strahlen

	C	D	F
nach Wüllner	1,331 21	1,332 95	1,337 17
„ van der Willigen[3])	1,331 22	1,333 07	1,337 20
„ Landolt[4])	1,331 15	1,332 76	1,337 17
„ Rühlmann	—	1,332 91	—

Wie man sieht stimmen diese Zahlen his auf einige Einheiten der

[1]) *Rühlmann*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII.
[2]) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXIII.
[3]) *Van der Willigen*, Poggend. Annal. Bd. CXXII.
[4]) *Landolt*, Poggend. Annal. Bd. CXXIII.

fünften Decimale überein. Mit dem von mir bestimmten Werte von A und den Koppschen Zahlen für die Dichtigkeit des Wassers werden die Werte der Quotienten $\frac{A-1}{d}$

bei 10° . . 0,325 156
„ 15° . . 0,324 848
„ 20° . . 0,324 635
„ 30° . . 0,324 456

Für ein ziemlich wasserfreies Glycerin fanden sich die Brechungsexponenten gegeben durch die Gleichung

$$n_\lambda = 1{,}454\,262 - 0{,}000\,268\,3\,t + \frac{0{,}404\,553 - 0{,}000\,066\,9\,t}{\lambda^2},$$

die Dichtigkeiten durch

$$d = 1{,}250\,73 - 0{,}000\,635\,t$$

innerhalb der Temperaturen 15° und 35°. Für den Quotienten ergibt sich daraus

$$\frac{A-1}{d} = 0{,}363\,25 - 0{,}000\,031\,0\,t.$$

Für Alkohol ist innerhalb derselben Temperaturgrenzen

$$n_\lambda = 1{,}360\,86 - 0{,}000\,384\,t + \frac{0{,}325\,707 - 0{,}000\,200\,8\,t}{\lambda^2}$$

$$d = 0{,}812\,81 - 0{,}000\,85\,t$$

$$\frac{A-1}{d} = 0{,}443\,96 - 0{,}000\,008\,2\,t.$$

Für eine gesättigte Lösung von Chlorzink in Wasser, sie enthielt auf 100 Wasser 254,735 Chlorzink, erhielt ich zwischen 20° und 40°

$$n_\lambda = 1{,}494\,538 - 0{,}000\,285\,7\,t + \frac{0{,}633\,266 - 0{,}000\,100\,7\,t}{\lambda^2}$$

$$d = 1{,}968\,16 - 0{,}001\,153\,t$$

$$\frac{A-1}{d} = 0{,}251\,26 + 0{,}000\,002\,8\,t.$$

Für Schwefelkohlenstoff schliefslich wurden die Konstanten der Cauchyschen Dispersionsformel von 3 Konstanten zwischen 7° und 24° [1])

[1]) *Verdet* gibt Annales de chim. et de phys. 3. Serie. t. LXIX. die Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs für 24°, 2 C. an. Die im Text aus meinen Beobachtungen abgeleitete Gleichung führt genau auf die *Verdet*schen Werte bei einer Temperatur von 24°, 8 C., wie folgende kleine Tabelle zeigt.

Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs.

	B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
beobachtet	1,611 4	1,614 7	1,624 0	1,636 8	1,648 7	1,672 8	1,695 6
berechnet	1,611 539	1,614 721	1,623 979	1,636 739	1,648 738	1,672 961	1,695 550
Differenz	+ 1 39	+ 0,21	− 0,21	− 0,61	+ 0,38	+ 1,61	− 0,50

Wie man sieht, erreichen die Differenzen zwischen Beobachtung und Rech-

$$A = 1{,}601\,500 - 0{,}000\,753\,9\,t$$
$$B = 1{,}170\,258 - 0{,}000\,595\,6\,t$$
$$C = 10{,}098\,56 - 0{,}022\,900\,0\,t,$$

ferner

$$d = 1{,}293\,66 - 0{,}001\,506\,t$$
$$\frac{A-1}{d} = 0{,}464\,96 - 0{,}000\,042\,4\,t.$$

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich, dafs die Konstanz des Quotienten aus dem um eins verminderten Brechungsexponenten und der Dichtigkeit auch bei Flüfsigkeiten nur eine angenäherte ist, dafs sie bei einigen Flüssigkeiten, wie beim Alkohol, fast erreicht ist, dafs bei einigen dieser Quotient mit der Temperatur abnimmt, bei andern, wie bei der Chlorzinklösung, mit abnehmender Dichtigkeit gröfser wird. Bei Temperaturintervallen von 20°, bei denen die Änderung der Dichte und der Brechungsexponenten schon die zweite Decimale erreichen kann, bleibt die Änderung der Quotienten im allgemeinen noch in der vierten Decimale.

Vor kurzem haben H. A. Lorentz[1]) und L. Lorenz[2]) auf Grund ganz anderer theoretischer Grundlagen zur Ableitung der Lichtbrechung eine andere Beziehung zwischen dem Brechungsexponenten und der Dichte eines Körpers entwickelt. Obgleich der Ausgangspunkt der Entwicklung ein sehr verschiedener ist, gelangen beide zu dem Ausdruck

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} = \text{const.} \;.\;.\;.\;.\; \text{(a).}$$

H. A. Lorentz geht dabei von der sogenannten elektromagnetischen Lichttheorie Maxwells aus, auf welche wir im 4. Bande kurz hinweisen werden, L. Lorenz legt eine sehr eigentümliche Auffassung der Brechung zu Grunde. Er nimmt, wie es auch wir gethan haben, an, dafs die brechenden Körper aus Molekülen mit zwischen gelagertem Äther bestehen, dann aber nimmt er nicht an, wie es sonst alle Theorien des Lichtes thun, dafs das Licht sich nur im Äther fortpflanzt, und dafs eine Änderung der Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung in den brechenden Körpern ihren Grund darin hat, dafs durch die Wechselwirkung der Moleküle des Körpers und des Äthers die elastischen Kräfte, durch welche die Bewegung in den Körpern sich fortpflanzt, andere werden, sondern dafs das Licht sich durch den Äther und durch die körperlichen Moleküle fortpflanzt. In dem zwischen den Molekülen befindlichen Äther soll das Licht sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen wie im freien Äther, in den Molekülen dagegen mit einer

nung nur zweimal die 4. Decimale, Unterschiede, welche bei dem Schwefelkohlenstoff um so sicherer innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Unsicherheit liegen, da die Brechungsexponenten des Strahles *B* für jeden zehntel Grad um 76, für den Strahl *G* um 88 Einheiten der 6. Decimale sich ändern. Die von *van der Willigen* (Archives du Musée Teyler III (1) p. 55) mitgeteilten Beobachtungen der Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs liefern fast identisch dieselben Werte für die Temperatur 24°,65.

[1]) *H. A. Lorentz*, Wiedem. Ann. Bd. IX.

[2]) *L. Lorenz*, Wiedem. Ann. Bd. XI. Die Theorie des Lichtes nach seiner eigentümlichen Auffassung hat Lorenz ausführlicher entwickelt Poggend. Ann. Bd. CXVIII, CXXI.

kleinern Geschwindigkeit; die Abnahme der Geschwindigkeit des Lichtes im Innern der brechenden Körper hat also darin ihren Grund, dafs ein Teil des Weges, nämlich der auf die Moleküle fallende, mit kleinerer Geschwindigkeit zurückgelegt wird. Die Rechnungen, welche aus dieser Theorie zur Bestimmung des Brechungsexponenten sich ergeben, sind ziemlich verwickelt, wir gehen auf dieselben nicht ein, da kein Anlafs vorhanden ist, derselben vor der Helmholtzschen Theorie einen Vorzug zu geben, um so weniger, da die anomale Dispersion aus derselben sich nicht ergibt. Die elektromagnetische Lichttheorie liefert bisher überhaupt noch keine Dispersion des Lichtes.

H. A. Lorentz hat die Konstanz der von ihm gegebenen Beziehung an meinen Beobachtungen geprüft, indem er die Änderungen der Konstanten A der Cauchyschen Dispersionsgleichung aus der beobachteten Änderung der Dichtigkeit berechnete. Die Übereinstimmung der so berechneten Änderung mit der beobachteten ist nicht gröfser, als sie sich mit zu Grundelegung der Relation

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.} \quad \ldots \ldots \text{(h)}$$

ergibt, wie unter andern folgende Zahlen zeigen. Als Abnahme der Konstanten A für je 1^0 C ergab sich für

	beobachtet	berechnet aus *a*	*b*
Glycerin	0,000 263	0,000 260	0,000 227
Alkohol	0,000 384	0,000 419	0,000 377
Chlorzink	0,000 286	0,000 340	0,000 290
Schwefelkohlenstoff	0,000 754	0,000 860	0,000 700.

Für Glycerin ist somit die nach der Lorentzschen Relation berechnete Abnahme der beobachteten erheblich näher, für die andern Flüfsigkeiten dagegen die nach der Relation (*b*) berechnete Abnahme sehr viel weniger von der beobachteten verschieden.

Lorenz und nach ihm Prytz[1]) haben eine Prüfung der Relation vorgenommen, indem sie die Brechungsexponenten der Flüssigkeiten mit derjenigen ihrer Dämpfe verglichen haben, wir kommen auf diese Versuche im § 32 zurück. Wir werden dort auch die Versuche Mascarts besprechen, der durch Messung der Brechungsexponenten der Gase unter verschiedenem Drucke die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Dichtigkeit zu bestimmen versucht hat.

§ 31.

Brechungsexponenten von Mischungen und Lösungen. Soweit eine der im vorigen Paragraphen besprochenen Beziehungen zwischen den Brechungsexponenten und der Dichte einer Substanz gültig ist, läfst sich mit derselben auch der Brechungsexponent einer Mischung verschiedener Substanzen aus den Brechungsexponenten der Bestandteile berechnen. Diese Folgerung wurde zuerst von Biot und Arago für die Brechung von Gasen

[1]) *Prytz*, Wiedem. Ann Bd. XI.

gezogen in dem Satze, dafs die brechende Kraft eines Gasgemisches gleich sei der Summe der brechenden Kräfte der Bestandteile; sie ist dann wohl zuerst von Hoek[1]) auch auf die Mischung von Flüssigkeiten ausgedehnt worden. Mischen wir u Volume einer Snhstanz mit v Volumen einer zweiten und entstehen w Volume des Gemisches, so hat sich jeder der beiden Bestandteile anf w Volume ausgedehnt. Waren die Dichtigkeiten beider Bestandteile vor der Mischung d_1 und d_2, so sind sie nach der Mischung $d_1 \frac{u}{w}$ und $d_2 \frac{v}{w}$. Ist das specifische Brechungsvermögen der einen Substanz s_1, der zweiten s_2, wo unter dem specifischen Brechungsvermögen einer der im vorigen Paragraphen behandelten Ausdrücke zu verstehen ist, also wenn für den ersten Bestandteil der Brechungsexponent resp. der konstante Wert, dem dieselben mit wachsendem λ sich annähern, gleich a_1 ist, entweder

$$s_1 = \frac{a_1^2 - 1}{d_1} \text{ oder } s_1 = \frac{a_1 - 1}{d_1} \text{ oder } s_1 = \frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 + 2} \cdot \frac{1}{d_1},$$

so erhalten wir die hrechenden Kräfte der Bestandteile in den Mischnngen, indem wir die specifischen Brechungsvermögen derselhen mit den Dichtigkeiten der Bestandteile in den Mischungen multiplicieren. Dieselben sind somit

$$s_1 \cdot d_1 \frac{u}{w} \text{ und } s_2 d_2 \frac{v}{w}.$$

Ist A der konstante Wert, dem sich die Brechungsexponenten des Gemisches mit wachsender Wellenlänge annähern, D die Dichtigkeit des Gemisches und S das specifische Brechungsvermögen desselben, so ist nach dem Satze von Arago und Biot

$$S \cdot D = s_1 d_1 \frac{u}{w} + s_2 d_2 \frac{v}{w}$$

$$S \cdot D \cdot w = s_1 d_1 u + s_2 d_2 v.$$

Nnn ist Dw, das Produkt aus Dichtigkeit und Volumen, das Gewicht P der Mischung, $d_1 u$, das Produkt aus der Dichtigkeit und dem Volumen des einen Bestandteiles vor der Mischung das Gewicht p_1 dieses Bestandteiles und ebenso $d_2 v = p_2$ das Gewicht des zweiten Bestandteiles. Wir können deshalh die zweite Gleichung auch schreiben

$$SP = s_1 p_2 + s_2 p_2 \quad \ldots . \text{(I)},$$

oder das Produkt aus dem specifischen Brechungsvermögen einer Mischnng und dem Gewichte derselben ist gleich der Summe der Produkte aus dem specifischen Brechungsvermögen der einzelnen Bestandteile jedes multipliciert mit dem in der Mischung vorhandenen Gewichte des betreffenden Bestandteiles. Setzen wir das specifische Brechungsvermögen des Gemisches

$$S = \frac{A - 1}{D},$$

so wird diese Gleichung

$$\frac{A - 1}{D} \cdot P = \frac{a_1 - 1}{d_1} p_1 + \frac{a_2 - 1}{d_2} p_2 \quad \ldots . \text{(Ia)}.$$

[1]) *Hoek*, Poggend. Ann. Bd. CXII.



Landolt[1]) hat zuerst durch eine Anzahl von Messungen gezeigt, dafs die Gleichung in der letzten Form sehr nahe erfüllt ist.

Landolt benutzte zu seinen Rechnungen anstatt der konstanten Teile der Brechungsexponenten den Brechungsexponenten von C; folgende Tabelle enthält einige der von ihm gegebenen Zahlen.

Substanz	Gewicht	Dichtigkeit	n_C beobachtet	n_C berechnet
Methylalkohol	96	0,796 4	1,327 9	
Amylalkohol	88	0,813 5	1,405 7	
Mischung	184	0,803 8	1,364 0	1,364 4
Äthylalkohol	92	0,801 1	1,360 5	
Amylalkohol	88	0,813 5	1,405 7	
Mischung	180	0,806 5	1,382 2	1,382 1
Äthylalkohol	46	0,801 1	1,360 5	
Amylalkohol	176	0,813 5	1,405 7	
Mischung	222	0,810 4	1,396 1	1,396 0
Essigsäure	60	1,051 8	1,370 6	
Buttersäure	88	0,961 0	1,395 3	
Mischung	148	0,993 0	1,385 0	1,384 7

Ich habe später bei der schon im vorigen Paragraphen erwähnten Untersuchung ebenfalls diese empirische Relation in sehr ausgedehnter Weise untersucht, indem ich eine Reihe verschiedener Gemische aus den

[1]) *Landolt*, Poggend. Ann. Bd. CXXIII. Man sehe auch dessen Abhandlung über optische Analyse von Flüssigkeitsgemischen in Liebigs Annalen IV. Supplementband 1864. Die obige Relation ist zuerst von *Berthelot* (Annales de chim. et de phys. III. Série T. XLVIII) und *Schrauff* (Poggend. Ann. CXIX) indem

$$S = \frac{A^2-1}{D}$$

gesetzt wurde, auch benutzt worden, um die Brechungsexponenten flüssiger chemischer Verbindungen aus denjenigen der Bestandteile zu berechnen. Setzt man P gleich dem Molekulargewicht der Verbindung, p_1, p_2 .. gleich den Atomgewichten der Bestandteile, und nennt die Produkte SP, $s_1 p_1$ ... in der zuerst von Schrauff eingeführten Bezeichnung Refraktionsäquivalente, so läfst sich obiger Satz dahin aussprechen, dafs das Refraktionsäquivalent einer Verbindung gleich ist der Summe der Refraktionsäquivalente der Bestandteile. *Landolt* (Poggend. Ann. CXXIII), *Gladstone* (Proceedings of Royal Society. London. Bd. XVIII, Journal of the chemical Society Bd. VIII) und *Brühl* (Liebigs Annalen Bd. CC, CCIII) legten bei ihren Untersuchungen über die Beziehung zwischen der chemischen Konstitution und der Lichtbrechung als specifisches Brechungsvermögen den Ausdruck

$$S = \frac{A-1}{D}$$

zu Grunde. Besonders Brühl gelangte bei seiner ausgedehnten Untersuchung zu sehr interessanten für die Chemie bedeutsamen Resultaten, indem er zeigte, dafs das Refraktionsäquivalent einer Verbindung nicht nur von der Zusammensetzung, sondern auch von der Art, wie die Atome aneinander gelagert sind, abhängig ist. Ein so hohes Interesse diese Untersuchungen auch bieten, so müssen wir uns doch damit begnügen hier darauf hinzuweisen, da eine nähere Besprechung ein zu tiefes Eingehen auf das Gebiet der organischen Chemie verlangen würde.

dort erwähnten Flüssigkeiten herstellte, und deren Brechungsexponenten in derselben Weise bestimmte, wie die der einzelnen Flüssigkeiten. Für vier Gemische aus Alkohol und Glycerin, für welche einzelne Flüssigkeiten die Konstanten im vorigen Paragraphen mitgeteilt sind, erhielt ich folgende Werte der Konstanten:

1. Gemisch aus 1 Alkohol 4 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}433\,283 - 0{,}000\,289\,1\,t + \frac{0{,}394\,516 - 0{,}000\,134\,t}{\lambda^2}$$

$$D = 1{,}141\,55 - 0{,}000\,660\,t.$$

2. Gemisch aus 1 Alkohol 2 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}419\,385 - 0{,}000\,301\,0\,t + \frac{0{,}372\,719 - 0{,}000\,163\,4\,t}{\lambda^2}$$

$$D = 1{,}074\,20 - 0{,}000\,725\,t.$$

3. Gemisch aus 1 Alkohol 0,998 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}403\,238 - 0{,}000\,325\,1\,t + \frac{0{,}356\,845 - 0{,}000\,200\,9\,t}{\lambda^2}$$

$$D = 0{,}997\,48 - 0{,}000\,750\,t.$$

4. Gemisch aus 1 Alkohol 0,499 7 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}390\,209 - 0{,}000\,350\,4\,t + \frac{0{,}351\,017 - 0{,}000\,234\,4\,t}{\lambda^2}$$

$$D = 0{,}937\,10 - 0{,}000\,805\,t.$$

Bilden wir mit diesen und mit den im vorigen Paragraphen erhaltenen Werten die beiden Seiten der vorhin für die Gemische aufgestellten Gleichung, so werden dieselben

	$\frac{A-1}{D} \cdot P$	$\frac{a_1-1}{d_1} \cdot p_1 + \frac{a_2-1}{d_2} \cdot p_2$
1.	1,897 75 — 0,000 168 5 t	1,896 96 — 0,000 132 2 t
2.	1,171 23 — 0,000 050 4 t	1,170 46 — 0,000 070 0 t
3.	0,807 69 — 0,000 044 5 t	0,806 49 — 0,000 039 0 t
4.	0,624 57 — 0,000 024 5 t	0,625 73 — 0,000 023 7 t.

Wie man sieht zeigt sich hier eine angenäherte aber keine vollständige Übereinstimmung, die beiden Seiten der Gleichungen weichen sowohl in ihrem konstanten als in ihrem von der Temperatur abhängigen Teile von einander ab, so dafs bei gewissen Temperaturen die beiden Seiten in der That vollständig gleich werden, so z. B. für das erste Gemisch bei der Temperatur 22,9.

Lösen wir unsere Gleichung nach A auf für 20^0, so erhalten wir aus der rechten Seite der Gleichung die Werte,

für 1 . . 1,427 491	während	beobachtet	ist	1,427 501
„ 2 . . 1,413 007	„	„	„	1,413 365
„ 3 . . 1,396 590	„	„	„	1,396 736
„ 4 . . 1,383 714	„	„	„	1,383 211,

so dafs die berechneten und beobachteten Werte in der 4. Decimale um bis 5 Einheiten differieren.

Ist die Differenz der Brechungsexponenten der Bestandteile des Gemisches bedentend, wie bei Gemischen aus Alkohol nnd Schwefelkohlenstoff, so kann der Unterschied zwischen den so berechneten nnd den beobachteten Zahlen indes selbst die 3. Decimale erreichen.

Gibt man dem specifischen Brechungsvermögen die Bedeutung, welche Lorentz ihr gegeben, jetzt also

$$S = \frac{A^2 - 1}{A^2 + 2} \frac{1}{d},$$

so sind die Abweichungen zwischen den beobachteten und den für die Mischung berechneten Zahlen ungefähr von gleicher Ordnnng, so wird für die Mischung 1 Alkohol mit 4 Glycerin der beobachtete Wert 1,139 0, der berechnete 1,138 5 für die Temperatur 0°.

Für die chemischen Verbindungen gibt H. A. Lorentz an, dafs mit dem so bestimmten specifischen Brechungsvermögen die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung erheblich geringer sei als mit der von Landolt benntzten Relation[1]).

Mit demselben Grade von Genauigkeit wie für Mischungen verschiedener Flüssigkeiten gilt die eben abgeleitete Beziehung anch für Salzlösungen. Eine direkte Prüfung so wie bei den Mischungen ist hier nicht möglich, da man die Brechungsexponenten und Dichtigkeiten der festen Salze im allgemeinen nicht mit derselben Genauigkeit bestimmen kann. Man kann sie indes prüfen, indem man verschieden concentrierte Lösungen mit einander vergleicht. Setzen wir voraus, man habe p_1 Gr. Salz in 100 Gr. Wasser gelöst, und es sei jetzt a_1 der Brechungsexponent, d_1 die Dichtigkeit des Salzes, so können wir Gleichung (Ia) schreiben:

$$\frac{A-1}{D}(100 + p_1) = \frac{a-1}{d} \cdot 100 + \frac{a_1 - 1}{d_1} \cdot p_1 \ldots (a).$$

Stellen wir eine zweite Lösung mit p_2 Gr. desselben Salzes her, so erhalten wir

$$\frac{A_1 - 1}{D_1}(100 + p_2) = \frac{a-1}{d} \cdot 100 + \frac{a_1 - 1}{d_1} \cdot p_1 \ldots (b)$$

und aus beiden Gleichungen znsammen

$$\frac{\frac{A_1 - 1}{D_1}(100 + p_2) - \frac{a-1}{d} \cdot 100}{\frac{A-1}{D}(100 + p_1) - \frac{a-1}{d} \cdot 100} = \frac{p_2}{p_1} \ldots \ldots (c).$$

Ich habe die Prüfung dieser Beziehung dnrch Börner[2]) in meinem Laboratorinm vornehmen lassen; derselbe bestimmte die Brechungsexponenten von je drei Lösungen, von 10, 20, 30 Gr. Salz auf 100 Wasser, einer Reihe

[1]) *H. A. Lorentz*, Wiedem. Ann. Bd. IX.

[2]) *Börner*, Über die Brechungsverhältnisse einiger Salzlösungen. Inauguraldissertation. Marburg, 1869.

von Salzen für die drei Strahlen des Wasserstoffspektrums, und konnte so die Konstanten A und B der Canchyschen Formel bestimmen. So erhielt Börner für Kochsalzlösungen folgende Ausdrücke für die Brechungsexponenten:

I. Lösung von 10 Gr. Salz in 100 Wasser:

$$n_\lambda = 1,342\,419 - 0,000\,151\,1\,t + \frac{0,341\,110 - 0,000\,166\,9\,t}{\lambda^2},$$

II. Lösung von 20 Gr. Salz in 100 Wasser:

$$n_\lambda = 1,355\,207 - 0,000\,159\,1\,t + \frac{0,368\,263 - 0,000\,200\,6\,t}{\lambda^2};$$

III. Lösung von 30 Gr. Salz in 100 Wasser:

$$n_\lambda = 1,366\,528 - 0,000\,169\,4\,t + \frac{0,391\,877 - 0,000\,234\,3\,t}{\lambda^2}.$$

Die Gleichungen sind gültig zwischen 20 und 40°. Die Prüfung obiger Beziehung führte Börner nun in der Weise aus, dafs er die Gleichung (c) nach A_1 auflöste, in die Gleichung dann als A den beobachteten Wert einer andern Lösung einsetzte und so dann A_1 berechnete. Für a, den konstanten Teil des Brechungsexponenten des Wassers, setzte er den von mir bestimmten Wert und die Dichtigkeit D der verschiedenen Salzlösungen entnahm er aus den Tabellen von Gerlach[1]). Im Folgenden sind die auf diese Weise für die Temperatur von 30° berechneten Werte mit den beobachteten zusammengestellt:

	A berechnet	A beobachtet	Dichtigkeit
I_2	1,337 92	1,337 89	I = 1,061 55
I_3	1,337 91	1,337 89	II = 1,118 09
II_3	1,350 43	1,350 43	III = 1,168 73.

Die Indices unten rechts an der Bezeichnung der Lösung, für welche der Brechungsexponent berechnet ist, geben an, welcher als bekannt vorausgesetzt wurde. Der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung findet sich hier nur in der 5. Decimale. In andern Fällen erstreckt sich derselbe bis in die 4. Decimale, so dafs in der That die Beziehung sich auch hier mit sehr grofser Annäherung gültig erweist.

Da man mit dieser Beziehung die Brechungsexponenten einer Lösung nur dann berechnen kann, wenn man die einer andern desselben Salzes kennt, und da die Rechnung nach obiger Gleichung gerade nicht sehr bequem ist, so ist es von Interesse zu fragen, ob man nicht die Abhängigkeit der Brechungsexponenten einer Lösung von ihrem Procentgehalt einfach als eine Funktion des letztern darstellen könne. Beer und Kremers[2]) haben diese Frage zuerst aufgenommen, und an einer ziemlichen Zahl von Lösungen gezeigt, dafs man die Differenz zwischen den Brechungs-

[1]) *Gerlach*, Specifische Gewichte der gebräuchlichsten Salzlösungen. Freiberg, 1859.

[2]) *Beer* und *Kremers*, Poggend. Ann. Bd. CI.

exponenten für rotes Licht einer Salzlösung von p Gr. Salz auf 100 Wasser und des Wassers bei derselben Temperatur darstellen kann durch

$$\Delta = ap - bp^2.$$

Versuche von Hoffmann[1]) und die erwähnten Versuche von Börner zeigten, dafs man im allgemeinen noch ein drittes Glied mit p^3 hinzunehmen mufs, wenn man die beobachteten Exponenten bis auf 4 Decimalen genau darstellen will. So erhielt Börner unter andern für Kochsalz

$$\Delta = 0{,}001\,481\,3\,p - 0{,}000\,015\,265\,p^2 + 0{,}000\,000\,001\,18\,p^3,$$

für Chlorkalium

$$\Delta = 0{,}001\,292\,p - 0{,}000\,013\,56\,p^2 + 0{,}000\,000\,128\,p^3,$$

für Glaubersalz

$$\Delta = 0{,}001\,434\,p - 0{,}000\,015\,77\,p^2 + 0{,}000\,000\,143\,3\,p^3.$$

Wie man sieht reicht in den beiden letzten Fällen bei 30% der Einflufs des dritten Gliedes schon in die dritte Decimale; eine einfache Beziehung zwischen den Brechungsexponenten und dem Procentgehalt einer Salzlösung ergibt sich demnach nicht.

§ 32.

Brechungsexponenten der Gase. Auch die Brechungsexponenten der Gase kann man mittels Ablenkung der Strahlen durch Prismen bestimmen. Biot und Arago[2]) wandten ein dem Fraunhoferschen ähnliches Verfahren an, indem sie die Ablenkung, welche ein Lichtstrahl durch ein nach einander mit verschiedenen Gasen gefülltes Hohlprisma erfährt, am Theodolithen direkt mafsen. Man erhielt auf diese Weise das Brechungsverhältnis des Lichtes bei dem Übergange aus Luft in die verschiedenen Gasarten. Um den Brechungsexponenten beim Übergange des Lichtes aus dem leeren Raume in Luft zu bestimmen, untersuchten sie die Brechung des Lichtes beim Übergange aus Luft von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft in ein Prisma, welches mit Luft verschiedener Dichtigkeit gefüllt war, und sie fanden, dafs die Brechung des Lichtes je nach der Dichtigkeit der Luft verschieden war. Dichtere Luft als diejenige der Atmosphäre ist ein stärker, verdünntere Luft ein schwächer brechendes Mittel. Das Gesetz, welches Arago und Biot aus ihren Versuchen ableiteten, war folgendes. Die brechende Kraft der Luft ist ihrer Dichtigkeit proportional, das specifische Brechungsvermögen ist konstant. Die Luft ist somit optisch dichter als der leere Raum, ihr absoluter Brechungsexponent ist gröfser als 1.

Der absolute Brechungsexponent der Luft ist für die Dichtigkeit bei einer Temperatur 0° und 760mm Druck gleich 1,000 294. Wie man denselben aus diesen Beobachtungen ableiten kann, mag folgendes Beispiel zeigen.

---

[1]) *Hoffmann*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIII.

[2]) *Arago* und *Biot*, Mémoires de l'Académie de France. Tome VII. 1806; auch Gilberts Annalen Bd. XXV u. XXVI.

Ist das Prisma mit Luft von der Dichte unter einem Drucke zweier Atmosphären angefüllt, so beobachtet man an dem durchtretenden Lichtstrahl eine bestimmte Ablenkung, welche uns den Brechungsexponenten aus Luft gewöhnlicher Dichte in diejenige doppelter Dichte gibt. Es sei n dieser Brechungsexponent, und n' der absolute Brechungsexponent der Luft von der als 1 angenommenen Dichtigkeit der Atmosphäre. Der absolute Brechungsexponent der doppelt so dichten Luft ist dann nach § 15 gleich $n \,.\, n'$. Da nun nach dem ersten Satze das specifische Brechungsvermögen der Luft, für welches wir den Wert $\frac{n-1}{d}$ einsetzen, konstant ist, so folgt:

$$\frac{(n \,.\, n') - 1}{2} = n' - 1$$

und daraus

$$(n - 2)\, n' = -1,$$

$$n' = \frac{1}{2 - n}.$$

Oder setzen wir allgemein die Dichtigkeit der Luft in dem Prisma d, und den Brechungsexponent beim Übergange des Lichtes aus Luft von gewöhnlicher Dichte in diese gleich n, so wird

$$\frac{(n \,.\, n') - 1}{d} = n' - 1,$$

$$(n - d)\, n' = 1 - d,$$

$$n' = \frac{1 - d}{n - d}.$$

Für $d = 2$ ist nun nach den Beobachtungen $n = 1{,}000\,294$, demnach

$$n' = \frac{1}{0{,}999\,706} = 1{,}000\,294,$$

oder der absolute Brechungsexponent der Luft ist gleich 1,000 294. Durch Variationen von d erhält man immerfort denselben Wert für n' aus dem jedesmaligen Werte für n, so dafs dadurch das Aragosche Gesetz in aller Strenge bewiesen wird.

Den absoluten Brechungsexponenten für Luft kann man auch, wie Delambre es gethan hat, auf astronomischem Wege ableiten. Alle Gestirne, welche nicht im Zenith stehen, senden ihre Strahlen auf die Oberfläche der Atmosphäre unter einem je nach ihrer Höhe verschiedenen Einfallswinkel; die Strahlen werden daher von ihrer geraden Richtung abgelenkt. Da nun die Lichtstrahlen durch eine Reihe von Mitteln so gebrochen werden, als träten sie direkt in das letzte Mittel ein, so ist die Ablenkung trotz der Abnahme der Dichtigkeit in der Höhe der Atmosphäre gerade so, als träten sie sofort in die untern dichtern Schichten der Atmosphäre.

Durch diese Ablenkung der Strahlen erscheinen die Sterne nicht an ihrem wahren Ort, sondern gegen den Zenith hin verschoben, da die Strahlen beim Eintritte in das dichtere Mittel dem Einfallslote genähert werden. Die Zenithdistanz der Gestirne, welche wir beobachten, ist also kleiner als die wahre, welche die Astronomie kennen lehrt. Die wahre Zenithdistanz gibt

uns den Winkel, welchen die von den Sternen kommenden Strahlen mit dem Einfallslote bilden, die scheinbare Zenithdistanz den Winkel, welchen die in die Atmosphäre eingedrungenen Strahlen mit dem Einfallslote bilden, den Brechungswinkel. Aus beiden können wir somit den absoluten Brechungsexponenten der Luft bestimmen. Delambre bestimmte ihn zu 1,000 294, ein Wert, mit dem der Aragosche genau übereinstimmt. Berechnet man umgekehrt aus diesem Werte von n' die Werte von n beim Übergange aus Luft von der Dichte 0^0 und dem Drucke der Atmosphäre in Luft verschiedener Dichte mit Hülfe des Aragoschen Gesetzes, so findet man dieselben Zahlen, welche die Beobachtung ergibt, ein neuer Beweis für die Richtigkeit des Aragoschen Gesetzes.

Die Versuche, welche diese beiden Physiker mit andern Gasen als atmosphärischer Luft anstellten, ergaben auch für diese, daſs die brechende Kraft jedes Gases bei verschiedenen Dichtigkeiten der Dichtigkeit proportional sei.

Für Gasgemische finden sie, daſs die brechende Kraft der Gemische gleich ist der Summe der brechenden Kräfte der einzelnen Bestandteile, also durch direkte Beobachtung dasselbe Gesetz, welches wir vorhin für Flüssigkeitsgemische als mit groſser Annäherung gültig ableiteten.

Das von Arago und Biot angegebene Gesetz, nach welchem die brechenden Kräfte der Gase bei verschiedener Dichtigkeit den Dichtigkeiten proportional sind, benutzte Dulong zu einem Verfahren, welches ihm gestattete, die Brechungsexponenten der Gase mit bedeutend gröſserer Genauigkeit zu bestimmen.

Ein Hohlprisma, das aus einem weiten Glasrohr hergestellt war, dessen beide Enden abgeschliffen und durch zwei unter einem Winkel von 145° gegen einander geneigte Spiegelglasplatten geschlossen waren, stand mit einem groſsen Glascylinder in Verbindung, in welchem das wohlgetrocknete zu untersuchende Gas aufgefangen wurde. Das Gas war über Quecksilber abgeschlossen und der Druck, unter welchem es stand, wurde durch ein mit dem Glascylinder kommunicierendes Rohr, welches oben offen und zum Teil ebenfalls mit Quecksilber gefüllt war, gemessen. Die Dichtigkeit des Gases in dem Glascylinder konnte durch Ablassen von Quecksilber beliebig reguliert werden.

An der einen Seite in der Verlängerung der Axe des Rohres, das als Prisma diente, war ein Fernrohr aufgestellt, welches auf eine durch das Prisma hindurch sichtbare Marke gerichtet war, so daſs dieselbe am Fadenkreuz des Fernrohres erschien, wenn das Prisma mit trockner Luft von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft gefüllt war. Das Fernrohr sowie das Prisma und die Marke waren unverrückbar festgestellt.

Um nun die Brechungsexponenten anderer Gase zu bestimmen, wurde das Prisma und der Cylinder durch eine ebenfalls damit in Verbindung stehende Luftpumpe luftleer gemacht und statt dessen das zu untersuchende Gas eingefüllt, und die Dichtigkeit des Gases so lange geändert, bis die Marke dem Beobachter wieder genau am Fadenkreuz des Fernrohres erschien. Dann war die Ablenkung des Lichtes durch das Prisma genau dieselbe wie vorhin, als der Apparat mit Luft gefüllt war. Die brechende Kraft des Gases bei der beobachteten Dichtigkeit war daher dann dieselbe wie diejenige der Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre und nach



dem Gesetze von Arago und Biot erhält man dann die brechende Kraft des Gases, wenn es unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, im Vergleich zur brechenden Kraft der Luft durch eine einfache Proportion und aus dem bekannten absoluten Brechungsindex der Luft erhält man den der Gase.

Sei also z. B. das Fernrohr auf die feste Marke eingestellt, als das Prisma mit trockner Luft unter dem Drucke 760^{mm} angefüllt war. Darauf werde anstatt der Luft Cyangas eingeführt. Die feste Marke erscheint dann wieder an dem Fadenkreuz des Fernrohres, wenn der Druck, unter welchem das Gas steht, gleich ist 268,3 Millimeter. Ist nun d' die Dichtigkeit des Cyangases bei gleicher Temperatur unter dem Drucke von 760^{mm} und d diejenige unter dem beobachteten Drucke, so folgt

$$d' : d = 760 : 268{,}3.$$

Die brechende Kraft des Cyangases bei der Dichtigkeit d ist nun gleich 1, wenn wir die der Luft unter dem Drucke der Atmosphäre gleich der Einheit setzen. Ist der Brechungsexponent des unter dem Drucke 760 stehenden Cyangases gleich n', so ist dann seine brechende Kraft gleich $n' - 1$, und nach dem Aragoschen Gesetze ist

$$\frac{n' - 1}{d'} = \frac{1}{d},$$

$$n' - 1 = \frac{d'}{d} = \frac{760}{268{,}3} = 2{,}832,$$

wobei die der Luft bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke als Einheit zu Grunde liegt. Die brechende Kraft der Luft ihrem absoluten Werte nach ist nun unter den Umständen

$$n - 1 = 0{,}000\,294,$$

demnach ist die des Cyangases

$$n' - 1 = 2{,}832 \,.\, 0{,}000\,294 = 0{,}000\,833,$$

und daraus folgt der Brechungsexponent des Cyangases

$$n' = 1{,}000\,833.$$

Auf diese Weise hat Dulong für eine grofse Menge von Gasen die Brechungsexponenten bestimmt; sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Dulong setzte allerdings das um 1 verminderte Quadrat des Brechungsexponenten als brechende Kraft ein, bei dem kleinen Werte der Exponenten ergibt das im schliefslichen Resultat in den ersten 6 Decimalen keinen Unterschied.

Tabelle der Brechungsexponenten der Gase bei 0° und 760mm Druck nach Dulong.

Name der Gase	Dichte	Brechende Kraft, die der Luft = 1	Absolute Brechungs-exponenten
Atmosphärische Luft....	1,000	1,000	1,000 294
Sauerstoffgas..........	1,102 6	0,924	1,000 272
Wasserstoffgas.........	0,068 5	0,470	1,000 138
Stickstoffgas..........	0,976	1,020	1,000 300
Chlorgas............	2,47	2,623	1,000 772
Stickoxydulgas........	1,527	1,710	1,000 503
Stickoxydgas..........	1,039	1,03	1,000 303
Chlorwasserstoffgas.....	1,254	1,527	1,000 449
Kohlenoxydgas........	0,972	1,157	1,000 340
Kohlensäuregas........	1,524	1,526	1,000 449
Cyangas.............	1,818	2,832	1,000 834
Ölbildendes Gas........	0,980	2,302	1,000 678
Sumpfgas............	0,559	1,504	1,000 443
Salzsäureäther.........	2,234	3,72	1,001 095
Cyanwasserstoff........	0,944	1,531	1,000 451
Phosgengas..........	3,442	3,936	1,001 159
Schwefelwasserstoff.....	1,178	2,187	1,000 644
Schweflige Säure.......	2,247	2,260	1,000 665
Schwefeläther.........	2,580	5,197	1,001 53
Schwefelkohlenstoff.....	2,644	5,110	1,001 50
Phosphorwasserstoffgas..	1,256	2,682	1,000 789

Aus diesen Zahlen lassen sich mit Dulong folgende Resultate ziehen:

1) Die brechenden Kräfte der verschiedenen Gase scheinen in durchaus keiner Beziehung zur Dichte zu stehen, weder die der einfachen noch der zusammengesetzten.

2) Die brechenden Kräfte der zusammengesetzten Gase sind nicht die Summe der brechenden Kräfte der einzelnen Bestandteile. Das von Arago und Biot aufgefundene Gesetz bezieht sich demnach nur auf Gasgemische, deren Bestandteile nicht chemisch auf einander einwirken[1]).

So besteht z. B. 1 Volum Chlorwasserstoffgas aus $\frac{1}{2}$ Vol. Wasserstoff + $\frac{1}{2}$ Vol. Chlor, die ohne Kondensation zusammentreten. In der Verbindung ist nun die Dichtigkeit des Wasserstoffgases die Hälfte von der des freien Wasserstoffgases unter gleichem Druck; ebenso die des Chlors. Nach dem Biot-Aragoschen Gesetze sind daher die brechenden Kräfte, die der Luft unter gleichem Drucke gleich 1 gesetzt,

des Wasserstoffs in der Verbindung $0{,}5 \cdot 0{,}470 = 0{,}235$
des Chlors „ „ „ $0{,}5 \cdot 2{,}623 = 1{,}311\,5$
die der Verbindung gleich der Summe beider $= 1{,}546\,5$

[1]) *Dulong*, Annales de chim. et de phys. T. XXXI. p. 154. Poggend. Ann. Bd. VI.

Die Beobachtung hat dagegen für dieses zusammengesetzte Gas ergeben 1,527, der Unterschied 0,019 5 ist viel zu grofs, als dafs er den möglichen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden könnte. Man beobachtet nach Dulongs Angabe im Fernrohr noch eine Verschiebung der Marke bei einem Druckunterschiede von 0,25^{mm}. Wäre demnach in diesem Falle die Beobachtung der brechenden Kraft der Chlorwasserstoffsäure um diesen ganzen Wert fehlerhaft, so würde der Fehler noch nicht 0,001 im schliefslichen Resultate ausmachen. Ähnliche Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung, welche bei der Cyanwasserstoffsäure sogar auf 0,130, und beim Stickoxydul auf 0,228 steigen, nie aber einen kleinern Wert erhalten als in unserm Beispiele, zeigen alle übrigen zusammengesetzten Gase.

Wir haben bisher die Brechungsexponenten der Gase ganz ohne Berücksichtigung der Dispersion besprochen; in der That hat man vielfach und lange angenommen[1]), dafs in Gasen die Brechungsexponenten aller Farben gleich seien, dafs das Licht also in den Gasen keine Dispersion erfahre, obschon vielfach bei frühern astronomischen Beobachtungen eine Dispersion in der Atmosphäre beobachtet war[2]). Neuere Versuche von Le Roux[3]) haben jedoch die Dispersion in Gasen über allen Zweifel erhoben, und Ketteler[4]) ist es zuerst gelungen dieselbe zu messen.

Die Methode, welche Ketteler zu seinen Versuchen benutzte, werden wir im zweiten Abschnitte besprechen; er benutzte den Jaminschen Interferentialrefraktor. Mit demselben bestimmte er die Brechungsexponenten dreier Strahlen, eines roten, der Lithiumflamme, eines gelben, der Natriumflamme, und eines grünen, der Thalliumflamme. Die Wellenlängen dieser Strahlen sind in zehntausendstel Millimetern

$$\lambda_L = 6{,}706\,1 \qquad \lambda_N = 5{,}888\,0 \qquad \lambda_{Th} = 5{,}345\,1.$$

Die von Ketteler gefundenen Brechungsexponenten für diese verschiedenen Strahlen bei verschiedenen Gasen sind folgende:

Name der Gase	Brechungsexponenten		
	n_L	n_N	n_{Th}
Gewöhnliche Luft	1,000 293 669	1,000 294 704	1,000 295 669
Trockne Luft	—	1,000 294 602	—
Kohlensäure	1,000 447 68	1,000 449 22	1,000 450 72
Cyan	1,000 779 54	1,000 784 40	1,000 788 98
Wasserstoff	1,000 142 28	1,000 142 94	1,000 143 56
Schweflige Säure	1,000 681 55	1,000 686 01	1,000 690 21

Die Versuche Kettelers zeigen, dafs die Dispersion der farblos durchsichtigen Gase ganz den Gesetzen entspricht, die wir auch für feste und

[1]) *Cauchy*, Comptes Rendus. T. II. *Beer*, Einleitung in die höhere Optik.
[2]) *Arago*, Comptes Rendus. T. II. p. 459.
[3]) *Le Roux*, Ann. de chim. et de phys. 3. Série. T. LXI.
[4]) *Ketteler*, Beobachtung über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn bei Henry 1865.

flüssige Körper erhalten haben. Im weitern haben Le Roux[1]) und Kundt[2]) gezeigt, dafs bei stark absorbierenden Gasen ebenso die anomale Dispersion auftritt, Le Roux beobachtete dieselbe bei dem Jodgase, Kundt bei Natriumdampf. Bei dem Joddampf fand Le Roux, dafs das rote Licht stärker abgelenkt wird als das violette, eine Messung der Dispersion gelang wegen ihrer zu geringen Gröfse nicht, das Spektrum hatte bei Anwendung eines Prismas, dessen brechender Winkel 125° betrug, eine Breite von 30″. Hurion[3]) gelang es indes die Brechungsexponenten des Joddampfes für rotes und violettes Licht zu messen. Er fand für denselben

$$\text{rot} \quad n = 1{,}002\,05$$
$$\text{violett} \quad n = 1{,}001\,92.$$

In ausgedehnterer Weise haben sich später Mascart[4]), L. Lorenz[5]) und Prytz[6]) mit der Messung der Brechungsexponenten von Gasen und Dämpfen beschäftigt, vorzugsweise um mit Hülfe derselben die Beziehung zwischen Brechungsexponenten und Körperdichte zu untersuchen. Lorenz und Prytz wandten bei ihren Versuchen dieselbe Methode an wie Ketteler, Mascart eine im Princip gleiche, in der Form nur wenig verschiedene, welche wir ebenfalls im zweiten Abschnitte besprechen werden.

Die Methode von Mascart liefert direkt die Differenzen der Brechungsexponenten n_2 und n_1, welche der Dichte d_2 und d_1 eines Gases entsprechen, indem zwei Lichtbündel zur Interferenz gebracht werden, deren eines durch eine Röhre gegangen ist, in welcher konstant die Dichtigkeit des Gases auf d_1 gehalten wird, während in der andern Röhre die Dichtigkeit allmählich von d_1 auf d_2 wachsen gelassen wird[7]). Infolge der wachsenden Dichtigkeit des Gases in der zweiten Röhre treten Interferenzstreifen auf, welche an dem Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs vorbei wandern. Ist L die Länge der beiden Röhren, λ die Wellenlänge des angewandten Lichtes und f die Anzahl der am Fadenkreuz vorüber gewanderten Interferenzstreifen, wenn die Dichte des Gases von d_1 auf d_2 gewachsen ist, so ist

$$n_2 - n_1 = f\,\frac{\lambda}{L}.$$

Nimmt man an, dafs für die Gase die Beziehung besteht

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.},$$

so mufs

$$\frac{n_2-1}{d_2} = \frac{n_1-1}{d_1},$$

woraus weiter folgt

$$\frac{n_2-n_1}{d_2-d_1} = \frac{n_2-1}{d_2} = \frac{n_1-1}{d_1} = \text{const.}$$

---

[1]) *Le Roux*, Comptes Rendus T. LV. p. 126. Poggend. Ann. Bd. CXVII.
[2]) *Kundt*, Wiedem. Ann. Bd. X.
[3]) *Hurion*, Annales de l'école normale. II. Série. T. VI.
[4]) *Mascart*, Annales de l'école normale. II. Série. T. VI.
[5]) *L. Lorenz*, Wiedem. Ann. Bd. XI.
[6]) *K. Prytz*, Wiedem. Ann. Bd. XI.
[7]) Man sehe § 68 Untersuchungen mit dem Interferentialrefraktor.

Da für eine gegebene Röhrenlänge L und eine bestimmte Wellenlänge λ der Quotient $\frac{\lambda}{L}$ konstant ist, so mufs, wenn die Beziehung zwischen Brechungsexponent und Dichte besteht,

$$\frac{n_2 - n_1}{d_2 - d_1} = \frac{f}{d_2 - d_1} \cdot \frac{\lambda}{L} = \text{const.}$$

somit, wenn wir mit k eine Konstante bezeichnen,

$$f = k\,(d_2 - d_1)$$

sein, oder die Zahl der vorüber wandernden Interferenzstreifen mufs der Differenz der Dichtigkeit des Gases in den beiden Röhren proportional sein. Würden die Gase genau dem Mariotteschen Gesetze folgen, also die Dichtigkeit derselben dem Drucke proportional sein, so müfste die Zahl der vorüberwandernden Streifen auch einfach der Differenz der Drucke in den beiden Röhren proportional sein. Wie wir wissen ist das nicht der Fall; nach den Versuchen von Regnault[1]) kann man die Dichtigkeit der Gase in ihrer Abhängigkeit vom Drucke darstellen durch eine Gleichung von der Form

$$d = AH\,(1 + BH),$$

wenn A und B zwei Konstanten und H den Druck bedeutet, unter welchem das Gas steht. Für f folgt daraus

$$f = kA\,(H_2 - H_1)\,(1 + B\,\{H_2 + H_1\})$$

oder

$$\frac{f}{H_2 - H_1} = kA\,(1 + B\,\{H_2 + H_1\}).$$

Mascart fand, dafs in der That der Wert von f durch solche Gleichungen mit für die verschiedenen Gase verschiedenen Konstanten sich darstellen lasse, indem er von verschiedenen Drucken H_1 ausging und zu andern Drucken H_2 überging, liefsen sich die Konstanten kA und B dieser Gleichung bestimmen.

Mit Hülfe dieser so bestimmten Konstanten ergibt sich der irgend einem Drucke H entsprechende Brechungsexponent in folgender Weise. Setzen wir in die Gleichung für $n_2 - n_1$ den Wert von f ein, so wird

$$n_2 - n_1 = \frac{\lambda}{L}\,kA\,(H_2 - H_1)\,\{1 + B\,(H_2 + H_1)\}.$$

Nehmen wir an, der Druck H_1 sei gleich null, so wird $n_1 = 1$, und setzen wir dann für n_2 und H_2 die Werte n und H, so wird

$$n - 1 = \frac{\lambda}{L}\,kAH\,(1 + BH).$$

In folgender Tabelle sind die von Mascart für die verschiedenen Gase gefundenen Werte von kA und von B angegeben, zugleich mit der Temperatur, bei welcher für dieselben die Versuche angestellt sind.

[1]) Man sehe Bd. I. § 98.

Namen der Gase	Temp. °C.	kA	B	B_1	Temp.
Luft	21,6	1,206 9	0,000 725	0,001 20	4°
Stickstoff	21	1,229 7	0,000 855	0,000 72	5°
Sauerstoff	13.5	1,153 7	0,001 110	0,001 65	9°,3
Wasserstoff	22,0	0,577 57	— 0,000 865	— 0,000 48	4° u. 10°
Kohlenoxyd	12,0	1,441 4	0,000 890	0,003 8	9°,3
Kohlensäure	17,0	1,882 5	0,007 250	0,008 7	3°
Stickoxydul	13,5	2,104 0	0,008 800	0,008 0	9°,3
Stickoxyd	12°	0,170 85	0,000 750	0,002 0	9°,3
Cyan	25°	3,250	0,027 7	0,031 6	7°,7
Schweflige Säure	0	0,380 7	0,025	0,033 3	1°,7.

Ist die Voraussetzung, dafs das specifische Brechungsvermögen in dem von Mascart angewandten Sinne konstant sei, richtig, so müssen die aus den Beobachtungen sich ergebenden Werte von B mit denjenigen übereinstimmen, welche sich aus den Versuchen über die Kompressibilität der Gase ergeben. Mascart hat deshalb die Versuche von Regnault durch Gleichungen der obigen Form für d dargestellt. Die Werte für B, die sich dann ergeben, wenn ebenfalls das Meter Quecksilber als Druckeinheit genommen wird, sind in obiger Tabelle unter B_1 angeführt, und in der letzten Kolumne sind die Temperaturen angegeben, bei welchen Regnault seine Kompressionsversuche angestellt hat.

Die Koefficienten B und B_1 sind allerdings nicht absolut gleich, indes weichen die meisten doch nicht zu bedeutend von einander ab, und besonders tritt die nahe Übereinstimmung dadurch hervor, dafs für Wasserstoff B ebenso wie B_1 negativ ist. In Anbetracht, dafs es sich hier um sehr kleine Gröfsen handelt, die besonders betreffs der Kompressibilität schwer scharf zu messen sind, meint Mascart, könne man die Unterschiede als innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler liegend ansehen. Nur bei Stickoxyd und Kohlenoxyd übersteigen die Differenzen diese Grenzen, indes meint Mascart mit Recht, dafs der aus den Versuchen Regnaults abgeleitete Koefficient B_1 für Kohlenoxyd ohne Zweifel zu grofs sei, während für Stickoxyd seine eigenen Versuche nicht die Genauigkeit besessen hätten, um den Koefficienten B mit aller Sicherheit zu bestimmen.

Ebenso wie durch Veränderung des Druckes kann man bei konstantem Druck eine Änderung der Gasdichte hervorbringen durch Änderung der Temperatur. Bezeichnen wir die Dichtigkeit des Gases bei irgend einem Drucke und der Temperatur des schmelzenden Eises mit d_0, so ist dieselbe bei der Temperatur t

$$d = \frac{d_0}{1 + \alpha t},$$

wenn α der Ausdehnungskoefficient des Gases ist, der für die meisten Gase nur wenig von dem Werte 0,003 67 abweicht. Ist n der Brechungsexponent des Gases unter irgend einem Drucke bei der Temperatur t, dagegen n_0 bei der Temperatur 0° und unter demselben Drucke, dem die Dichtigkeit d_0 entspricht, so mufs, wenn das specifische Brechungsvermögen von der Temperatur unabhängig ist, die Änderung der Temperatur also nur so weit Einflufs hat, als sie die Dichtigkeit des Gases ändert,

$$\frac{n-1}{d} = \frac{n_0 - 1}{d_0}$$

oder wenn wir d durch seinen Wert ersetzen und auf beiden Seiten mit d_0 multiplicieren

$$(n-1)(1+\alpha t) = n_0 - 1.$$

Die bei gleichem Druck, aber verschiedenen Temperaturen beobachteten Brechungsexponenten müssen demnach in dem Maſse abnehmen, daſs ihr Überschuſs über eins multipliciert mit dem Faktor $1+\alpha t$ konstant sein muſs.

Die Bestimmung des Temperatureinflusses bei dem Verfahren von Mascart ist sehr einfach. Wir erhielten für die Zahl f der an dem Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs vorübergehenden Interferenzstreifen, wenn der Druck von H_1 auf H_2 wächst, bei gegebener Temperatur

$$f = k(d_2 - d_1).$$

Nehmen wir an, es würde bei Anwendung der Drucke H_1 und H_2 eine Beobachtung bei der Temperatur 0^0 gemacht, und seien d_{20} und d_{10} die Dichten des Gases bei dieser Temperatur, so ist

$$f_0 = k(d_{20} - d_{10}).$$

Wird nun bei ganz denselben Drucken eine Beobachtung bei der Temperatur t gemacht, so wird

$$d_2 = \frac{d_{20}}{1+\alpha t} \qquad d_1 = \frac{d_{10}}{1+\alpha t},$$

die Zahl f der zwischen denselben Druckgrenzen vorüber wandernden Streifen muſs somit

$$f = \frac{k}{1+\alpha t}(d_{20} - d_{10}) = \frac{f_0}{1+\alpha t}$$

$$f(1+\alpha t) = f_0;$$

die Zahl f der bei gleichen Änderungen des Druckes, aber verschiedenen Temperaturen am Fadenkreuz vorüber wandernden Streifen multipliciert mit dem Faktor $1+\alpha t$ muſs somit konstant sein.

Die Versuche ergaben, daſs in der That das Produkt $f(1+\alpha t)$ konstant war, daſs man aber für α bei den meisten Gasen einen etwas gröſsern Wert α' einsetzen muſste als der Ausdehnungskoefficient ist. Folgende Tabelle stellt die Werte der Ausdehnungskoefficienten α und der aus den Beobachtungen Mascarts sich ergebenden Werte α' zusammen.

Namen der Gase	α	α'	$\alpha' - \alpha$
Luft	0,003 67	0,003 82	0,000 15
Stickstoff	3 67	3 82	15
Wasserstoff	3 661	3 78	12
Kohlenoxyd	3 67	3 67	00
Kohlensäure	3 71	4 06	35
Stickoyxdul	3 71	3 88	17
Stickoyxd	3 67	3 67	00
Schweflige Säure	3 90	4 60	70.

Es würde somit hiernach mit wachsender Temperatur eine von der Dichtigkeitsabnahme unabhängige Abnahme der Brechungsexponenten stattfinden, wie es sich auch bei den meisten Flüssigkeiten zeigt.

Nach Versuchen von von Lang [1]) findet indes bei Luft das Gegenteil statt; derselbe mafs direkt die Brechung, wenn ein Lichtstrahl aus Luft höherer Temperatur in Luft gewöhnlicher Temperatur übertritt, und erhielt auf diese Weise für den der Temperatur t entsprechenden Brechungsexponenten

$$n = n_0 - 0{,}000\,000\,905\, t + 0{,}000\,000\,002\,35\, t^2$$

oder

$$n - 1 = (n_0 - 1)\left(1 - \frac{0{,}000\,000\,905}{n_0 - 1}\, t + \frac{0{,}000\,000\,002\,35}{n_0 - 1}\, t^2\right).$$

Setzen wir nun nach den Beobachtungen von Arago und Biot in den Nennern der rechten Seite

$$n_0 = 1{,}000\,294,$$

so wird

$$n - 1 = (n_0 - 1)(1 - 0{,}003\,07\, t + 0{,}000\,008\, t^2),$$

wofür wir auch mit sehr grofser Annäherung setzen können

$$n - 1 = \frac{n_0 - 1}{1 + 0{,}003\,07\, t}.$$

Der Temperaturkoefficient wäre hiernach erheblich kleiner als der Ausdehnungskoefficient, die Brechungsexponenten würden somit erheblich langsamer abnehmen, als es der Dichtigkeitsabnahme mit wachsender Temperatur entspricht.

Die von Mascart aus seinen Versuchen abgeleiteten absoluten Werte der Brechungsexponenten für 0^0 und Atmosphärendruck weichen nur wenig von denjenigen Dulongs und Kettelers ab, indes doch mehr, als dafs man die Versuche für so genau halten könnte, als Mascart es thut, welcher die Werte $n - 1$ als bis auf 0,2 Procent genau ansieht.

Später hat Mascart zur weitern Prüfung der dargelegten Resultate und zur genauern Untersuchung des Dulongschen Satzes, dafs sich für chemische Verbindungen die Brechung nicht nach der für die Mischungen gültigen Beziehung berechnen lasse, noch die Brechungsexponenten einer grofsen Zahl von Gasen und Dämpfen gemessen [2]). Er findet wie Dulong, dafs in einzelnen Fällen die Brechungsexponenten der Verbindungen jener Relation entsprechen, so bei Stickoxydul, Stickoxyd, Untersalpetersäure und Ammoniak, in andern dagegen nicht.

Die Versuche von Lorenz und Prytz verfolgen vorzugsweise den Zweck, die Konstanz des specifischen Brechungsvermögens in dem von Lorenz ihm gegebenen Sinne zu prüfen, indem sie dasselbe für Flüssigkeiten und die Dämpfe derselben Flüssigkeit vergleichen. In der That ergibt sich aus diesen Versuchen, dafs die so bestimmten specifischen Brechungsvermögen im flüssigen und Dampfzustande einander erheblich näher stehen als der Quotient aus dem um eins verminderten Brechungsexponenten und der

[1]) *von Lang*, Poggend. Ann. CLIII.

[2]) *Mascart,* Comptes Rendus LXXXVI. p. 321 und p. 1182.

Dichtigkeit, wie folgende Tabelle, welche eine Anzahl der von Lorenz gegebenen Zahlen enthält, zeigt. Die Werte von Lorenz sind aus den Brechungsexponenten der D Linie berechnet

	$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$		$\frac{n-1}{d}$	
	Flüssigk.	Dampf	Flüssigk.	Dampf
Äthyläther	0,302 6	0,306 8	0,480 0	0,460 2
Äthylalkohol	0,280 4	0,282 5	0,443 8	0,423 8
Wasser	0,206 1	0,206 8	0,324 6	0,310 2
Schwefelkohlenst.	0,280 5	0,289 8	0,464 5	0,434 7

Die Werte für die Flüssigkeiten entsprechen der Temperatur 10°, die für Dampf der Temperatur 100°, die Qnotienten der dritten Kolumne sind mit den konstanten Gliedern der Canchyschen Formel berechnet. Die Werte des Lorenzschen Ausdruckes sind im Dampfzustande in der Regel etwas gröfser, die Werte der andern Beziehung kleiner als im Flüssigkeitszustande, entsprechend der frühern Bemerkung und dem Resnltate Mascarts, dafs das specifische Brechungsvermögen in diesem Sinne mit steigender Temperatur in der Regel etwas abnimmt. Eben deshalb mufs die Relation von Lorenz auch der Konstanz näher kommen. Dafs wir keiner dieser Relationen eine theoretische Bedeutung beilegen können, haben wir bereits erwähnt.

§ 33.

Totale Reflexion; Wollastons Bestimmung der Brechungsexponenten. Nach dem Brechungsgesetze ist der Sinus des Brechungswinkels r mit dem des Einfallswinkels i verknüpft durch die Beziehung

$$\sin r = \frac{1}{n} \sin i,$$

wenn n den Brechungsexponenten bedeutet. Ist n gröfser als 1, geht also das Licht aus einem optisch dünnern in ein optisch dichteres über, so entspricht jedem möglichen Werte von i auch ein Wert von r, denn selbst für den gröfsten Wert von $i = 90^0$ wird

$$\sin r = \frac{1}{n},$$

also kleiner als 1. Geht aber das Licht ans einem optisch dichtern in ein dünneres Mittel über, so dafs $n < 1$, so ist das nicht mehr der Fall. Denn würden wir dann $i = 90^0$ setzen, so würde, da immer dieselhe Beziehung zwischen den heiden Sinus besteht, $\sin r > 1$. Da aber der gröfste Wert, den der Sinus überhanpt annehmen kann, 1 ist, so folgt, dafs es in dem Falle keinen Winkel r gibt, der zu dem Einfallswinkel in dem vom Brechungsgesetz geforderten Verhältnisse steht, somit, dafs überhaupt kein gehrochener Strahl existieren kann, dafs das Licht aus dem dichtern Mittel bei streifender Incidenz nicht in das dünnere Mittel übertreten kann. Das Ausbleiben eines gebrochenen Strahles tritt aber schon früher ein und zwar, da der gröfste mögliche Wert von $\sin r = 1$ ist, wenn

$$\frac{\sin i}{n} = 1$$

oder

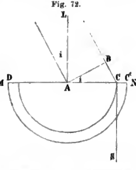
$$\sin i = n.$$

Für alle Einfallswinkel, deren Sinns gröfser ist als das relative Brechnngsverhältnis des dichtern und dünnern Mittels, gibt es keinen Brechungswinkel, gibt es keinen gebrochenen Strahl. Man nennt daher jenen Winkel den Grenzwinkel, da derselbe die Grenze angibt, bis zu welcher der Einfallswinkel wachsen kann, wenn noch Licht aus dem dichtern in das dünnere Mittel übertreten soll.

Wenn demnach auf die Grenzfläche eines dichtern Mittels gegen ein dünneres Mittel ein Lichtstrahl unter einem gröfsern Winkel als dem Grenzwinkel fällt, so findet keine Brechnng des Lichtes statt, sondern nur eine Reflexion, und da dann, so weit man beurteilen kann, das reflektierte Licht mit dem einfallenden die gleiche Intensität besitzt, so nennt man diesen Fall der Reflexion die totale Reflexion.

Diese auf den ersten Blick sehr auffallende Erscheinung, welche der Forderung zu widersprechen scheint, dafs an der Grenze zweier Mittel stets eine Teilung eintreten mufs in zwei Wellenbewegungen, deren eine in das erste Mittel zurückkehrt, während die andere in das zweite Mittel übergeht, ergibt sich indes als notwendig aus einer Betrachtung der Konstruktion der gebrochenen Welle.

Fig. 72.



Wenn an der Grenze zweier Mittel MN Fig. 72 eine ebene Welle AB ankommt, so erhalten wir die gebrochene Welle, wenn wir um den Punkt A mit einem Radius R, welcher sich zu BC verhält wie die Geschwindigkeit des Lichtes im zweiten Mittel zu derjenigen im ersten Mittel, eine Kugel beschreiben und von C ans an diese Kugel eine zur Einfallsebene senkrechte Tangentialebene legen.

Ist die Geschwindigkeit im ersten Mittel c, die im zweiten Mittel c', so ist der Radius

$$R = \frac{c'}{c} \cdot BC$$

oder auch

$$R = \frac{\sin r}{\sin i} \cdot BC.$$

Wird der Einfallswinkel i so grofs, dafs

$$\sin i = n,$$

so wird

$$R = \frac{1}{n}\, BC = \frac{1}{\sin i}\, BC.$$

Nun ist aber

$$\frac{CB}{AC} = \sin i,\ AC = \frac{1}{\sin i}\, BC,$$

es wird also in dem Falle der Radius der die Richtung der gebrochenen Welle bestimmenden Kugel gleich AC. Die Kugel geht durch den Punkt C, und so alle Elementarwellen, durch deren Zusammenwirken die gebrochene Welle entsteht. Die durch den Punkt C an die Kugel gelegte und alle Elementarwellen gleichzeitig berührende Tangentialebene steht somit senkrecht auf MN. Die gebrochene Welle pflanzt sich parallel der brechenden Fläche fort.

Wenn der Einfallswinkel i noch gröfser wird, so wird der Radius R der um A beschriebenen Kugel, der immer durch den Ausdruck

$$R = \frac{c'}{c} BC$$

gegeben ist, gröfser als AC, denn AC ist immer

$$AC = \frac{BC}{\sin i},$$

$\frac{c'}{c}$ ist dann aber gröfser als $\frac{1}{\sin i}$. Nehmen wir z. B. an das Verhältnis $\frac{c'}{c}$ oder

$$\frac{1}{n} = 2,$$

so wird immer

$$R = 2BC.$$

Bildet aber die brechende Fläche mit der ankommenden Welle, also der einfallende Strahl mit dem Einfallslote einen Winkel von 45°, so ist

$$AC = \frac{BC}{\sin 45^0} = \frac{BC}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = BC \cdot \sqrt{2},$$

R ist also im Verhältnis 2 zu $\sqrt{2}$ gröfser als AC. Der Punkt C liegt somit innerhalb der um A und somit aller um die verschiedenen Punkte von CA beschriebenen die Elementarwellen darstellenden Kugeln. Es gibt somit keine von C aus an diese Kugeln zu legende Tangentialebene, und überhaupt keine Fläche, welche diese elementaren Kugeln berührend umhüllt, da alle diese Kugeln in einander liegen. Die in das zweite Mittel übergegangenen Elementarwellen setzen sich somit zu keiner gemeinsamen wahrnehmbaren Welle zusammen, es kann kein gebrochener Strahl entstehen.

Die totale Reflexion läfst sich sehr leicht an Prismen mit grofsen brechenden Winkeln beobachten.

Wir erhielten in § 16 für den Austrittswinkel i', unter welchem ein unter dem Winkel i die Vorderfläche eines Prisma mit dem brechenden Winkel α treffender Lichtstrahl die zweite Fläche des Prismas verläfst, den Wert

$$\sin i' = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \,.\, \sin i$$

und es ist leicht die Beziehung zwischen i und α aufzufinden, welche dem in das Prisma eintretenden Strahle noch den Austritt gestattet. Jener Wert von i, welcher diesen Ausdruck gleich 1 macht, gibt uns die Grenze, unter welche der Einfallswinkel nicht herabsinken darf, bei kleinerm i kann dann der Lichtstrahl nicht mehr aus dem Prisma austreten. Denn in

dem Falle trifft der Strahl im Prisma die zweite Fläche unter dem Grenzwinkel. Da nun die Summe der beiden Winkel, welche der Strahl mit den Einfallsloten der beiden Prismenflächen bildet, immer gleich α ist, so folgt, dafs, wenn der Winkel i und mit ihm der erste Brechungswinkel kleiner wird, der Winkel, den der Strahl mit dem Einfallslote der zweiten Fläche bildet, um ebensoviel gröfser wird, also den Wert des Grenzwinkels übersteigt.

Wir erhalten also den Winkel i, der den Winkel, den der Strahl im Prisma mit dem Einfallslote der zweiten Fläche bildet, zum Grenzwinkel macht, aus der Gleichung:

$$\sin\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos\alpha \,.\, \sin i = 1,$$

oder

$$\sin\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = 1 + \cos\alpha \,.\, \sin i.$$

Daraus erhalten wir

$$\sin^2\alpha\,(n^2 - \sin^2 i) = 1 + 2\cos\alpha \,.\, \sin i + \cos^2\alpha \,.\, \sin^2 i,$$

$$n^2 \sin^2\alpha = 1 + 2\cos\alpha \,.\, \sin i + \sin^2 i.$$

Und setzen wir

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha,$$

$$(n^2 - 1)\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \,.\, \sin i + \sin^2 i,$$

$$\sqrt{n^2 - 1} \,.\, \sin\alpha = \cos\alpha + \sin i,$$

oder schliefslich

$$\sin i = \sin\alpha \sqrt{n^2 - 1} - \cos\alpha.$$

Ist der brechende Winkel des Prismas gleich dem Grenzwinkel für die Substanz des Prismas, so wird

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}$$

gleich dem Brechungsexponenten aus der Substanz des Prismas in Luft. In dem Falle wird

$$\sin i = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\sin i = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1} - \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1} = 0.$$

In dem Falle können also die Lichtstrahlen in dem Prisma nur dann eine totale Reflexion erleiden, wenn der Einfallswinkel nach der Bezeichnung des § 16 negativ wird, der einfallende Strahl also in dem Quadranten zwischen Einfallslot und brechender Kante liegt. Wird aber α gröfser als der Grenzwinkel, so wird der Wert für $\sin i$ gröfser als 0. Ist z. B. der Winkel des Prismas gleich dem doppelten Grenzwinkel g, so ist

$$\sin\alpha = 2\sin g \cdot \cos g = 2\,\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1},$$

$$\cos\alpha = \cos^2 g - \sin^2 g = 1 - 2\sin^2 g$$

und somit

$$\sin i = \frac{2}{n^2}(n^2 - 1) - 1 + \frac{2}{n^2} = 1.$$

Der Einfallswinkel, welcher den Winkel, den der Strahl mit dem zweiten Einfallslot bildet, zum Grenzwinkel macht, ist gleich 90°; es kann also nur Licht durch das Prisma treten, welches die erste Fläche unter streifender Incidenz trifft, alle sonstigen Strahlen können zwar in das Prisma eintreten, werden aber an der zweiten Fläche total reflektiert. Wird der brechende Winkel noch gröfser als der doppelte Grenzwinkel, so kann gar kein Licht mehr durch das Prisma hindurchtreten.

Nehmen wir z. B. ein rechtwinkliges gleichschenkliges Glasprisma, dessen Brechungsexponent für die mittleren Strahlen gleich 1,6 ist, so ist für Licht, welches durch die eine Kathetenfläche und die Hypothenusenfläche hindurchtreten soll, $\alpha = 45^0$. Der Grenzwinkel für ein solches Glas ist $g = \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{1,6}\right) = 38^0{,}66$ und damit wird der kleinste Einfallswinkel i, bei welchem das Licht noch durch das Prisma hindurchgeht, aus

$$\sin i = \sin 45^0 \sqrt{1,56} - \cos 45^0,$$

$$\sin i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1,56} - 1\right) = \frac{0,249}{1,414\,2} = 0,176\,0,$$

$$i = 10^0\,8'.$$

Lassen wir demnach einen Lichtstrahl senkrecht auf eine Kathetenfläche fallen, so wird er an der Hypothenusenfläche total reflektiert, und tritt dann aus der zweiten Kathetenfläche senkrecht wieder heraus. Wir erhalten daher durch diese Reflexion Bilder von allen Gegenständen, welche auf die Kathetenfläche Licht unter einem kleinern Winkel als 10° 8′ senden, so dafs wir uns eines solchen Prismas als ebenen Spiegels bedienen können, der vor den gewöhnlichen Spiegeln noch den Vorzug hat, dafs die von ihm gelieferten Bilder viel lichtheller sind als die gewöhnlicher Spiegel. Läfst man auf die eine Kathetenfläche das Licht des Himmelsgewölbes fallen, so erscheint die Fläche beim Hinblick durch die andere Kathete in silberähnlichem Glanze. Durch diesen auffallenden Glanz kann man sehr leicht die totale Reflexion von der immer an der einen Seite eines Prismas eintretenden partiellen Reflexion unterscheiden.

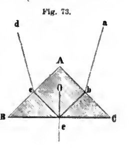
Bestimmt man durch eine derartige Beobachtung den Winkel i, bei welchem sich zuerst dieser Glanz zeigt, so kann man aus diesem und dem brechenden Winkel leicht den Brechungsexponenten der Prismensubstanz für mittlere Strahlen bestimmen. Wollaston[1]) hat diese Methode fruchtbar angewandt, um auch die Brechungsexponenten anderer selbst undurchsichtiger Substanzen zu bestimmen. Das Princip der Wollastonschen Methode ist einfach folgendes.

Sieht man auf ein Prisma ABC in der Richtung ab hin, so erhält man von den in der Richtung cd auffallenden Strahlen infolge der Reflexion an BC ein Bild. Ist das Prisma gleichschenklig, so bildet, wie man unmittelbar sieht, die Richtung ab mit der zu AC senkrechten Richtung genau denselben Winkel als der einfallende Lichtstrahl dc mit seinem Einfallslote. Aus der Bestimmung des Winkels Aba erhält man daher den Einfallswinkel i des Strahles dc. Sieht man nun in einer andern Richtung

[1]) *Wollaston,* Gilberts Annalen. Bd. XXXI.

auf das Prisma, so ändert sich in ganz gleicher Weise die Richtung der einfallenden Strahlen, deren Bild man sieht, somit auch der Winkel *ceo*. Es wird *ceo* gröfser, wenn der Einfallswinkel von *dc* kleiner, also *Acd* und *Aba* gröfser werden, weil die Summe der beiden Winkel, welche *ce* mit den Einfallsloten von *AB* und *BC* bildet, immer gleich dem Winkel *B* ist. Wird nun der Winkel *ceo* gleich dem Grenzwinkel, so sieht man von *a* aus ganz plötzlich das Bild bei *d* um vieles heller werden, und die Gegenstände unterhalb *Bc*, welche man vorher noch sehen konnte, verschwinden. Mifst man nun, sobald die Fläche *Bc* bei von dem hellen Himmel kommendem Lichte in jenem erwähnten Silberglanze erscheint, den Winkel *Aba*, so ist der Einfallswinkel

Fig. 73.



$$i = 90 - Aba$$

nnd unsere Formel

$$\sin i = \sin \alpha \sqrt{n^2 - 1} - \cos \alpha$$

gibt uns aus dem bekannten brechenden Winkel α in unserem Falle 45° den Wert für n, und daraus den Grenzwinkel *ceo*.

Wird nun ein Teil der untern Fläche *BC* des Prismas mit einem Körper in vollkommene Berührung gebracht, der einen Brechungsexponenten n' hat, der kleiner ist als n, aber gröfser als der Brechungsexponent der Luft, so ist der Grenzwinkel g' der Totalreflexion beim Übergange aus Glas in diese Snbstanz bestimmt durch

$$\sin g' = \frac{n'}{n},$$

derselbe ist also, da $n' > 1$, gröfser als der Grenzwinkel beim Übergange aus Glas in Luft. Sehen wir daher jetzt in der Richtung *ab* auf das Prisma, während in *de* von dem hellen Himmel Licht auffällt, in derselben Richtung wie vorhin, so erscheint die Fläche *BC* aufser an der Stelle, wo sie mit dem angelegten Körper in Berührung ist, in jenem silberhellen Glanze, jene Stelle hebt sich also ganz scharf als die dunklere ab. Drehen wir jetzt aber das Prisma so, dafs der Winkel *Aba* gröfser, der Einfallswinkel i also kleiner wird, so wird der Winkel *ceo* gröfser und wir werden dann bald zu einer solchen Stellung des Prismas gelangen, wo die Berührungsstelle der beiden Körper aufhört sichtbar zu sein, wo auch diese infolge der totalen Reflexion in demselben Glanze erscheint als die übrige Fläche. Aus dem dann gemessenen Winkel *Aba* erhält man durch

$$i = 90^0 - Aba$$

dann den Winkel i, und aus

$$\sin i = \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 1} - \cos \alpha$$

den Wert von $\frac{n}{n'}$ und daraus den Brechungsexponenten n' der an das Prisma gebrachten Substanz. Man kann in dem Falle n' auch so bestimmen, dafs man aus i mit Hülfe des bekannten n den Brechungswinkel



$$r = 90^0 - Bce$$

berechnet, und dann, da

$$r + ceo = \alpha,$$

$$g' = ceo = \alpha - r$$

ist, direkt aus

$$\sin g' = \frac{n'}{n}$$

den Wert von n' berechnet.

Ist der zu untersuchende Körper fest und leichtflüssig, so bringt man ihn im geschmolzenen Zustande auf das Prisma und läfst ihn erkalten. Ist das nicht der Fall, so schleift man an ihn eine ebene Fläche und befestigt ihn mittels eines durchsichtigen Kittes an die Fläche *BC*, indem man zugleich die ganze Fläche *BC* mit diesem Kitte überzieht, und sie parallel zu *BC* abschleift. Der Brechungsexponent des Kittes mufs gröfser sein als der des Glases und der des Körpers. Man beobachtet in dem Falle zuerst die Grenze der totalen Reflexion an der untern Fläche des Kittes beim Übergange des Lichtes in Luft und bestimmt daraus den Brechungsexponenten desselben, dann die beim Übergange des Lichtes in den Körper und bestimmt dann aus dem so erhaltenen Verhältnis zwischen dem Brechungsexponenten des Kittes und des Körpers den gesuchten Brechungsexponenten des Körpers.

Wollaston hat auf diese Weise die Brechungsexponenten einer Anzahl von Körpern untersucht und bei dieser Gelegenheit gefunden, dafs auch undurchsichtige Körper, mit dem Prisma in vollkommene Berührung gebracht, den Winkel der totalen Reflexion ändern, und dafs sich bei vielen dieser Körper ein ganz bestimmter Winkel der totalen Reflexion findet. Wir sind daher berechtigt, auch diesen Körpern einen bestimmten Brechungsexponenten zuzuschreiben, um so mehr als wir wissen, dafs eine Reihe, ja fast alle durchsichtige Körper bei gehöriger Dünne durchsichtig werden[1]).

So besimmte Wollaston z. B. die Brechungsexponenten folgender Körper:

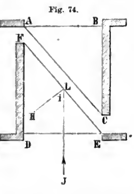
Kolophonium	$n = 1{,}543$
Pech	$n = 1{,}531$
Butter, kalte	$n = 1{,}474$
Spermaceti	$n = 1{,}535$
Talg, kalt	$n = 1{,}492$
Wachs	$n = 1{,}542$.

Die Wollastonsche Methode zur Bestimmung von Brechungsexponenten hat in nenerer Zeit vielfach Anlafs zur Herstellung kompendiöser Vorrichtungen gegeben, um die Brechungsexponenten flüssiger und fester Körper bis auf einige Einheiten der vierten Decimale leicht bestimmen zu können. Vorrichtungen der Art sind von Abbe[2]), E. Wiedemann[3]), Terquem und Trannin[4]), sowie F. Kohlrausch[5]) angegeben worden.

[1]) *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 52 ff.
[2]) *Abbe*, Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungsvermögens etc. Jena 1874.
[3]) *E. Wiedemann*, Poggend. Ann. Bd. CLVIII.
[4]) *Terquem* und *Trannin*, Journal de Physique théorique et appliquée. T. IV. Poggend. Ann. Bd. CLVII.
[5]) *Kohlrausch*, Wiedem. Ann. Bd. IV.

Die von Abbe angegebene Vorrichtung schliefst sich unmittelbar an das Wollastonsche Verfahren an. Ein Glasparallelepiped (Fig. 74) ist mittels eines durch die Diagonalebene geführten Schnittes in zwei rechtwinklige Prismen zerschnitten, welche zur Abhaltung fremden, seitlich eindringenden Lichtes mit einer Messingfassung versehen sind. Werden die Prismen ganz an einander geschoben, so tritt auf die untere Fläche parallel der Richtung JL eindringendes Licht unabgelenkt durch das Glas hindurch, auch dann, wenn man das Parallelepiped in dem einen oder andern Sinne neigt. Bringt man aber zwischen die Hypotenusenflächen der beiden Prismen eine Schicht einer Flüssigkeit, deren Brechungsexponent kleiner ist als derjenige des Glases, so kann man durch Neigen der Prismen in dem Sinne, dafs der Winkel i an der Eintrittsstelle des Lichtes in die Flüssigkeit wächst, es dahin bringen, dafs das Licht dort total reflektiert wird, dafs also das parallel JL auf das Prisma fallende Licht nicht mehr durch die Kombination hindurchtritt. Ist der Winkel $DEF = \alpha$, sowie der Brechungsexponent n_1 des Glases bekannt, und mifst man den Winkel, um welchen man das Prisma aus der normalen Stellung, in welcher $JL \perp ED$, hat drehen müssen, damit die totale Reflexion eintritt, so ergibt sich der Brechungsexponent der Flüssigkeit folgendermafsen. Ist die Kombination um den Winkel φ gedreht, so ist φ der Einfallswinkel an der Fläche ED. Im Innern des Prismas bildet dann der Strahl mit dem Einfallslot den Winkel ψ, der gegeben ist durch

Fig. 74.



$$\sin \psi = \frac{1}{n_1} \sin \varphi.$$

Nehmen wir an, dafs die Drehung im Sinne einer Vergröfserung des Winkels i erfolgt ist, so wird der Grenzwinkel g der totalen Reflexion

$$g = \psi + \alpha.$$

Ist n_2 der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Übertritt aus Glas in die Flüssigkeit, so ist

$$\sin g = \sin (\psi + \alpha) = n_2.$$

Bezeichnet dann n den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Übertritt aus Luft in die betreffende Flüssigkeit, so ist

$$n = n_1 \cdot n_2,$$

somit

$$n = n_1 \sin (\psi + \alpha).$$

Bei seinem Refraktometer bringt Abbe eine solche Kombination vor dem Objektiv eines kleinen Fernrohrs an; im Brennpunkte des Objektivs, dort wo sich sonst das Fadenkreuz befindet, ist ein schmaler Spalt angebracht, hinter welchem sich ein Spektralokular befindet, bestehend aus einem geradsichtigen Prisma (§ 35) und einer Lupe, welche auf den Spalt eingestellt ist. Die Prismenkombination ist an einer Axe befestigt, so dafs sie in dem

verlangten Sinne drehbar ist, an der Axe ist eine Albidade befestigt, welche auf einer Kreisteilung einsteht, deren Mittelpunkt in der Drehungsaxe der Prismenkombination liegt. Läfst man nun bei normaler Stellung der Prismenkombination, bei welcher die Axe derselben der Fernrohraxe parallel ist, und bei welcher die Alhidade auf den Nullpunkt der Teilung zeigt, helles Tageslicht in den Apparat eindringen, so entwirft das geradsichtige Prisma von dem parallel der Fernrohraxe durch den Spalt dringenden Lichte ein Spektrum, in welchem man bei scharfer Einstellung des Okulars die Fraunhoferschen Linien sehen kann. Dreht man dann die Prismenkombination in dem richtigen Sinne, so verschwindet aus dem Spektrum zuerst das Violett und mit weiterer Drehung schreitet die Verdunklung gegen das rote Ende vor, da n_2 für Violett den kleinsten, für Rot den gröfsten Wert hat. Der Winkel φ, um welchen die Prismenkombination gedreht werden mufs, damit die Verdunklung bis zu einer bestimmten Fraunhoferschen Linie des Spektrums vorgeschritten ist, gibt den Brechungsexponenten dieser Fraunhoferschen Linie.

Anstatt den Apparat mit einer Kreisteilung zu versehen, kann man ihn auch nach den Werten der Brechungsexponenten für eine bestimmte Farbe graduieren, etwa für die Linie D, indem man stets die Prismenkombination um einen solchen Winkel φ dreht, dafs die Verdunklung bis zu dieser Stelle vorgeschritten ist[1]).

Wiedemann sowie Terquem und Trannin benutzen die Totalreflexion zur Bestimmung der Brechungsexponenten der Flüssigkeiten in etwas anderer Weise, sie tauchen in die zu untersuchende Flüssigkeit eine Luftlamelle, und bestimmen den Einfallswinkel des Lichtes an derselben, wenn totale Reflexion eintritt. Diese Luftlamelle wird dadurch erhalten, dafs zwei planparallele Gläser mit ihren Rändern so an einander gekittet werden, dafs zwischen ihnen eine kleine Luftschicht bleibt. Man kann etwa zwei mikroskopische Deckgläschen durch Kanadabalsam so an einander kitten, wie es zum Einschliefsen mikroskopischer Präparate geschieht. Man taucht dann diese Lamelle in ein von parallelen Glaswänden begrenztes mit der betreffenden Flüssigkeit gefülltes Kästchen, welches man etwa auf den Tisch eines Spektrometers stellt, dessen Fernrohr auf den Spalt des Kollimatorrohres eingestellt ist, so dafs das parallel der Axe des Kollimatorrohres eindringende Licht nur, nachdem es die Luftlamelle passiert hat, in das Beobachtungsfernrohr dringen kann. Wenn man dann durch Drehung des kleinen Spektrometertisches das Kästchen und mit demselben die Luftlamelle dreht, so gibt es zwei Stellungen, in denen das Licht die Luftlamelle nicht durchdringen kann, in denen es an derselben total reflektiert wird. Ist der Winkel, um den das Kästchen aus der einen in die andere Stellung gedreht werden mufs, gleich φ, so ist der Brechungsexponent der Flüssigkeit n

$$n = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Um das zu erkennen, sei $ABCD$ ein Durchschnitt durch die beiden Glasplatten mit der Luftlamelle Fig. 75, LJ sei die Richtung des ein-

[1]) Die verschiedenen Formen der Refraktometer, welche Abbe nach diesem Princip konstruiert hat, sind von C. Zeiss in Jena zu beziehen.

fallenden Lichtes und JN die Lage des Einfallslotes in der einen Stellung, in welcher gerade totale Reflexion eintritt. Nennen wir den Einfallswinkel i, den Brechungsexponent des Lichtes bei dem Übertritt aus der Flüssigkeit in das Glas n_1, den bei dem Übertritt aus Glas in Luft n_2, so ist der Winkel, den das Licht im Innern des Glases mit dem Einfallslot bildet, gegeben durch

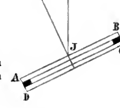


Fig. 75.

$$\sin g = \frac{1}{n_1} \sin i.$$

Tritt totale Reflexion ein, so ist

$$\sin g = n_2,$$

somit

$$n_1 \cdot n_2 = \sin i.$$

Da n_1 der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Übertritt aus der Flüssigkeit in Glas, n_2 bei dem Übertritt aus Glas in Luft ist, so ist

$$n_1 n_2 = \frac{1}{n},$$

gleich dem reciproken Werte des Brechungsexponenten bei dem Übertritte aus Luft in die Flüssigkeit, oder i ist der Grenzwinkel für die Flüssigkeit; somit

$$n = \frac{1}{\sin i}.$$

Dreht man aus dieser Lage die Glasplatte soweit, dafs das Einfallslot auf der andern Seite mit der Richtung des einfallenden Lichtes den Winkel i bildet, so tritt wieder totale Reflexion ein. Der Winkel φ zwischen den beiden Lagen der totalen Reflexion ist somit gleich $2i$.

Bei diesem Verfahren ist homogenes Licht zu nehmen; will man weifses Licht anwenden und gleichzeitig die Dispersion messen, so mufs man das Licht, nachdem es die Luftlamelle passiert hat, in ein Spektrum zerlegen.

Diese Methode hat vor der Abbe'schen den Vorzug, dafs man für alle Flüssigkeiten die Brechungsexponenten mit derselben leicht bestimmen kann, während die Abbe'sche nur für solche geeignet ist, deren Brechungsexponent kleiner als der des Glases ist, sie hat den Nachteil, dafs sie eine erheblich gröfsere Quantität der Flüssigkeit verlangt.

Die gleiche Methode kann auch benutzt werden, um die Brechungsexponenten fester Körper zu bestimmen, welche einen Brechungsexponenten haben, der kleiner ist als der das Kästchen erfüllenden Flüssigkeit, und welche man in dünnen planparallelen Platten herstellen kann. Man bringt die Platte einfach an Stelle der beschriebenen Doppelplatte und erhält dann bei dem beschriebenen Verfahren direkt den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Übertritte aus der Substanz der Platte in die Flüssigkeit.

Wegen der Schwierigkeit, von allen Substanzen planparallele Platten herzustellen, und weil das Verfahren nur für durchsichtige Körper verwendbar ist, beobachtet Kohlrausch die totale Reflexion an der Vorderfläche von Körpern, die in eine stärker brechbare Flüssigkeit getaucht sind, in ähnlicher Weise wie Wollaston. Der Winkel, den die beiden Lagen der Platten bei totaler Reflexion mit einander bilden, ist gleich dem doppelten Grenzwinkel zwischen der Flüssigkeit und der Substanz der Platte[1]).

[1]) *Kohlrauschs* Refraktometer verfertigt Mech. Apel in Göttingen.

§ 34.

Verschiedenheit der von verschiedenen Prismen erzeugten Spektra. Wenn man durch Prismen ein und derselben Substanz, aber von verschiedenem brechenden Winkel Sonnenspektra erzeugt, so haben dieselben eine verschiedene Gröfse, indem die Ablenkung des Lichtes um so gröfser wird, je gröfser der brechende Winkel des Prismas wird. Da aber die Ablenkung der einzelnen farbigen Strahlen in demselben Verhältnisse zunimmt, so nimmt die Ausdehnung aller Farben in demselben Verhältnisse zu, als die des ganzen Spektrums; erhält dasselbe die doppelte oder dreifache Länge, so erhält auch jede Farbe die doppelte oder dreifache Ausdehnung. Die relative Lage der einzelnen Farben wird also dadurch gar nicht geändert.

Anders verhält es sich jedoch, wenn wir Prismen verschiedener Substanzen und gleicher brechenden Winkel anwenden. Bei diesen ist nicht nur die Ausdehnung des ganzen Spektrums eine verschiedene, sondern auch diejenige der einzelnen Farben, wie eine Betrachtung der in den frühern Paragraphen angegebenen Brechungsverhältnisse ergibt.

Nennen wir den Brechungsexponenten der äufsersten roten Strahlen oder derjenigen, welche der dunkeln Linie B entsprechen, n_r, und derjenigen, welche der im Violetten liegenden dunkeln Linie H entsprechen, n_v, so werden wir die Differenz

$$n_v - n_r$$

als das Mafs der durch ein Prisma einer bestimmten Substanz erzengten Dispersion ansehen können. Denn die Ablenkung des Lichtes durch ein Prisma wird um so gröfser, je gröfser der Brechungsexponent der Prismensubstanz ist. Je gröfser die Differenz $n_v - n_r$ ist, um so gröfser wird auch die Differenz der Ablenkungen der roten und violetten Strahlen, um so gröfser die Länge des Spektrums.

Für die von Fraunhofer untersuchten Substanzen, welche wir zum grofsen Teil in unsere frühern Tabellen aufgenommen haben, sind diese Differenzen[1]) folgende:

		Brechungsexponent von E
Flintglas No. 13	$n_v - n_r =$ 0,043 313	1,642 024
Crownglas „ 9	„ „ „ 0,020 734	1,533 005
Wasser	„ „ „ 0,013 242	1,337 818
Kali	„ „ „ 0,016 739	1,405 632
Terpentinöl	„ „ „ 0,023 378	1,478 353
Flintglas No. 3	„ „ „ 0,038 331	1,614 513
Flintglas „ 30	„ „ „ 0,042 502	1,637 356
Crownglas „ 13	„ „ „ 0,020 372	1,531 373
Crownglas Lttr. M	„ „ „ 0,024 696	1,563 150
Flintglas No. 23	„ „ „ 0,043 116	1,640 544.

Bei gleichen brechenden Winkeln werden sich daher die Längen der von den verschiedenen Substanzen erzeugten Spektren verhalten nahezu wie diese Zahlen, oder ein Spektrum durch ein Prisma von Flintglas No. 13 erzeugt, wird ungefähr die doppelte Länge eines Spektrums haben, welches

[1]) *Fraunhofer*, Denkschriften der Münchener Akademie auf die Jahre 1814 bis 1815. V. Band.

durch ein Prisma von Crownglas No. 9 erzeugt ist, und etwas mehr als die dreifache Länge eines Wasserspektrums bei gleichen brechenden Winkeln der Prismen.

Die Zerstreuungen des Lichtes durch die verschiedenen Substanzen stehen in keiner erkennbaren Beziehung zu der mittlern Brechung des Lichtes, das heifst, es ist keinesweges die Zerstreuung des Lichtes um so gröfser, je gröfser die mittlere Brechung desselben ist. Man kann als Mafs der Brechung die Brechungsexponenten der mittlern Strahlen D oder E betrachten, und ein Blick auf die letzte Kolumne der obigen Tabelle zeigt, wie verschieden das Verhältnis der Zahlen der ersten Reihe und derjenigen der zweiten zu einander ist. So ist z. B. die Zerstreuung durch ein Prisma mit Terpentinöl gröfser als durch Crownglas No. 9 und No. 13, dagegen ist der mittlere Brechungsexponent des Terpentinöles um vieles kleiner. Die Dispersionen von Flintglas 13 und Crownglas 9 verhalten sich fast wie 2 : 1, dagegen die mittlern Brechungsexponenten wie 164 : 153.

Bei gleicher Ablenkung der mittlern Strahlen wird daher die Länge der Spektra eine sehr verschiedene, bei gleicher Länge der Spektra dagegen die Ablenkung nicht dieselbe sein.

Bei gleicher Länge der ganzen Spektra ist die Ausdehnung der einzelnen Farben oder die Lage der gleichen Strahlen im Spektrum verschiedener Snbstanzen eine sehr verschiedene. So wie die Differenz der Brechungsexponenten der äufsern Strahlen uns ein Mafs gibt für die Länge des ganzen Spektrums bei Prismen gleicher brechender Winkel, so ist ebenso die Differenz der Brechungsexponenten zweier bestimmter Strahlen das Mafs für den Abstand derselben im Spektrum.

Das Verhältnis der totalen Dispersionen gibt uns daher ein Bild der ganzen Spektra zweier Substanzen in ihrem Verhältnis zu einander, das Verhältnis der partiellen Dispersionen dagegen die Lage der einzelnen Teile zu einander, die Ausdehnung der einzelnen Farben. Folgende von Fraunhofer entworfene Tabelle (siehe folgende Seite) wird uns daher ein Bild der Verschiedenheiten in den Spektris verschiedener Substanzen liefern.

Die erste Kolumne der Zahlen zeigt, wie viel gröfser die totale Dispersion der ersten von den beiden verglichenen Substanzen ist, z. B. also nahezu um wie viel länger bei gleichem brechenden Winkel das Flintglasspektrum als das Wasserspektrum ist, die folgenden Kolumnen vergleichen die Ausdehnungen der einzelnen Farben, und man sieht, wie die Längen dieser in ganz verschiedenem Verhältnisse stehen.

Die Länge des Roten z. B. ist bei Flintglas nur das Zweiundeinhalbfache desjenigen des Roten im Wasserspektrum, die des Violetten fast das Vierfache. Im allgemeinen ist bei zwei verschiedenen Substanzen das Verhältnis der Dispersionen der stärker brechbaren Strahlen auch das gröfsere, das heifst bei zwei verschiedenen Spektris ist der Unterschied in der Ausdehnung der Farben um so gröfser, je näher die Farbe dem violetten Ende des Spektrums ist, jedoch ausschliefslich läfst der Satz sich auch nicht aufstellen, indem z. B. bei Flintglas 13 und Terpentinöl die Länge der Spektra sich verhält wie 1,857 : 1, die Ausdehnung des Roten im ersten zu der im zweiten Spektrum ist 1,868 : 1, die des Grünen nur 1,783 : 1.

Es läfst sich also auch hier gar keine Beziehung zwischen dem Verhältnis der partiellen und totalen Dispersionen der verschiedenen Substanzen erkennen.

Tabelle des Verhältnisses der partiellen und totalen Dispersionen verschiedener Substanzen.

Brechende Mittel	$\frac{H-B}{H'-B'}$	$\frac{C-B}{C'-B'}$	$\frac{D-C}{D'-C'}$	$\frac{E-D}{E'-D'}$	$\frac{F-E}{F'-E'}$	$\frac{G-F}{G'-F'}$	$\frac{H-G}{H'-G'}$
Flintglas No. 13 / Wasser	3,270	2,562	2,871	3,073	3,193	3,460	3,726
Flintglas No. 13 / Crownglas No. 9	2,088	1,900	1,956	2,044	2,047	2,145	2,195
Crownglas No. 9 / Wasser	1,565	1,349	1,468	1,503	1,560	1,613	1,697
Terpentinöl / Wasser	1,765	1,371	1,557	1,723	1,732	1,860	1,963
Flintglas No. 13 / Terpentinöl	1,857	1,868	1,844	1,783	1,843	1,861	1,899
Flintglas No. 13 / Kali	2,590	2,181	2,338	2,472	2,545	2,674	2,844
Kali / Wasser	1,254	1,175	1,228	1,243	1,254	1,294	1,310
Terpentinöl / Kali	1,397	1,167	1,268	1,386	1,381	1,437	1,498
Flintglas No. 3 / Crownglas No. 9	1,849	1,729	1,714	1,767	1,808	1,914	1,956
Crownglas No. 13 / Wasser	1,538	1,309	1,436	1,492	1,518	1,604	1,651
Crownglas M / Wasser	1,864	1,537	1,682	1,794	1,839	1,956	2,052
Crownglas M / Crownglas No. 13	1,212	1,174	1,171	1,202	1,211	1,220	1,243
Flintglas No. 13 / Crownglas M	1,794	1,667	1,704	1,715	1,737	1,770	1,816
Flintglas No. 3 / Crownglas M	1,552	1,517	1,494	1,482	1,534	1,579	1,618
Flintglas No. 30 / Crownglas No. 13	2,086	1,932	1,904	1,997	2,061	2,143	2,233
Flintglas No. 23 / Crownglas No. 13	2,116	1,904	1,940	2,022	2,107	2,168	2,268

Vergleichen wir zwei Spektra, deren eines durch ein Flintglasprisma erzeugt ist, während das andere von einem Wasserprisma herrührt, welches mit dem ersten den gleichen brechenden Winkel hat, so ist zunächst das Wasserspektrum bedeutend weniger abgelenkt als das Flintglasspektrum, ferner ist ersteres nahezu dreimal länger, das Rot hat jedoch nur eine 2,5mal gröfsere Ausdehnung, das Gelb eine 2,8mal gröfsere und das Violett eine nahezu viermal gröfsere Ausdehnung als das des Wasserspektrums. Vergröfsern wir den brechenden Winkel des Wasserprismas so weit, dafs die

Spektra gleiche Gröfse haben, so ist das Wasserspektrum viel weiter abgelenkt, und die Farben haben eine keineswegs gleiche Ausdehnung. Im Wasserspektrum ist Rot, Orange, Gelb, Grün weit ausgedehnter als im Flintglasspektrum, die Ausdehnung des Blauen ist in beiden nahezu gleich, das Violett dagegen ist im Wasserspektrum weit kürzer als in dem des Flintglases.

§ 35.

Achromatische und geradsichtige Prismen. Wenn das Licht durch ein Prisma oder überhaupt durch eine durchsichtige Substanz mit nicht parallelen Seitenflächen hindurchtritt, so wird es nicht nur von seiner Bahn abgelenkt, sondern im allgemeinen auch, wenn es nicht einfarbig homogen war, in seine farbigen Bestandteile zerlegt. Man kann jedoch auch Prismen konstruieren, bei denen eine Ablenkung des Lichtes eintritt, ohne dafs dabei eine merkliche Farbenzerstreuung sich zeigt. Solche Prismen nennt man achromatische. Abgesehen von Prismen, welche aus Gasen bestehen, bei welchen eine Dispersion kaum merklich, die Ablenkung der Strahlen aber auch nur unbedeutend ist, können Prismen nur dann achromatisch sein, wenn sie zusammengesetzt sind, wenn sie aus zweien bestehen, deren zweites die durch das erste hervorgebrachte Dispersion wieder aufhebt. Daraus ergibt sich zunächst für die Konstruktion derartiger Apparate, dafs die brechende Kante des zweiten Prismas die entgegengesetzte Lage haben mufs, als diejenige des ersten Prismas, dafs sie oben sein mufs, wenn diejenige des ersten Prismas unten ist, rechts gestellt, wenn jene nach links gerichtet ist, gerade so, wie wir in § 19 zwei Prismen gleicher Substanz und gleichen brechenden Winkels zusammenstellen mufsten, um aus dem farbigen Lichte das weifse wieder herzustellen.

Wenn aber nun bei Aufhebung der Dispersion die Ablenkung der Strahlen nicht zugleich null werden soll, so sieht man ferner unmittelbar, dafs die Prismen so beschaffen sein müssen, dafs sie Spektra von gleicher Gröfse geben müssen bei verschiedener Ablenkung derselben. Man wird also zwei Substanzen wählen müssen, welche bei nahe gleichem mittleren Brechungsvermögen eine sehr verschiedene zerstreuende Kraft haben. Indem man dann den brechenden Winkel des Prismas mit kleinerer zerstreuender Kraft so viel vergröfsert, dafs das von ihm erzeugte Spektrum dem des andern Prismas an Gröfse gleich wird, vereinigt das zweite Prisma die divergierenden farbigen Strahlen, ohne jedoch die Ablenkung aufzuheben, welche die Strahlen durch das erste Prisma erfahren haben.

So ist z. B. die Differenz der Brechungsexponenten für rote und violette Strahlen bei Flintglas No. 13 gleich 0,043 3, bei Crownglas No. 9 dagegen 0,020 7, die beiden Brechungsexponenten für mittlere Strahlen sind aber respective 1,642 0 und 1,533 0. Stellen wir nun aus jeder der Substanzen Prismen her, deren brechende Winkel sich nahezu umgekehrt verhalten wie die Zahlen, welche uns die zerstreuenden Kräfte repräsentieren, also ein Flintglasprisma von 20° und ein Crownglasprisma von circa 45°, so werden die von beiden Prismen erzeugten Spektra die gleiche Gröfse haben.

Da aber die Brechungsexponenten der beiden Substanzen sich wie 164 : 153 verhalten, so ist die Ablenkung des Crownglasspektrums, da die Ablenkung mit dem brechenden Winkel zunimmt, um vieles gröfser. Wenn

wir nun die beiden Prismen in der angegebenen Weise zusammenfügen, so wird durch das Flintglasprisma ein Teil der Ablenkung der Strahlen aufgehoben, indem dieselben nach entgegengesetzter Richtung abgelenkt werden; bei der Verschiedenheit der brechenden Winkel bleibt indes eine Ablenkung der mittlern Strahlen im Sinne des Crownglasprismas von circa 15^0 übrig. Die Brechung der violetten Strahlen im Flintglasprisma ist aber gerade so viel gröfser, wie die der roten Strahlen, als sie es vorher im Crownglasprisma war, und deshalb werden durch die entgegengesetzte Brechung in dem zweiten Prisma die austretenden Strahlen wiederum parallel und ungefähr 15^0 von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt. Eine so dargestellte Kombination von Flintglas und Crownglas ist demnach ein achromatisches Prisma.

Um genau das Verhältnis der brechenden Winkel einer achromatischen Kombination sowie die übrig bleibende Ablenkung zu erhalten, haben wir nur die frühern Sätze über Brechung des Lichtes in Prismen anzuwenden.

Wir hatten früher für die Ablenkung δ eines Lichtstrahls, welcher unter dem Einfallswinkel i ein Prisma von dem brechenden Winkel α traf,

$$\delta = i + i' - \alpha,$$

worin i' den Winkel bedeutet, welchen der austretende Lichtstrahl mit dem Einfallslote der zweiten Prismenfläche bildet, und der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\sin i' = \sin \alpha \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \cdot \sin i,$$

worin n den Brechungsexponenten des Prismas für den eintretenden Lichtstrahl bedeutet.

Bezeichnen wir nun mit $\varDelta_r$ die Ablenkung, welche die roten, mit $\varDelta_v$ diejenige, welche die violetten Strahlen durch das kombinierte Prisma erfahren, so ist die Bedingung der Achromasie, dafs

$$\varDelta_v - \varDelta_r = 0$$

oder

$$\varDelta_v = \varDelta_r.$$

Die Ablenkung der roten Strahlen mufs gleich sein derjenigen der violetten.

Da alle Strahlen die erste Seite des ersten Prismas unter demselben Winkel treffen, so wird dieser Bedingung genügt, wenn die roten und violetten Strahlen die letzte Fläche unter demselben Winkel verlassen. Bezeichnen wir die Winkel der austretenden roten und violetten Strahlen mit dem Einfallslot nun resp. mit $i_{,r}$ und $i_{,v}$, so mufs

$$i_{,r} = i_{,v}$$

oder $\sin i_{,r} = \sin i_{,v}$ sein.

Wir nehmen an, dafs die erste Seite des zweiten Prismas der zweiten des ersten parallel sei, die roten oder violetten Strahlen treten dann unter denselben Einfallswinkeln i'_r oder i'_v in das zweite Prisma, unter welchen sie das erste verlassen.

Sind n_r, n_v die Brechungsexponenten der roten und violetten Strahlen im ersten, $n_{,r}$, $n_{,v}$ die derselben Strahlen im zweiten Prisma und α' der

brechende Winkel des letztern, so haben wir

$$\sin i_{,e} = \sin\alpha' \sqrt{n_{,e}^2 - \sin^2 i_e'} - \cos\alpha' \,.\, \sin i_e'$$

$$\sin i_{,r} = \sin\alpha' \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i_r'} - \cos\alpha' \,.\, \sin i_r'.$$

Es mufs demnach

$$\sin\alpha' . \sqrt{n_{,e}^2 - \sin^2 i_e'} - \cos\alpha' \sin i_e' = \sin\alpha' \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i_r'} - \cos\alpha' \,.\, \sin i_r'$$

oder

$$\operatorname{tang}\alpha' \left\{ \sqrt{n_{,e}^2 - \sin^2 i_e'} - \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i_r'} \right\} = \sin i_e' - \sin i_r',$$

und indem wir für die Glieder der rechten Seite ihre Werte durch n_r, n_e, α und i einsetzen

$$\operatorname{tang}\alpha' \left\{ \sqrt{n_{,e}^2 - \sin^2 i_e'} - \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i_r'} \right\} = \sin\alpha \left\{ \sqrt{n_e^2 - \sin^2 i} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 i} \right\}$$

und daraus folgt

$$\operatorname{tang}\alpha' = \sin\alpha \frac{\sqrt{n_e^2 - \sin^2 i} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 i}}{\sqrt{n_{,e}^2 - \sin^2 i_e'} - \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i_r'}}.$$

Nehmen wir also z. B. ein Crownglasprisma No. 9, dessen brechender Winkel $= 60^0$ ist und berechnen den brechenden Winkel eines Prismas von Flintglas No. 13, welches mit dem ersten zusammen eine achromatische Kombination bildet; und nehmen wir dabei an, dafs die Lichtstrahlen so auffallen, dafs die Strahlen mittlerer Brechbarkeit im Crownglasprisma das Minimum der Ablenkung erhalten würden, also $i = 50^0$.

Für Crownglas No. 9 ist

$$n_e = 1{,}546\,5$$

$$n_r = 1{,}525\,8.$$

Für Flintglas No. 13

$$n_{,e} = 1{,}671\,0$$

$$n_{,r} = 1{,}627\,7.$$

Setzen wir diese Werte in unseren Ansdruck für tang α' ein, so wird

$$\operatorname{tang}\alpha' = \sin 60^0 \frac{0{,}023\,83}{0{,}036\,80} = \frac{0{,}020\,64}{0{,}036\,80}$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = 0{,}560\,87 = \operatorname{tang} 29^0\ 17'.$$

Fügen wir demnach dem Crownglasprisma von 60^0 brechendem Winkel ein Flintglasprisma hinzu, dessen brechender Winkel gleich $29^0\ 17'$ ist, so dafs die brechende Kante des letztern Prismas umgekehrt liegt als diejenige des erstern, so werden die das erste Prisma unter einem Einfallswinkel von 50^0 treffenden Lichtstrahlen diese Kombination durchsetzen, ohne dafs sie bei der Ablenkung in ein Spektrum zerlegt werden.

Die Gröfse der bleibenden Ablenkung erhalten wir aus Δ_e oder Δ_r, nachdem wir den Winkel $i_{,e}$ oder $i_{,r}$ mit Hülfe des gefundenen Wertes von α' berechnet haben. Wir erhalten in diesem Falle für $i_{,e}$

$$\sin i_{,e} = -\,0{,}357\,40 = \sin -\,20^0\ 56'.$$

Das negative Vorzeichen von $i_{,e}$ bedeutet, dafs der Lichtstrahl an der



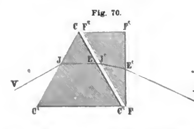
entgegengesetzten Seite des Einfallslotes in Bezug auf die brechende Kante des zweiten Prismas liegt als der einfallende Lichtstrahl. Der Winkel, den der austretende Lichtstrahl mit dem Einfallslote der zweiten Prismenfläche bildet, ist positiv gerechnet, wenn der Lichtstrahl von der brechenden Kante fortgebrochen wird, er mufs daher das negative Vorzeichen erhalten, wenn er zur brechenden Kante hingebrochen wird. Fig. 76 stellt den hier berechneten Fall dar.

Mit diesem Werte von $i_{,v}$ erhalten wir

$$\Delta_v = 50^0 + 20^0\,56' - 60^0 + 29^0\,17' = 40^0\,13'.$$

Aus unserer Rechnung ergibt sich, dafs diese Kombination nur achromatisch ist für die unter dem bestimmten Winkel i auf die Vorderfläche CC' des Prismas $CC'C''$ auffallenden Strahlen; ist der Einfallswinkel ein anderer, so wird der Winkel α' ein anderer, oder man mufs die Stellung des zweiten Prismas so abändern, dafs auch dann die roten und violetten Strahlen unter denselben Winkeln die Fläche FF'' des zweiten Prismas treffen, also den Parallelismus der Flächen CC'' und FF'' schwinden lassen. In allen Fällen aber, das heifst für jeden Einfallswinkel i wird jedoch die Zerstreuung durch eine solche Kombination vermindert.

Fig. 70.



Für den angenommenen Einfallswinkel i ist die Farbenzerstreuung durch unsere Kombination am kleinsten, vollständig ist sie jedoch auch dort nicht aufgehoben.

Der Winkel α' des Flintglasprismas ist so berechnet, dafs die Ausdehnung beider Spektra genau dieselbe ist, so dafs bei der entgegengesetzten Brechung im zweiten Prisma die roten und violetten Strahlen parallel austreten. Sollten nun auch alle übrigen Strahlen mit diesen parallel austreten, so müfste die relative Lage aller Farben in den beiden Spektris dieselbe, das heifst die durch die beiden Prismen erzeugten Spektra müfsten identisch sein. Im vorigen Paragraphen sahen wir jedoch, dafs das nicht der Fall ist, dafs das Verhältnis der Ausdehnung der einzelnen Farben in den Spektris sehr verschieden von einander und vom Verhältnis der beiden Spektra selbst ist. Das Grün z. B. liegt im Crownglasspektrum dem violetten Ende näher als im Flintglasspektrum. Wenn daher das zweite Prisma das violette Licht dem roten parallel austreten läfst, so wird das grüne dem roten noch nicht parallel werden, die durch ein solches Prisma hindurchgehenden Strahlen werden daher noch ein schwaches rotgrünes Spektrum liefern.

Mit Hülfe eines oder mehrerer zu dieser Kombination hinzugefügten Prismen würde man nun auch diese sekundären Farbenerscheinungen zum Verschwinden bringen können, und man sieht leicht, dafs es für jede Fraunhofersche Linie im Spektrum, um sie mit B und H, welche durch die einfache Kombination zusammentreffen, koincidieren zu lassen, eines neuen Prismas bedarf. Indes finden die komplicierteren Prismen nur äufserst selten Anwendung, so dafs es überflüssig sein wird, sie zu berechnen, besonders da die Rechnung sich von obiger nicht wesentlich unterscheidet.

Ganz ebenso wie man Prismen konstruieren kann, welche den Strahl ohne Dispersion ablenken, kann man andrerseits auch Prismen konstruieren, welche ein nicht abgelenktes Spektrum geben; solche Prismen wurden zuerst von Amici konstruiert und werden in neuerer Zeit in grofser Vollkommenheit von Schröder in Hamburg, Merz und Steinheil in München, Hofmann in Paris u. a. verfertigt. Dieselben bestehen (Fig. 77) meist aus fünf Prismen, zwei gleichschenkligen Flintglasprismen F_1 und F_2, deren brechenden Winkel Hofmann gleich 90° nimmt und drei entgegengesetzt liegenden Crownglasprismen, von denen das mittelste C_2 ebenfalls gleichschenklig ist, während die beiden äufsern so geschliffen werden, dafs die Ablenkung der mittlern Strahlen gerade aufgehoben wird. Die brechenden Winkel werden dann aus der Bedingung berechnet, dafs δ für die mittlern Strahlen gleich null wird. Man berechnet zu dem Ende zunächst die Ablenkung, welche die drei mittleren Prismen für sich den mittlern Strahlen erteilen und dann den brechenden Winkel von C_1 und C_3 so, dafs diese Ablenknng gerade aufgehoben wird. Sind die Rechnungen auch etwas langwierig, so sind sie doch so einfach, dafs wir nicht näher darauf einzugehen haben.

Fig. 77.



Sind die mittlern Strahlen gerade korrigiert, so sind die weniger brechbaren überkorrigiert, die brechbareren dagegen bleiben noch abgelenkt, man erhält daher ein Spektrum, dessen Rot der brechenden Kante der Flintglasprismen zunächst liegt.

§ 36.

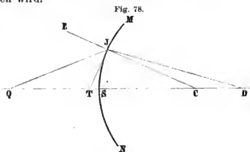
Brechung des Lichtes durch krumme Flächen. Das Gesetz, nach welchem die Lichtstrahlen beim Übergange aus einem Mittel in ein zweites gebrochen werden, ist unabhängig von der Form der Begrenzung der Mittel. Auch für krumme Flächen gilt daher dasselbe Gesetz, dafs die gebrochenen Lichtstrahlen mit den einfallenden in derselben Ebene liegen, nnd dafs der Quotient ans dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels eine konstante Gröfse, der Brechungsexponent des Mittels, sein mufs. Wenn man daher bei Mitteln, welche von krummen Flächen begrenzt sind, den Brechungsexponenten des Mittels und den Einfallswinkel des Lichtes kennt, so läfst sich auch hier sofort der Gang des gebrochenen Lichtes bestimmen. Wie aber bei der Reflexion, so wird auch hier die Bestimmung der gebrochenen Lichtstrahlen komplicierter als bei ebenen Flächen, indem die Einfallslote für die verschiedenen Punkte der Fläche nicht einander parallel sind, sondern an den verschiedenen Punkten verschiedene Richtungen haben, welche durch die Natur der krummen Fläche bestimmt sind. Es ist daher, um den Gang der in krummen Flächen gebrochenen Lichtstrahlen zu bestimmen, notwendig, das Krümmungsgesetz der Flächen zu kennen.

Bei der Behandlung dieser mehr in das Gebiet der Geometrie als der Physik fallenden Aufgabe wollen wir uns auf einen speciellen Fall beschränken, der allein für uns von Interesse ist, auf die Brechung des Lichtes durch kugelförmige Flächen.

Sei zu dem Ende MN der Durchschnitt durch eine kugelförmige

Fläche, deren Mittelpunkt in C liegt, auf welche ein leuchtender Punkt Q seine Strahlen sendet, und suchen wir die Richtung zu bestimmen, nach welcher irgend ein Strahl QJ, der den Durchschnitt MN in J trifft, gebrochen wird. Wir werden dieselbe durch den Abstand SD bestimmt haben, in welchem der gebrochene Strahl die passend verlängerte Verbindungslinie QC des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkt der Kugel auf alle Fälle schneiden wird.

Fig. 78.



Bezeichnen wir nun den Einfallswinkel QJE mit i, und den Brechungswinkel CJD mit i', den Brechungsexponenten aus dem ersten vor MN liegenden Mittel, aus welchem das Licht kommt, in das zweite mit n, so haben wir

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n.$$

Nach dem Satze der Trigonometrie, dafs sich in einem Dreiecke zwei Seiten verhalten wie die Sinus der Gegenwinkel, ist dann weiter

$$\frac{QC}{CJ} = \frac{\sin QJC}{\sin JQD} = \frac{\sin EJQ}{\sin JQD}$$

und ebenso

$$\frac{CD}{CJ} = \frac{\sin CJD}{\sin CDJ}$$

und durch Division der beiden letzten Gleichungen

$$\frac{QC}{CD} = \frac{\sin EJQ}{\sin JQD} \cdot \frac{\sin CDJ}{\sin CJD} = \frac{\sin i}{\sin i'} \cdot \frac{\sin CDJ}{\sin JQD}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{\sin CDJ}{\sin JQD} = \frac{QJ}{JD}$$

und somit

$$\frac{QC}{CD} = n \frac{QJ}{JD}.$$

Wir erhalten daraus

$$CD = \frac{JD \cdot QC}{n \cdot QJ}$$

und folglich

$$SD = SC + \frac{JD \cdot QC}{n \cdot QJ}.$$

Man sieht demnach, der Wert von SD hängt, aufser von dem Radius der Kugel, ab von der Lage des leuchtenden Punktes und der des Punktes J, wo der Strahl die Fläche trifft. Bei konstantem Abstande des leuchtenden Punktes ist er daher für alle Strahlen derselbe, für welche J dieselbe Lage hat. Lassen wir daher die Figur 78 um QD als Axe sich drehen, so wird der Punkt J einen Ring beschreiben, und alle diesen Ring treffenden Strahlen werden nach der Brechung die Axe in D schneiden. Man nennt daher D den Brennpunkt dieses Ringes. Die Brennpunkte der verschiedenen Ringe aber, welche der Punkt J in andern Lagen beschreibt, werden verschieden weit von S entfernt sein.

Beschränken wir uns aber auch hier wieder nur auf solche Strahlen, welche sehr nahe bei S auftreffen, so werden wir für diese Strahlen ohne merklichen Fehler setzen können

$$QJ = QS \text{ und } JD = SD,$$

demnach

$$\frac{QC}{CD} = n\,\frac{QS}{SD}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Abstand des leuchtenden Punktes von S mit a, den Abstand SD des Punktes, in welchem der gebrochene Lichtstrahl die Axe schneidet vom Scheitel mit f, und den Radius der Kugelfläche mit r, so erhalten wir:

$$\frac{a+r}{f-r} = n\,\frac{a}{f},$$

woraus durch einfache Umformung sich ergibt

$$f = \frac{nar}{na-a-r} \quad \ldots \quad (1).$$

Die Gleichung zeigt, dafs bei der Beschränkung auf solche Strahlen, welche nahe der Axe auffallen, also bei brechenden Flächen von kleiner Öffnung, jeder leuchtende Punkt einen bestimmten Brennpunkt hat, dessen Lage bei gegebener Krümmung der brechenden Fläche und gegebenem brechenden Mittel nur abhängt von dem Abstande des leuchtenden Punktes von dem Scheitel der brechenden Fläche. Da somit einem bestimmten Punkte der Axe auch ein ganz bestimmter Brennpunkt entspricht, so nennt man die beiden so einander entsprechenden Punkte konjugierte Punkte.

Diese Ableitung gilt zunächst nur für kugelförmige Flächen, welche dem Lichtstrahle ihre konvexe Seite darbieten, indes folgt aus dem Reciprocitätsgesetze, dafs wenn D der leuchtende Punkt und DJ der aus dem zweiten Mittel in das erste einfallende Lichtstrahl ist, dafs dann JQ der gebrochene Lichtstrahl ist. Die von D ausgehenden Centralstrahlen werden daher ebenso in Q ihren Brennpunkt haben, wie die von Q ausgehenden ihn in D haben. Um also den Brennpunkt zu erhalten für den Fall, dafs auf die konkave Seite der Kugelfläche das Licht auffällt, haben wir in unserem obigen Ausdrucke a und f mit einander zu vertauschen, indem dann SD der Abstand des leuchtenden und QS der des Brennpunktes vom Scheitel ist, und anstatt

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n$$

einzusetzen

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = n,$$

da wir den Brechungsexponenten des Mittels, in welches das Licht eintritt, mit n bezeichneten, und jetzt i' der Einfallswinkel und i der Brechungswinkel ist. Demnach erhalten wir

$$a = \frac{fr}{f - nf - nr}$$

oder

$$f = \frac{nar}{a - na - r} = \frac{-nar}{na - a + r}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem vorigen nur dadurch, dafs hier r, der Radius der Fläche, das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Wir können daher den vorher entwickelten Ausdruck

$$f = \frac{nar}{na - a - r}$$

als den für alle Fälle gültigen betrachten, indem wir das Vorzeichen von r unbestimmt lassen und bemerken, dafs dasselbe positiv ist, wenn die Fläche dem ankommenden Lichtstrahl die konvexe, negativ jedoch, wenn sie demselben die konkave Seite darbietet. Das Gleiche gilt für alle aus diesem abgeleitete Ausdrücke.

Unser Ausdruck wird bequemer, wenn wir anstatt des Wertes f seinen reciproken Wert einführen, er wird dann

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} - \frac{1}{na}$$

oder

$$\frac{n}{f} + \frac{1}{a} = \frac{n-1}{r} \quad \ldots\ldots (2).$$

Bezeichnen wir den Abstand f, wenn der Abstand a unendlich wird, also die Brennweite paralleler Strahlen mit F, so wird, da dann

$$\frac{1}{a} = o,$$

$$\frac{n}{F} = \frac{n-1}{r}$$

$$F = \frac{nr}{n-1}.$$

Den im Abstand F von dem Scheitel der brechenden Fläche liegenden Punkt, in welchem sich die vor der Brechnng mit der Axe parallelen Strahlen nach der Brechung schneiden, nennt man den zweiten Hauptbrennpunkt der brechenden Fläche.

Setzen wir F in die allgemeine Gleichung (2) ein, so wird dieselbe

$$\frac{n}{f} + \frac{1}{a} = \frac{n}{F} \quad \ldots\ldots (3).$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand des leuchtenden Punktes, für welchen

der Brennpunkt unendlich weit entfernt ist, mit A, so haben wir

$$\frac{1}{A} = \frac{n-1}{r}$$

$$A = \frac{r}{n-1}; \quad F = nA.$$

Diesen Punkt, von welchem die Strahlen ausgehen müssen, damit sie nach der Brechung parallel werden, nennt man den ersten Hauptbrennpunkt der brechenden Fläche.

Mit Hülfe der für A und F erhaltenen Ausdrücke wird die Gleichung (2)

$$\frac{n}{f} + \frac{1}{a} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{nA}{f} + \frac{A}{a} = 1 = \frac{F}{f} + \frac{A}{a} \cdots\cdot (4).$$

Und daraus erhalten wir für f den Ausdruck

$$f = \frac{aF}{a-A} \cdots\cdot (5).$$

Die verschiedenen Ausdrücke für den Abstand des Brennpunktes von dem Scheitel der brechenden Fläche sind je nach den verschiedenen Gröfsen, welche in Bezug auf dieselbe gegeben sind, bald der eine, bald der andere bequemer anzuwenden.

Ganz analoge Ausdrücke erhalten wir für den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte der brechenden Fläche. Bezeichnen wir den Abstand des leuchtenden Punktes von dem Mittelpunkte C mit b, und den des Brennpunktes mit g, so können wir den vorhin (S. 219) abgeleiteten Ausdruck

$$\frac{QC}{CD} = n\,\frac{QS}{SD}$$

schreiben

$$\frac{b}{g} = n\,\frac{b-r}{g+r},$$

woraus

$$g = \frac{br}{(n-1)\,b - nr} \cdots\cdot (1\,\text{a})$$

und

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r} \cdots\cdot (2\,\text{a}).$$

Bezeichnen wir wieder den Abstand des zweiten Hauptbrennpunktes vom Mittelpunkte mit G, so wird, da dann

$$\frac{n}{b} = 0,$$

$$\frac{1}{G} = \frac{n-1}{r}, \quad G = \frac{r}{n-1}$$

und

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{1}{G} \cdots\cdot (3\,\text{a}).$$

Bezeichnen wir schliefslich den Abstand des ersten Hauptbrennpunktes vom Mittelpunkte mit B, so ist

$$\frac{n}{B} = \frac{n-1}{r}$$

$$B = \frac{nr}{n-1}, \quad B = nG.$$

Daraus erhalten wir gerade wie vorhin

$$\frac{G}{g} + \frac{B}{b} = 1 \quad \ldots \quad (4\,a)$$

$$g = \frac{b \cdot G}{b - B} \quad \ldots \quad (5\,a).$$

Derartige einfache Beziehungen für die Lage des Brennpunktes erhalten wir nicht nur, wenn wir die Abstände des leuchtenden Punktes und Bildpunktes vom Scheitel oder vom Mittelpunkte der brechenden Fläche rechnen, sondern immer dann, wenn wir die Abstände von irgend zwei konjugierten Punkten rechnen, den Abstand des leuchtenden von einem im ersten Mittel liegenden und den Abstand des Bildpunktes von dem im zweiten Mittel liegenden konjugierten Punkte.

Für irgend zwei Punkte, in den Abständen a und a_1 vom Scheitel erhalten wir die Brennpunkte aus den Gleichungen

$$\frac{A}{a} + \frac{F}{f} = 1 \ldots (a)$$

$$\frac{A}{a_1} + \frac{F}{f_1} = 1 \ldots (b).$$

Setzen wir nun voraus $a > a_1$, so können wir, indem wir den Abstand a von a_1 gleich c und zwar positiv, wenn a vor a_1 liegt, schreiben

$$a = a_1 + c.$$

Dann ist $f < f_1$ und, indem wir den Abstand des Brennpunktes f von f_1 mit h bezeichnen, positiv, wenn derselbe hinter dem durch f_1 gegebenen Punkte liegt, dagegen h negativ nehmen, wenn der durch f gegebene Punkt dem Scheitel näher liegt, können wir setzen

$$f = f_1 + h.$$

Damit wird die Gleichung (a)

$$A\,(f_1 + h) + F\,(a_1 + c) = (f_1 + h)\,(a_1 + c).$$

Ziehen wir von dieser die Gleichung (b)

$$A f_1 + F a_1 = f_1 a_1$$

ab, so wird

$$h\,(A - a_1) + c\,(F - f_1) = hc$$

$$\frac{A - a_1}{c} + \frac{F - f_1}{h} = 1.$$

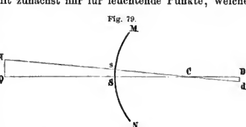
Nun ist $A - a_1$ der Abstand des ersten Hauptbrennpunktes von dem Punkte a_1, $F - f_1$ der Abstand des zweiten Hauptbrennpunktes von dem durch f_1 gegebenen zu dem ersten konjugierten Punkte. Bezeichnen wir diese Abstände mit C resp. H, so wird

$$\frac{C}{c} + \frac{H}{h} = 1.$$

Nehmen wir also alle Abstände von zwei konjugierten Punkten aus, so bekommen wir dieselbe einfache Beziehung zwischen den Abständen des leuchtenden Punktes, seines Bildpunktes und jenen der Hauptbrennpunkte, wie wenn wir die Abstände vom Scheitel oder vom Mittelpunkte rechnen. Ja die beiden letztern Fälle können wir als Specialfälle des jetzt abgeleiteten allgemeinern bezeichnen. Denn sowohl der Scheitel als auch der Mittelpunkt ist sein eigner konjugierter Punkt. Setzen wir nämlich in Gleichung (5) $a = 0$, so wird auch $f = 0$, und ebenso wird in (5a) $g = 0$, wenn wir $b = 0$ nehmen, es fällt also das Bild des Scheitels in den Scheitel, das des Mittelpunktes in den Mittelpunkt.

Unsere Entwicklung gilt zunächst nur für leuchtende Punkte, welche in der Axe der brechenden Fläche liegen, indes ist sie sofort auch auf solche Punkte zu übertragen, welche aufserhalb derselben in nicht grofser Entfernung von ihr liegen. Ist q (Fig. 79) ein solcher Punkt, dessen Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte C, qC mit der Hauptaxe QC nur einen kleinen Winkel bildet, so ist qC ebenso die Axe des von q auf die brechende Fläche fallenden Strahlenkegels, wie es QC für den Punkt Q ist. Wenn wir uns daher wie vorhin nur auf die Strahlen beschränken, welche in der Nähe des Scheitels s die brechende Fläche treffen, so gelten die vorhin für den Punkt Q und die Axe QC abgeleiteten Sätze unmittelbar auch für den Punkt q in Bezug auf die Nebenaxe qC. Der dem Punkte q zugehörige Brennpunkt wird daher auf der Axe qC liegen in einem Abstande sd vom Scheitel, der uns gegeben wird durch

Fig. 79.



$$sd = \frac{n \cdot sq \cdot r}{(n-1)\,sq - r},$$

oder nach Gleichung (3)

$$\frac{n}{sd} + \frac{1}{sq} = \frac{n}{F},$$

worin F denselben Wert wie vorhin hat, nämlich

$$F = \frac{nr}{n-1}.$$

Mit Hülfe unseres Ausdruckes für den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte können wir nun einen wichtigen Satz ableiten über die Lage des Brennpunktes d für aufser der Axe liegende leuchtende Punkte. Nach Gleichung (4a) haben wir für den Abstand Cd des Brennpunktes vom Mittelpunkte

$$\frac{G}{Cd} + \frac{B}{Cq} = 1,$$

worin G und B genau dieselben Werte haben wie für leuchtende Punkte, die auf der Axe liegen, nämlich

$$G = \frac{r}{n-1}; \quad B = \frac{nr}{n-1}.$$

Lassen wir nun von q eine Senkrechte qQ auf die Hauptaxe herab, und ebenso von d die Senkrechte dD, so haben wir bekanntlich, da QC und qC sich in C schneiden, wenn wir den Winkel qCQ mit α bezeichnen,

$$qC = \frac{QC}{\cos \alpha}; \quad Cd = \frac{CD}{\cos \alpha}$$

und setzen wir diese Ausdrücke in unsere Gleichung ein

$$\frac{G}{CD} + \frac{B}{QC} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Bezeichnen wir nun den Abstand QC mit b, so erhalten wir für den Brennpunkt eines in Q befindlichen leuchtenden Punktes nach (4a)

$$\frac{G}{g} + \frac{B}{b} = 1.$$

Da wir vorausgesetzt haben, dafs der Punkt q sehr nahe bei Q liegt, so ist der Winkel α sehr klein und daher $\cos \alpha$ nur sehr wenig von 1 verschieden. Unter der Voraussetzung ist daher

$$\frac{G}{CD} + \frac{B}{b} = \frac{G}{g} + \frac{B}{b}$$

oder

$$CD = g,$$

das heifst, der Fufspunkt der von dem Brennpunkt d auf die Hauptaxe herabgelassenen Senkrechten schneidet die Hauptaxe in dem Punkte, welcher der Brennpunkt ist des Punktes, in welchem das von dem leuchtenden Punkte auf die Hauptaxe herabgelassene Lot die Hauptaxe schneidet.

Daraus folgt dann unmittelbar, dafs eine zur Hauptaxe senkrechte leuchtende Linie als Bild ebenfalls eine zur Hauptaxe senkrechte Linie hat, welche dort liegt, wo der Brennpunkt des in der Hauptaxe liegenden Punktes jener Linie sich befindet. Dasselbe gilt auch unmittelbar von einer leuchtenden, in Q befindlichen, zur Hauptaxe senkrechten Ebene.

Eine kugelförmige brechende Fläche entwirft daher von einer leuchtenden Ebene ein Bild, welches man durch eine einfache Konstruktion leicht erhalten kann. Man legt durch den Brennpunkt des in der Hauptaxe liegenden Punktes jener Ebene eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene, zieht für alle Punkte der leuchtenden Ebene die Nebenaxen und verlängert dieselben, bis sie die durch den ersten Brennpunkt gelegte Ebene treffen. Die letztern Punkte sind die Bildpunkte der erstern.

Daraus folgt, dafs die durch derartige Flächen entworfenen Bilder den Gegenständen selbst ähnlich sind.

Auch die Gröfse der Bilder ist durch diesen Satz gegeben, alle Dimensionen des Bildes und Gegenstandes verhalten sich zu einander wie die Abstände der Ebenen, in welchen sie sich befinden, vom Mittelpunkte C. Denn wir haben

$$Dd : Qq = CD : CQ = g : b$$

und daher, da $g = f - r$, $b = a + r$,

$$Dd = \frac{f - r}{a + r} \cdot Qq.$$

Dabei ist indes zu beachten, dafs wenn $f > r$ ist, das Bild eines aufserhalb der Axe liegenden leuchtenden Punktes auf der entgegengesetzten Seite der Axe liegt wie der leuchtende Punkt selbst, da die Hauptaxe QC und die Nebenaxe qC sich im Mittelpunkte, also in dem Falle zwischen dem leuchtenden Punkte und seinem Bildpunkte schneiden.

Um das in der Gleichung für Dd auszudrücken, müssen wir demselben das negative Vorzeichen geben, also schreiben

$$-Dd = \frac{f-r}{a+r} \cdot Qq \text{ oder } Dd = -\frac{f-r}{a+r} \cdot Qq.$$

Mit Benutzung der Gleichungen zwischen g, b, G, B, f, a, F, A, welche wir vorhin abgeleitet haben, können wir dieser Gleichung manche andere Form geben. Man erhält leicht die Formen

$$\left.\begin{aligned} Dd &= -\frac{A}{a-A} \cdot Qq = -\frac{f-F}{F} \cdot Qq \\ Dd &= -\frac{r}{(n-1)a-r} \cdot Qq = -\frac{f}{na} \cdot Qq \end{aligned}\right\} \cdots \text{(II)}.$$

Jede der Gleichungen (II) gestattet die Gröfse des Bildes aus derjenigen des Gegenstandes und seinem Abstande von der brechenden Fläche entweder direkt oder mit Hülfe der bekannten Hauptbrennweiten zu berechnen.

Das Bild kann ein reelles oder virtuelles sein, jenachdem der Brennpunkt des auf der Axe liegenden Punktes ein reeller oder virtueller ist. Ist die brechende Fläche konvex, und n gröfser als 1, so haben wir

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{na}.$$

Der Wert von f ist im allgemeinen positiv, der Brennpunkt des in der Axe liegenden leuchtenden Punktes liegt auf der andern Seite der brechenden Fläche als der leuchtende Punkt, die Strahlen schneiden sich dort wirklich, der Brennpunkt ist ein reeller.

Ist die brechende Fläche konkav, so ist

$$\frac{1}{f} = -\frac{n-1}{nr} - \frac{1}{na}.$$

In diesem Falle ist der Brennpunkt im allgemeinen ein virtueller, er liegt, da der Wert von f negativ ist, auf derselben Seite der brechenden Fläche mit dem leuchtenden Punkte, die Strahlen divergieren nach der Brechung so, als kämen sie von einem Punkte vor der Fläche, der jedoch ein anderer ist als der leuchtende Punkt.

Konvexe brechende Flächen geben daher im allgemeinen reelle, konkave dagegen virtuelle Bilder, wenn der Brechungsexponent des Mittels, in welches das Licht eintritt, gröfser ist als 1. Ist der Brechungsexponent kleiner als 1, so ist nach unsern Formeln das Umgekehrte der Fall, und da dann das Licht vom Einfallslote fortgebrochen wird, so zeigt eine der Fig. 78 analoge Konstruktion dieses unmittelbar.

Auch wenn $n > 1$ ist, kann letzteres der Fall sein, und zwar da

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{na},$$

tritt es ein, wenn

$$na < F,$$

da dann

$$\frac{1}{na} > \frac{1}{F}$$

nnd somit f negativ wird. Welchen Wert dann a haben mufs, das hängt, wie man sieht, wesentlich von dem Werte des Brechungsexponenten n ab[1]).

§ 37.

Brechung in einem Systeme kugelförmiger Flächen. In den seltensten Fällen hat man den Gang der Lichtstrahlen nur durch eine brechende Fläche zu verfolgen, indem bei allen optischen Apparaten mehrere brechende Flächen vereinigt sind. Wir haben daher zunächst den Gang der Lichtstrahlen durch ein System von brechenden Flächen zu betrachten, wobei wir uns jedoch auf centrierte Systeme von Kugelflächen beschränken wollen, das heifst auf solche, deren Mittelpunkte alle auf einer geraden Linie liegen, welche wir als die Axe des Systemes bezeichnen[2]).

Es ist nicht schwierig, mit Hülfe der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze den Gang der Strahlen durch ein solches System brechender Flächen zu bestimmen. Wir wissen, dafs die von einem in der Axe liegenden Punkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung an der ersten Fläche wieder nach einem in der Axe liegenden Punkte konvergieren; dieser Punkt ist dann als der leuchtende Punkt zu betrachten, der seine Strahlen auf die zweite Fläche sendet. Nach der Brechung an der zweiten Fläche müssen die Strahlen nach einem zweiten Brennpunkte konvergieren, welcher ebenfalls auf der Axe liegen mufs, und dessen Abstand von der Fläche aus der Entfernung des ersten Brennpunktes von ihr und dem Radius der Fläche sowie dem Brechungsverhältnisse des Mittels, das sie begrenzt, gefunden wird durch eine der vorigen ganz gleiche Formel.

Das Bild einer zur Axe senkrechten Ebene, das eine kugelförmige brechende Fläche entwirft, liegt ebenfalls in einer zur Axe senkrechten Ebene, das Bild, welches die zweite brechende Fläche von diesem Bilde entwirft, mufs daher ebenfalls in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen, und seine Gröfse ist durch eine der vorigen ganz analoge Rechnung zu finden. Gleiches gilt dann natürlich für eine dritte, vierte, $n$te Fläche.

Wir wollen uns zunächst auf den in der Praxis häufigsten Fall zweier brechender Flächen beschränken und mit Hülfe der dort erhaltenen Beziehungen zeigen, wie man leicht zu der Brechung in beliebig vielen Flächen übergehen kann.

Es sei n der Brechungsexponent in der ersten, ν der in der zweiten Fläche, r der Radius der ersten, ϱ jener der zweiten Fläche.

Um den Brennpunkt eines auf der Axe liegenden Punktes zu bestimmen,

[1]) Diese Ableitung ist wesentlich die von *Helmholtz* gegebene, siehe dessen physiologische Optik I. § 9.

[2]) Die Theorie der Cylinderlinsen, das heifst solcher, welche von Cylinderflächen begrenzt sind, sehe man bei *Reusch*, Theorie der Cylinderlinsen. Leipzig, B. G. Teubner, 1868.

sei D (Fig. 80) der Bildpunkt, wenn das von Q ausstrahlende Licbt nur an der ersten Fläche MN eine Brechung erfahren und dann in dem zweiten Mittel bliebe. Der Abstand $SD = f_1$ dieses Bildpunktes von dem Scheitel S der ersten brechenden Fläcbe ist gemäfs den Entwicklungen des vorigen Paragraphen gegeben durch

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{n a_1},$$

wenn F_1 die zweite Hauptbrennweite der ersten brechenden Fläcbe bezeichnet, also

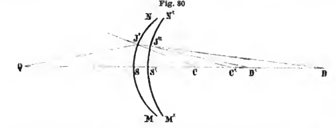
$$F_1 = \frac{n r}{n-1}$$

und a_1 der Abstand des leuchtenden Punktes vom Scheitel der ersten brechenden Fläche ist. Führen wir gleichzeitig die erste Hauptbrennweite A_1 der ersten brechenden Fläcbe ein, $A_1 = \frac{r}{n-1}$, so wird

$$f_1 = \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1}.$$

Die im zweiten Mittel nach D konvergierenden Strahlen werden in der

Fig. 80



zweiten brecbenden Fläche $N'M'$ neuerdings gebrochen, da diese Fläche zwei verschiedene Medien von einander trennt. Da die die Fläche treffenden Strahlen homocentrisch sind, das heifst zu einem in D liegenden Wellenmittelpunkt gehören, so werden dieselben so gebrochen, dafs sie nach der Brecbung wieder zu einem Punkte D' konvergieren, dessen Abstand vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche S' durch eine der vorigen ganz gleicbe Gleichung bestimmt wird. Wir führen zur Bildung derselben am besten die erste und zweite Hauptbrennweite der zweiten brechenden Fläcbe ein. Der zweite Hauptbrennpunkt ist jener Punkt, nach welchem die Strahlen im dritten Mittel konvergieren, welcbe im zweiten Mittel, also zwischen den beiden brecbenden Flächen der Axe parallel waren, sein Abstand vom Scbeitel ist gegeben durch

$$F_2 = \frac{\nu \varrho}{\nu - 1}.$$

Die erste Hauptbrennweite A_2 der zweiten brechenden Fläche ist der Abstand desjenigen Punktes von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche, nach welcbem die Strahlen zwischen den beiden brechenden Flächen konvergieren müssen, damit sie im dritten Mittel der Axe parallel werden;

dieselbe ist gegeben durch

$$A_2 = \frac{\varrho}{\nu - 1}.$$

Nennen wir den Abstand DS' des von der ersten Fläche entworfenen Bildes vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche a_2, so wird der Abstand $D'S' = f_2$, welches die zweite brechende Fläche von diesem Bilde entwirft,

$$f_2 = \frac{a_2 F_2}{a_2 - A_2}.$$

Nennen wir den Abstand der beiden Scheitel der brechenden Flächen $SS' = d$, so ist

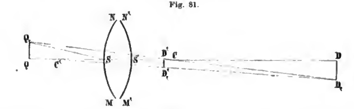
$$a_2 = d - f_1 = d - \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1},$$

denn a_2 ist positiv, wenn das erste Bild vor S' liegt, also $d > f_1$ ist, dagegen negativ, wenn wie in der Zeichnung D hinter S' liegt. Setzen wir diesen Wert von a_2 in die Gleichung für f_2 ein, so wird

$$f_2 = \frac{a_1 F_2 (d - F_1) - d A_1 F_2}{a_1 (d - F_1 - A_2) - A_1 d + A_1 A_2} \quad \ldots \quad (A).$$

Die Gleichung (A) gibt den auf der Axe gerechneten Abstand des Bildpunktes von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche, liegt also der leuchtende Punkt auf der Axe selbst, so ist die Lage seines Bildpunktes durch den Abstand des leuchtenden Punktes vom Scheitel der ersten brechenden Fläche und die Konstanten des optischen Systemes n, ν, r, ϱ, d vollständig bestimmt. Liegt aber der leuchtende Punkt aufserhalb der Axe, so gibt uns f den Abstand des Punktes auf der Axe vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche, in welchem eine vom Bildpunkte auf die Axe gezogene Senkrechte die Axe trifft. Liegt also der leuchtende Punkt aufserhalb der Axe, oder ist das leuchtende Objekt eine Linie oder Ebene, so haben wir noch den senkrechten Abstand des Bildpunktes von der Axe oder die Gröfse

Fig. 81.



des Bildes zu berechnen. Wir gelangen dazu leicht mit Hülfe einer zweimaligen Anwendung einer der Gleichungen (II) des vorigen Paragraphen. Denn ist Q_1 Fig. 81 ein solcher aufserhalb der Axe liegender Punkt, dessen Projektion auf die Axe Q ist, so erhalten wir den ersten Brennpunkt von Q_1, das heifst den Punkt, nach welchem die von Q_1 ausgehenden Strahlen nach der ersten Brechung in MN konvergieren, D_1, wenn wir in D, dem Brennpunkte von Q, ein Perpendikel errichten und dasselbe verlängern, bis es die durch den Mittelpunkt C der ersten brechenden Fläche gelegte Axe $Q_1 C$ in D_1 trifft, und wir haben nach der ersten der Gleichungen (II) des

vorigen Paragraphen, wenn wir $Qq = Y$, $DD_1 = y_1$ setzen,

$$y_1 = -\frac{A_1}{a_1 - A_1}\,Y.$$

Nennen wir die Gröfse des Bildes $D'D'_1$ jetzt y_2, so ist das Verhältnis desselben zu y_1, da es das von der zweiten Fläche entworfene Bild von DD' ist, gegeben durch

$$y_2 = -\frac{A_2}{a_2 - A_2}\,y_1.$$

Bezogen auf die Gröfse $QQ_1 = Y$ wird es demnach

$$y_2 = \frac{A_1}{a_1 - A_1}\cdot\frac{A_2}{a_2 - A_2}\cdot Y.$$

Ersetzen wir hierin a_2 durch seinen Wert, so wird

$$y_2 = \frac{A_1 A_2}{a_1 (d - F_1 - A_2) - A_1 d + A_1 A_2}\,Y \cdot \cdot \cdot \cdot \text{(B)}.$$

Durch die Gleichungen (A) und (B) ist die Lage und Gröfse der von einem System zweier brechender Flächen entworfenen Bilder vollständig bestimmt, indem die Gleichung (A) uns den auf der Axe gerechneten Abstand des Bildes vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche und die Gleichung (B) uns die Gröfse des Bildes oder auch seinen senkrechten Abstand von der Axe liefert.

In der vorliegenden Form sind die beiden Gleichungen wenig geeignet uns die Lage und Gröfse der Bilder übersichtlich darzustellen. Sehr viel übersichtlicher werden dieselben, wenn wir den Abstand der beiden brechenden Flächen, d, so klein voraussetzen, dafs wir ihn gegenüber den sonst hier in Betracht kommenden Gröfsen vernachlässigen dürfen. Denn setzen wir in den Gleichungen (A) und (B) $d = 0$, so wird

$$f_2 = \frac{a_1 F_1 F_2}{a_1 (F_1 + A_2) - A_1 A_2}$$

$$y_2 = -\frac{A_1 A_2}{a_1 (F_1 + A_2) - A_1 A_2}\,Y = -f_2\,\frac{A_1 A_2}{a_1 F_1 F_2}\,Y = -\frac{f_2}{n\nu a_1}\,Y.$$

Führen wir anstatt f_2 seinen reciproken Wert ein, so wird

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2} + \frac{A_2}{F_1 F_2} - \frac{A_1 A_2}{a_1 F_1 F_2} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{\nu F_1} - \frac{1}{n\nu a_1}.$$

Da auch hier die beiden ersten Glieder den Abstand des Punktes vom Scheitel liefern, für Strahlen, welche vor der ersten Brechung einander und der Axe parallel waren, so können wir, wenn wir diesen Abstand als die zweite Hauptbrennweite des Systems mit F bezeichnen, schreiben

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\nu a_1};$$

wir erhalten somit eine Gleichung, welche der für eine brechende Fläche gefundenen ganz analog ist, um so mehr noch, wenn wir uns daran erinnern, dafs das Produkt $n\nu$ der beiden Brechungsexponenten in der ersten und zweiten brechenden Fläche gleich ist dem Brechungsexponenten bei dem Übergange des Lichtes aus dem ersten in das dritte Mittel.

Die erste Hauptbrennweite erhalten wir aus der letzten Gleichung, indem wir den Wert von a für $f = \infty$ bestimmen. Darnach wird

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{n \,.\, \nu \,.\, A}; \quad A = \frac{F}{n \,.\, \nu}.$$

Zwischen den beiden Hauptbrennweiten bestebt also eine ganz ebensolche Beziehung wie bei einer brechenden Fläche; damit können wir der Gleichung für f_2 ganz dieselben Formen geben, die wir für eine Fläche erhielten. Insbesondere erhalten wir sofort durch Multiplikation nnserer Gleichung für f_2 mit F

$$\frac{F}{f_2} + \frac{A}{a_1} = 1$$

und

$$f_2 = \frac{a_1 \,.\, F}{a_1 - A}.$$

§ 38.

Vereinfachung der Gleichungen durch Einführung der Hauptpunkte. Die am Schlnsse des vorigen Paragraphen den Gleichungen gegebene einfachere Gestalt haben wir nur auf Kosten der Genauigkeit erhalten; ist der Fehler auch in den meisten Fällen so klein, dafs man ihn in der That aufser Acht lassen kann, so gibt es doch Fälle, in welchen die Abstände der brechenden Flächen keineswegs gegenüber den sonstigen in Betracht kommenden Dimensionen verschwindend klein sind. Man kann indes auch bei Berücksichtigung der Abstände der brechenden Flächen zu denselben einfachen Gleichungen kommen, wenn man die Abstände der leuchtenden Punkte und Brennpunkte nicht von den Scheiteln der brechenden Fläche, sondern von einem Paar konjugierter Punkte rechnet, also von zwei Punkten, die so liegen, dafs der zweite das Bild ist, welches das System von dem ersten entwirft. So sind der erste Hauptbrennpunkt der ersten und der zweite Hauptbrennpunkt der zweiten brechenden Fläche konjugierte Punkte, denn da die von dem erstern dieser Punkte ausgehenden Strahlen nach der ersten Brechung parallel werden, müssen sie nach der zweiten Brechung gegen den zweiten Hauptbrennpunkt der zweiten Fläche konvergieren.

Obwohl es zur Vereinfachung der Gleichungen einerlei ist, von welchem Paare konjugierter Punkte wir die Abstände rechnen, wollen wir sie doch gleich von dem von Gauss[1]) in die Dioptrik eingeführten Paare der Hauptpunkte aus rechnen, da dieselben resp. die senkrecht zur Axe des Systems gelegten Ebenen, die Hauptebenen zur Konstruktion der Bilder sehr bequem sind. Die Lage der Hauptpunkte ist dadurch definiert, dafs ein in der ersten Hauptebene liegender Punkt sein Bild in der zweiten Hauptebene hat, und zwar an derselben Seite von der Hauptaxe und in der gleichen Entfernung von derselben, in welcher sich der in der ersten Hauptebene gegebene Punkt befindet. Der Abstand h_1 des ersten Hauptpunktes vom

[1]) *Gauss*, Dioptrische Untersuchungen. Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Teil I. 1838—1841.

Scheitel der ersten brechenden Fläche ist somit, wenn wir den Abstand des in der ersten Hauptebene gegebenen Punktes von der Axe mit Y, den Abstand seines Bildes von der Axe mit y bezeichnen, gegeben durch die Bedingung

$$y = Y$$

oder nach Gleichung (B) des vorigen Paragraphen

$$\frac{A_1 A_2}{h_1 (d - F_1 - A_2) - A_1 d + A_1 A_2} = 1$$

$$h_1 = \frac{A_1 d}{d - F_1 - A_2}.$$

Da der zweite Hauptpunkt das Bild des ersten ist, erhalten wir seinen Abstand h_2 vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche, indem wir diesen Wert von h_1 in die Gleichung A einsetzen

$$h_2 = \frac{h_1 F_2 (d - F_1) - d A_1 F_2}{h_1 (d - F_1 - A_2) - A_1 d + A_1 A_2}$$

$$h_2 = \frac{F_2 d}{d - F_1 - A_2}.$$

Die Abstände der beiden Hauptpunkte verhalten sich somit wie die erste Hauptbrennweite der ersten Fläche znr zweiten Hanptbrennweite der zweiten brechenden Fläche.

Um die Abhängigkeit der Lage der Hauptpunkte von den Konstanten des optischen Systemes n, ν, r, ϱ und d zu erhalten, haben wir nur die vier Hauptbrennweiten durch dieselben auszudrücken; es wird dann

$$h_1 = \frac{(\nu - 1) r d}{(\nu - 1)(n - 1) d - (\nu - 1) n r - (n - 1) \varrho}$$

$$h_2 = \frac{(n - 1) \nu \varrho d}{(\nu - 1)(n - 1) d - (\nu - 1) n r - (n - 1) \varrho}.$$

Wir wollen diese Gleichnngen, um die Lage der Hauptpunkte zu übersehen, auf einige specielle Fälle anwenden. Betrachten wir zunächst eine Glaslinse in Luft, welche anf beiden Seiten ihre Konvexität nach anfsen wendet, eine sogenannte bikonvexe Glaslinse. Der Brechungsexponent des Glases sei 1,5, die Radien der beiden Flächen seien gleich grofs und der Abstand ihrer Scheitel sei gleich 0,1 r. Wir haben nnr diese Werte in unsere Gleichungen für h_1 und h_2 einznsetzen. Diese Werte sind $n = 1{,}5$; der Brechungsexponent ν ist in diesem Falle, da wir auf beiden Seiten Luft voraussetzen, gleich $\frac{1}{n} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66$. Da wir voraussetzen, dafs beide brechende Flächen ihre Konvexität nach anfsen richten, so wendet jedenfalls die zweite brechende Fläche dem ankommenden Lichte ihre konkave Seite zu, somit ist

$$\varrho = - r.$$

Ersetzen wir im Nenner unserer Gleichungen noch d dnrch seinen Wert 0,1 r, so wird zunächst die Gleichung für den ersten Hauptpunkt

$$h_1 = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right) r \cdot d}{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - 1)\, 0{,}1\, r - \left(\frac{1}{n} - 1\right) n r + (n - 1)\, r}$$

$$h_1 = \frac{d}{(n - 1)\, 0{,}1 - 2n} = - \frac{d}{2n - (n - 1)\, 0{,}1}.$$

und wenn wir jetzt $n = 1{,}5$ setzen

$$h_1 = - \frac{d}{3 - 0{,}05} = - \frac{d}{2{,}95}.$$

Da das Vorzeichen dieses Wertes von h_1 negativ ist, so liegt der erste Hauptpunkt hinter dem Scheitel der ersten brechenden Fläche und zwar fast genau um $\frac{1}{3}$ des Abstandes der beiden Flächen.

Für den zweiten Hauptpunkt bekommen wir zunächst

$$h_2 = - \frac{(n - 1) \cdot \frac{1}{n} \cdot r d}{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - 1)\, 0{,}1\, r - \left(\frac{1}{n} - 1\right) n r + (n - 1)\, r}$$

$$h_2 = - \frac{d}{(1 - n) \cdot 0{,}1 + 2n} = - \frac{d}{2n - (n - 1) \cdot 0{,}1},$$

$$h_2 = - \frac{d}{2{,}95}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet hier, daſs der zweite Hauptpunkt vor der zweiten brechenden Fläche liegt, und zwar wieder um fast genau $\frac{1}{3}$ des Abstandes der beiden brechenden Flächen.

In diesem Falle liegen also beide Hauptpunkte zwischen den beiden brechenden Flächen und zwar von einander und den brechenden Flächen um $\frac{1}{3}$ des Abstandes der Scheitel entfernt.

Befindet sich hinter der zweiten brechenden Fläche ein stärker brechendes Mittel, so rücken die Hauptpunkte näher an die erste brechende Fläche und näher an einander. Befindet sich z. B. hinter der zweiten brechenden Fläche Wasser, so wird $\nu = \frac{8}{9}$, da der Brechungsexponent des Wassers, wenn das Licht aus Luft in dasselbe übertritt, gleich $\frac{4}{3}$ ist. Denn wir erhalten nach § 15 den Brechungsexponenten des Lichtes beim Übergang aus Glas in Wasser

$$\nu = \tfrac{4}{3} : \tfrac{3}{2} = \tfrac{8}{9}.$$

Setzen wir diesen Wert für ν in die Gleichungen der Hauptpunkte ein, während n, r, ϱ, d die eben angenommenen Werte behalten, so wird

$$h_1 = - \frac{2d}{11{,}9}; \qquad h_2 = - \frac{8d}{11{,}9}.$$

Der erste Hauptpunkt liegt also fast genau $\frac{1}{6} d$ hinter dem Scheitel der ersten brechenden Fläche und der zweite fast genau $\frac{1}{6} d$ hinter dem ersten.

Wird die Form der brechenden Fläche eine andere, so wird es auch die Lage der Hauptpunkte; nehmen wir an, die zweite brechende Fläche wende ebenfalls ihre konvexe Seite dem ankommenden Lichte zu, ihr Radius

sei aber doppelt so grofs als der der ersten Fläche, also

$$\varrho = 2r,$$

so erhalten wir, wenn alles Übrige ungeändert bleibt, auf beiden Seiten des Systems Luft und $n = 1,5$, $d = 0,1\,r$ ist, für die Lage der Hauptpunkte folgende Werte

$$h_1 = \frac{d}{1,55}; \qquad h_2 = -\frac{2d}{1,55}.$$

Der Abstand des ersten Hauptpunktes von der ersten Fläche hat das positive Vorzeichen, der Punkt liegt also vor der ersten Fläcbe und zwar um $\frac{2}{3}$ der Linsendicke. Der zweite Hauptpunkt liegt, da der Wert von h_2 negativ ist, vor der zweiten Fläche, und da $\frac{2d}{1,55} > d$ selbst vor der ersten Fläcbe und zwar fast genau um $\frac{1}{3}\,d$. Der Abstand der Hanptpunkte ist also wieder fast genau $\frac{1}{3}\,d$. Würde bei diesem System brecbender Flächen hinter der zweiten Fläche wieder ein stärker brecbendes Mittel sich befinden, so würden die Hauptpunkte ancb wieder einander und der ersten Fläche näber rücken; wäre das Mittel Wasser, so würde

$$h_1 = \frac{d}{7,55}; \qquad h_2 = -\frac{8d}{7,55}.$$

Beide Punkte liegen vor der ersten Fläche; ibr Abstand ist etwa $\frac{1}{15}d$ und fast ebenso grofs ist der Abstand des zweiten Hauptpunktes von der ersten Fläche.

Führen wir nun zur Bestimmung der Bildpnnkte anstatt der Entfernung der leuchtenden Objekte vom Scheitel der ersten brecbenden Fläche jene vom ersten Hanptpunkte, anstatt des auf der Axe gerechneten Abstandes des Bildpunktes vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche jenen vom zweiten Hauptpnnkt in unsere Gleicbungen ein, so ergibt sich die Vereinfachung unserer Gleicbungen unmittelbar.

Da ein positiver Wert von h_1 bedeutet, dafs der erste Hauptpunkt vor dem Scheitel der ersten Fläche liegt, so ergibt sicb, dafs der Abstand der leucbtenden Punkte vom ersten Hanptpunkte gleicb ist der Differenz zwischen dem Abstande des leucbtenden Punktes und des ersten Hauptpunktes vom Scbeitel; oder nennen wir den Abstand des lenchtenden Punktes von dem ersten Hauptpunkte a, so ist

$$a = a_1 - h_1; \quad a_1 = a + h_1.$$

Ein positiver Wert von h_2 bedentet, dafs der zweite Hauptpunkt hinter der zweiten Fläcbe liegt; der Abstand des Bildpunktes vom zweiten Hauptpunkte ist also gleicb der Differenz der Abstände des Bildpunktes und Hanptpunktes vom zweiten Scbeitel. Oder wenn f den Abstand des Bildpunktes von dem zweiten Hanptpunkte bedeutet, ist

$$f = f_2 - h_2$$

oder

$$a_1 = a + \frac{A_1 d}{d - F_1 - A_2} \qquad f = f_2 - \frac{F_2 d}{d - F_1 - A_2}.$$

Setzen wir diese Werte für a_1 und h_2 in die Gleicbung (A), so erbält man unmittelbar

$$f = \frac{a \cdot F_1 F_2}{a(F_1 + A_2 - d) - A_1 A_2} \quad \ldots \text{(I)},$$

nnd die Gleichung (B) wird

$$y_2 = -\frac{A_1 A_2}{a(F_1 + A_2 - d) - A_1 A_2} \, Y \quad \ldots \text{(II)}.$$

Führen wir in diese Gleichungen die Hauptbrennweiten des Systems ein, so nehmen die Gleichungen dieselbe Form an, die wir auch für eine brechende Fläche erhielten. Als erste Hanptbrennweite definieren wir den Abstand des leuchtenden Punktes von dem ersten Hauptpunkte, von welchem die Strahlen ausgehen, welche nach sämtlichen Brechungen im dritten Mittel als parallele weiter gehen, als zweite Hauptbrennweite den Abstand des Punktes vom zweiten Hanptpunkte, in welchem sich nach dem Durchtritt dnrch beide brechenden Flächen die Strahlen schneiden, welche vor der Brechung parallel waren. Der Abstand A des ersten Punktes wird also aus der Gleichung (1) erhalten, indem wir $f = \infty$ setzen, der Abstand F des zweiten Punktes, indem wir $a = \infty$ setzen. Wir schreiben dazu (I)

$$\frac{1}{f} = \frac{F_1 + A_2 - d}{F_1 F_2} - \frac{A_1 A_2}{a \cdot F_1 F_2},$$

und erhalten

$$\frac{1}{F} = \frac{F_1 + A_2 - d}{F_1 F_2}, \quad \frac{1}{A} = \frac{F_1 + A_2 - d}{A_1 A_2}; \quad A = F \frac{A_1 A_2}{F_1 F_2}.$$

Da nach dem vorigen Paragraphen

$$F_1 = n A_1, \quad F_2 = \nu \cdot A_2,$$

so wird

$$\frac{A_1 A_2}{F_1 F_2} = \frac{1}{n\nu}; \quad A = \frac{F}{n\nu},$$

und damit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\nu a}; \quad \frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1; \quad f = \frac{aF}{a - A}.$$

Wie man sieht, sind diese Gleichungen identisch gleich denen, die wir für eine brechende Fläche fanden; anch die erste der drei Formen, da das Produkt $n\nu$ der Brechungsexponent des Lichtes ist, wenn dasselbe direkt ans dem ersten Mittel in das dritte übergeht.

Ebenso nehmen die Gleichungen für y_2 ganz die frühere Form an, denn es ist

$$y_2 = -\frac{f}{n\nu a} \cdot Y = -\frac{A}{a - A} \cdot Y.$$

Um unsere Gleichungen durch die Dimensionen und Brechungsexponenten unseres Systems auszudrücken, haben wir nur die Brennweiten noch in denselben anzugeben. Dieselben werden

$$\frac{1}{F} = \frac{\nu - 1}{\nu \varrho} + \frac{n - 1}{n \nu r} - \frac{d(n-1)(\nu - 1)}{n \nu r \varrho}$$

$$A = \frac{F}{n\nu}.$$

Da hiernach f aufser durch den Abstand des leuchtenden Punktes vollständig durch die beiden Hauptbrennweiten bestimmt ist, so folgt, dafs ein optisches System durch die Lage seiner Hauptpunkte und seine Hauptbrennweiten vollkommen bestimmt ist, oder dafs zwei Systeme, deren Hauptpunkte dieselbe Lage und deren Hauptbrennweiten denselben Wert haben, in optischer Beziehung identisch sind.

§ 39.

Einführung der Knotenpunkte. Wir gelangten im § 36 zur Lage der Bildpunkte von aufser der Axe liegenden leuchtenden Punkten durch Benutzung der Nebenaxen, indem wir bemerkten, dafs die Bilder der leuchtenden Punkte jedenfalls auf diesen liegen müssen. Für ein System von zwei brechenden Flächen gelangten wir zu diesen Bildern, indem wir die Nebenaxen beider brechenden Flächen anwandten, da wir für das System als solches eine Nebenaxe nicht kannten. Es ist jedoch in jedem durch ein solches System gebrochenen Strahlenbündel ein Strahl vorhanden, welcher einem Strahle des einfallenden Strahlenbündels parallel ist. Könnten wir deshalb die Lage dieser Strahlen bestimmen, so würden diese die Stelle der Nebenaxen bei einer brechenden Fläche vertreten und könnten so zur Bestimmung der Lage der Bilder dienen, ohne dafs wir den Wert von y berechnen müfsten.

Die Lage dieser Strahlen läfst sich bestimmen, indem wir die Punkte aufsuchen, in welchen dieselben die Axe schneiden; und um diese zu finden, haben wir nur die ihnen zukommende Eigenschaft mathematisch auszudrücken. Die erste Eigenschaft dieses Punktpaares ist wie gesagt die, dafs ein im ersten Mittel nach dem ersten dieser Punkte hingehender Strahl nach allen Brechungen im letzten Mittel durch den zweiten dieser Punkte gehen soll. Das ist nur dann möglich, wenn der zweite Punkt das von dem optischen System entworfene Bild des ersten Punktes ist. Nennen wir deshalb den Abstand des ersten Punktes vom ersten Hauptpunkte k_1, den Abstand des zweiten Punktes vom zweiten Hauptpunkte k_2, die erste Hauptbrennweite A, die zweite F, so erhalten wir als erste Gleichung für k_1 und k_2

$$k_2 = \frac{k_1 F}{k_1 - A} \cdots (1).$$

Die zweite Gleichung zur Bestimmung von k_1 und k_2 liefert uns die Bedingung, dafs der Strahl, welcher im letzten Mittel durch den zweiten Knotenpunkt geht, dem im ersten Mittel durch den ersten Knotenpunkt gehenden parallel sein soll. Ist demnach Fig. 82 q ein leuchtender Punkt und d sein Bildpunkt, so sind K_1 und K_2 die verlangten Punkte, wenn qK_1 parallel $K_2 d$ ist. Daraus folgt dann aber, dafs die beiden Dreiecke qQK_1 und dDK_2 einander ähnlich sind und daraus, dafs sich verhält

$$Qq : QK_1 = dD : DK_2.$$

Bezeichnen wir nun wie früher Qq mit Y, dD mit $-y$, so können wir diese Proportion auch schreiben

$$-\frac{y}{Y} = \frac{K_2 D}{K_1 Q}.$$

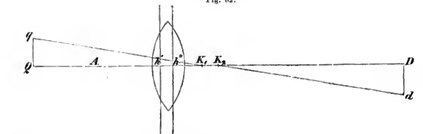
Ist h' der erste, h'' der zweite Hauptpunkt, so ist $h'K_1 = k_1$, $h''K_2 = k_2$, ferner ist $Qh_1 = a$, $h''D = f$, demnach

$$QK_1 = a - k_1 \qquad DK_2 = f - k_2,$$

worin zum Verständnis des negativen Vorzeichens von k_1 zu beachten ist, dafs wenn wie in der Figur K_1 hinter dem ersten Hauptpunkte liegt, der Wert von k_1 negativ, also $-k_1$ positiv ist. Mit diesen Werten wird dann

$$-\frac{y}{Y} = \frac{f - k_2}{a - k_1}.$$

Fig. 82.



Andererseits haben wir aber nach den Gleichungen auf Seite 234

$$-\frac{y}{Y} = \frac{f}{n\nu a} = \frac{A}{a - A},$$

somit als zweite Gleichung für k_1 und k_2

$$\frac{f - k_2}{a - k_1} = \frac{A}{a - A} \quad \cdots (2).$$

Drücken wir nun in dieser Gleichung k_2 aus Gleichung (1) durch k_1 aus, so wird

$$\frac{f - \frac{k_1 F}{k_1 - A}}{a - k_1} = \frac{A}{a - A}$$

und indem wir ebenfalls f durch a, A, F ausdrücken

$$\frac{\frac{aF}{a - A} - \frac{k_1 F}{k_1 - A}}{a - k_1} = \frac{A}{a - A},$$

woraus man unmittelbar ableitet

$$k_1 = A - F.$$

Die Lage des zweiten der gesuchten Punkte liefert uns nun direkt die Gleichung (1)

$$k_2 = \frac{k_1 \, . \, F}{k_1 - A} = \frac{(A - F)F}{A - F - A} = -(A - F) = F - A.$$

Es folgt somit, dafs es in jedem aus zwei brechenden Flächen bestehenden optischen System ein Punktpaar gibt, dessen Verbindungslinien des ersten mit dem leuchtenden Punkte, des zweiten mit dem Bildpunkte einander parallel sind, und dafs die Lage dieser Punkte nur abhängig ist

von den Konstanten des Systems, nicht aber von der Lage des leuchtenden Punktes und seines Bildpunktes. Die Eigenschaft dieses Punktpaares ist von Listing aufgefunden, welcher denselben den Namen Knotenpunkte[1]) gegeben hat. Die Knotenpunkte mit den vorhin abgeleiteten Hauptpunkten und Hauptbrennpunkten bilden die sogenannten Kardinalpunkte eines optischen Systems. Durch diese drei Punktpaare ist das optische System vollständig bestimmt, so dafs optische Systeme, deren Kardinalpunkte dieselben sind, mit einander identisch gleich sind[2]). Ausreichend bestimmt ist das System bereits durch die Hauptpunkte und die Hauptbrennpunkte, da die Lage der Knotenpunkte durch diese vollkommen bestimmt ist. Der erste Knotenpunkt liegt nämlich um die Differenz der ersten und zweiten Hauptbrennweite vor dem ersten Hauptpunkte, so dafs also, wenn $A > F$, der Knotenpunkt vor dem ersten Hauptpunkte, wenn $A < F$, hinter demselben liegt und wenn $A = F$, mit ihm zusammenfällt. Ähnliches gilt für den zweiten Knotenpunkt in Bezug zum zweiten Hauptpunkt, ist $F > A$, so liegt er hinter, ist $F < A$, vor dem zweiten Hauptpunkt, ist $F = A$, so fallen zweiter Knotenpunkt und Hauptpunkt zusammen. Daraus folgt schliefslich, da der Abstand der beiden Hauptbrennpunkte von einander gleich ist der Summe der beiden Hauptbrennweiten und des Abstandes der Hauptpunkte von einander, dafs der Abstand der beiden Knotenpunkte von einander gleich ist dem der Hauptpunkte von einander.

§ 40.

Linsen und Linsenbilder. Die in den letzten Paragraphen erhaltenen allgemeinen Resultate setzen uns sofort in den Stand, den Gang der Lichtstrahlen durch die in der Praxis gebrauchten Linsen genauer zu untersuchen. Als Linsen bezeichnet man alle von zwei krummen Flächen begrenzten brechenden Mittel; die von kugelförmigen Flächen begrenzten Linsen nennt man sphärische Linsen, und solche sind es fast ausschliefslich, welche in der Praxis gebraucht werden.

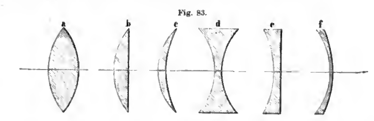
Man unterscheidet sechs Arten von sphärischen Linsen, je nachdem die Flächen derselben konvex oder konkav sind. Ist die Linse durch zwei nach aufsen konvexe Flächen begrenzt (Fig. 83a), so nennt man sie bikonvexe Linsen. Ist eine der beiden Begrenzungsflächen konvex, die andere eben (wie Fig. 83b), so ist die Linse eine plankonvexe. Ist eine der Flächen konvex, die andere konkav (wie Fig. 83c oder Fig. 83f), so heifsen die Linsen konkav-konvexe, wenn der Radius der konkaven Fläche gröfser ist als derjenige der konvexen, oder konvex-konkave, wenn das Umgekehrte der Fall ist (Fig. 83f). Im ersten Falle nennt man sie auch wohl Menisken. Die Fig. 83d abgebildete Linse, welche durch zwei nach aufsen konkave Flächen begrenzt ist, nennt man bikonkav und die von einer konkaven Fläche und einer Ebene begrenzte Linse (Fig. 83e) ist eine plankonkave Linse.

[1]) *Listing*, Beitrag zur physiologischen Optik. Göttingen 1845. Man sehe auch Artikel Dioptrik in Wagners Handwörterbuch der Physiologie. Bd. IV. p. 451.

[2]) Eine allgemeinere Behandlung der Kardinalpunkte eines optischen Systems gibt *Töpler* in Poggend. Annal. Bd. CXLII.

Man kann die Linsen auch nach zwei Gattungen ordnen, die drei ersten (Fig. 83 a, b, c) sind in der Mitte dicker als am Rande, die letztern (d, e, f) umgekehrt am Rande dicker als in der Mitte. Da die ersten, wie wir sofort ableiten werden, gewöhnlich ein reelles Bild geben, die durch sie hindurchtretenden Strahlen also konvergent gemacht werden, so nennt man sie Sammellinsen, die drei letztern, welche ein virtuelles Bild liefern, die Strahlen also divergent machen, dagegen Zerstreuungslinsen.

Fig. 83.



Ist nun n der Brechungsexponent des Lichtes für irgend eine Farbe beim Eintritt in die Linse, ν derselbe beim Austritt, r der Radius der ersten, ϱ jener der zweiten Fläche, wo wir als erste jene bezeichnen, durch welche das Licht in die Linse eintritt, so folgt zunächst aus den Entwicklungen der vorigen Paragraphen, dafs das von einem Punkte ausgehende Licht nach dem Durchtritt durch die Linsen stets wieder in einem Punkte, dem Bildpunkte, sich vereinigt, dessen auf der Axe gerechneter Abstand vom zweiten Hauptpunkte unmittelbar durch die Gleichung

$$f = \frac{a \cdot F}{a - A}$$

gegeben ist, während der Abstand des Bildpunktes von der Axe

$$y = -\frac{f}{n \nu a} \cdot Y = -\frac{A}{a - A} \cdot Y$$

ist. Die Lage der Hauptpunkte ist gegeben durch die Gleichungen des § 38

$$h_1 = \frac{(\nu - 1) r d}{(\nu - 1)(n - 1) d - (\nu - 1) n r - (n - 1) \varrho}$$

$$h_2 = \frac{(n - 1) \nu \varrho d}{(\nu - 1)(n - 1) d - (\nu - 1) n r - (n - 1) \varrho}$$

und die beiden Hauptbrennweiten durch

$$\frac{1}{F} = \frac{\nu - 1}{\nu \varrho} + \frac{n - 1}{n \nu \varrho} - \frac{(\nu - 1)(n - 1) d}{n \nu r \varrho}$$

$$A = \frac{F}{n \nu}.$$

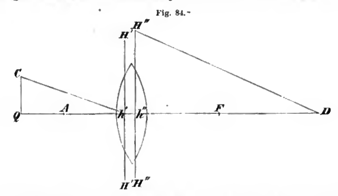
Die Lage der Bildpunkte ist wie man sieht durch die der Hauptpunkte und Hauptbrennpunkte vollständig bestimmt; wir können mit diesen die Lage der Bildpunkte sowohl berechnen als durch Konstruktion bestimmen. Eine für alle Linsen sehr einfache Konstruktion des auf der Axe liegenden Abstandes des Bildpunktes liefert uns die Gleichung für f, wenn wir ihr die Form geben

$$a : a - A = f : F;$$

dieselbe zeigt, dafs wir mit Hülfe zweier ähnlicher Dreiecke den Wert von f erhalten können. Sind nämlich Fig. 84 $H'H'$ und $H''H''$ die beiden Hauptebenen, in denen h' und h'' die beiden Hauptpunkte sind, ist ferner A der erste, F' der zweite Hauptbrennpunkt und Q ein auf der Axe liegender leuchtender Punkt, so hat man zur Bestimmung des Bildpunktes D nur $QC = QA$ senkrecht zur Axe zu ziehen, C mit h_1 zu verbinden, dann in der zweiten Hauptebene $h''H''$ gleich der zweiten Hauptbrennweite zu machen und $H''D \parallel Ch'$ zu ziehen. Der Punkt D, wo diese Linie die Axe trifft, ist der gesuchte Brennpunkt.

Liegt der leuchtende Punkt aufserhalb der Axe, etwa in C, so erhalten wir den Bildpunkt, wenn wir noch die Knotenpunkte zu Hülfe nehmen. Wir tragen von A aus die zweite Hauptbrennweite und von F' aus die erste

Fig. 84.



Hauptbrennweite gegen die Linse hin ab, und erhalten so den ersten und zweiten Knotenpunkt. Wir verbinden C mit dem ersten Knotenpunkt, legen durch den zweiten eine mit dieser Verbindungslinie parallele, und verlängern dieselbe, bis sie eine in D zur Axe gezogene Senkrechte schneidet, der Schnittpunkt ist der gesuchte Bildpunkt.

Die Werte von h_1, h_2, F' und A unterscheiden sich für die verschiedenen Linsen nur durch die Werte von n, ν, r und ϱ. Nehmen wir an, die brechenden Mittel seien immer dieselben, so unterscheiden sie sich nur durch die verschiedenen Werte und Vorzeichen von r und ϱ. Da wir für Kugelflächen, welche dem ankommenden Lichte ihre konkave Fläche zuwenden, nach § 36 das negative Vorzeichen wählen müssen, so haben wir für unsere sechs Arten von Linsen zu beachten, dafs für

1) die erste Art (Fig. 83a) die erste Fläche konvex, die zweite Fläche konkav ist, indem wir von jetzt an die Flächen als konvex bezeichnen, welche dem ankommenden Lichte ihre konvexe, als konkav, welche demselben ihre konkave Fläche darbieten. Für die Linsen der ersten Art ist daher

$$r \text{ positiv}, \ \varrho \text{ negativ}.$$

2) Die Linsen der zweiten Art haben eine konvexe Fläche und eine Ebene. Die Ebene kann als eine Kugel von unendlich grofsem Radius angesehen werden. Ist daher die Kugelfläche die erste, so ist

$$r \text{ positiv}, \ \varrho = \infty,$$

ist dagegen die Ebene die erste Fläche, so ist

$$r = \infty,\ \varrho \text{ negativ.}$$

In letzterm Falle hat die Linse nur die entgegengesetzte Lage.

3) Bei den Linsen der dritten und sechsten Art sind entweder beide Flächen konvex oder beide konkav, also entweder

$$r \text{ positiv},\ \varrho \text{ positiv},$$

oder

$$r \text{ negativ},\ \varrho \text{ negativ},$$

je nach der Lage der Flächen kann für beide beides der Fall sein. Für den Meniscus (Fig. 83c) ist, wenn

$$r \text{ und } \varrho \text{ positiv},\ r < \varrho,$$
$$r \text{ und } \varrho \text{ negativ},\ r > \varrho,$$

für die konvex-konkave Linse gilt natürlich das Gegenteil, also

$$r \text{ und } \varrho \text{ positiv},\ r > \varrho,$$
$$r \text{ und } \varrho \text{ negativ},\ r < \varrho.$$

4) Bei der bikonkaven Linse ist stets die erste Fläche konkav, die zweite konvex, also

$$r \text{ negativ},\ \varrho \text{ positiv.}$$

5) Die plankonkave Linse hat entweder eine konkave Fläche als Begrenzung und eine Ebene als zweite Fläche, oder bei umgekehrter Lage als erste Begrenzung eine Ebene und als zweite eine konvexe Fläche, also entweder

$$r \text{ negativ},\ \varrho = \infty,$$

oder

$$r = \infty,\ \varrho \text{ positiv.}$$

Untersuchen wir zunächst die Lage der Hauptpunkte für die verschiedenen Linsenarten, so finden wir für bikonvexe Linsen, daſs die Hauptpunkte immer im Innern der Linse liegen, sei es, daſs die Linse aus einem Mittel besteht, welches optisch dichter oder optisch dünner ist als das erste und dritte. Denn setzen wir den Radius der zweiten Fläche $\varrho = -r'$, so wird

$$h_1 = \frac{(\nu - 1)\, r d}{(\nu - 1)(n - 1)\, d - (\nu - 1)\, n r + (n - 1)\, r'}$$

$$h_2 = -\frac{(n - 1)\, r r' d}{(\nu - 1)(n - 1)\, d - (\nu - 1)\, n r + (n - 1)\, r'},$$

beide Werte sind aber stets negativ, mag $n > 1$, $\nu < 1$ oder $n < 1$, $\nu > 1$ sein[1]).

Für die plankonvexe Linse ist, wenn die konvexe Fläche die erste ist, r positiv, $\varrho = \infty$, damit wird $h_1 = 0$, $h_2 = -\nu d$, ist die ebene Fläche die erste, so ist $r = \infty$, $\varrho = -r'$; damit wird $h_1 = -\frac{d}{n}$, $h_2 = 0$. Der eine Hauptpunkt fällt also immer in den Scheitel der konvexen Fläche, der

[1]) Nur wenn der Abstand d der beiden brechenden Flächen sehr groſs ist, so daſs $n - 1 > n \frac{r}{d} + \frac{n-1}{1-\nu} \frac{r'}{d}$, ändern sich die Verhältnisse, diese Fälle schlieſsen wir aus; bei den in der Praxis vorkommenden Linsen ist die Dicke immer kleiner als jeder der Radien r oder r'.

andere in das Innere der Linse und zwar um $\frac{d}{n}$ resp. $\nu \cdot d$ von der ebenen Fläche entfernt, wenn die Linse optisch dichter ist als das Mittel, an welches die ebene Fläche grenzt, dagegen aufserhalb der Linse, wenn die Linse optisch dünner ist als jenes Mittel.

Für die konkav-konvexe Linse ist, wenn die konvexe Fläche die erste ist, r positiv und ebenso $\varrho = + r'$ und $r' > r$; damit wird h_1 positiv, h_2 negativ und gröfser als d, es fallen also beide Hauptpunkte vor die Linse, einerlei ob $n > 1$, $\nu < 1$ oder $n < 1$, $\nu > 1$. Nur wenn n und ν beide kleiner oder beide gröfser als 1 wären, wir uns also z. B. eine Linse aus Wasser denken, vor welcher Luft, hinter welcher Glas wäre, würden die Hauptpunkte in die Linse fallen.

In der umgekehrten Lage würden beide Hauptpunkte hinter die zweite Fläche fallen, nur wenn n und ν beide gröfser oder kleiner als 1, würden sie in die Linse fallen.

Bei bikonkaven Linsen liegen die Hauptpunkte stets in der Linse, bei plankonkaven der eine stets in der gekrümmten Fläche, der andere, wie bei den plankonvexen, um νd oder $\frac{d}{n}$ von der ebenen Fläche gegen das Innere der Linse hin entfernt.

Bei konvex-konkaven Linsen liegen die Hauptpunkte auf der konkaven Seite aufserhalb der Linse, nur wenn n und ν beide gröfser oder kleiner als 1 wären, würden sie in die Linse fallen.

Bei der Untersuchung der Hauptbrennweite wollen wir zunächst die Annahme machen, vor und hinter der Linse sei dasselbe Medium, also $\nu = \frac{1}{n}$. Diese Annahme läfst die Gleichung für F folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{n r \varrho} \cdot d\right)$$

und macht ebenso

$$A = F.$$

Im Falle also vor und hinter der Linse dasselbe Medium ist, sind die beiden Hauptbrennweiten einander gleich, und damit fallen Haupt- und Knotenpunkte zusammen, oder die Verbindungslinien des ersten Hauptpunktes mit dem leuchtenden Punkte, des zweiten mit dem Bildpunkte sind einander parallel. Daraus folgt gleichzeitig, dafs die Gröfse des Bildes und Gegenstandes sich verhalten wie die respektiven Abstände von den Hauptpunkten oder dafs

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y,$$

was übrigens auch direkt daraus folgt, dafs $n \cdot \nu = 1$.

Aus der Gleichheit der beiden Brennweiten ergibt sich weiter, dafs es gleichgültig ist, welche der Flächen wir dem Lichte zuwenden, dafs die Lage der Bilder nicht durch eine Änderung der Linsenstellung geändert wird. Denn aus der Gleichung von F und A folgt zunächst

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{A} - \frac{1}{a}.$$

Kehren wir die Linse um, so dafs die vorher erste Fläche zur zweiten wird und umgekehrt, und nennen die zweite Hauptbrennweite dann F', so wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{a}.$$

Nach dem schon mehrfach angewandten Reciprocitätsgesetze wird aber der jetzige zweite Hauptbrennpunkt dort sich befinden, wo vorher der erste Hauptbrennpunkt lag, das heifst parallel auf die Linse fallende Strahlen werden nach dem Punkte konvergieren, dessen Strahlenkegel bei der vorigen Lage durch die Brechung in der Linse parallel wurden, oder

$$F' = A = F$$

und somit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{A} - \frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}.$$

Die Werte der Hauptbrennweiten in ihrer Abhängigkeit von der Linsengestalt erhalten wir, indem wir in die allgemeine Gleichung für F die den einzelnen Linsen entsprechenden Werte der Radien einsetzen.

Für die bikonvexen Linsen ist r positiv, ϱ negativ, setzen wir deshalb $\varrho = -r'$, so wird für diese

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \cdots\cdots (a).$$

Für die plankonvexen Linsen ist r positiv, $\varrho = \infty$; es wird

$$\frac{1}{F} = (n-1) \cdot \frac{1}{r} \cdots\cdots (b)$$

oder es ist $r = \infty$, $\varrho = -r'$, dann wird

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\frac{1}{-r'} = (n-1)\frac{1}{r'} \cdots\cdots (b).$$

Auch diese beiden Werte für F, je nachdem die ebene oder die konvexe Seite dem Licht zugewandt ist, zeigen den vorhin schon abgeleiteten Satz, dafs es gleichgültig ist, welche der Flächen einer gegebenen Linse dem ankommenden Lichte zugewandt ist.

Für die konkav-konvexen Linsen ist die Bedingung entweder r positiv und ebenso $\varrho = +r'$ und dann $r' > r$; damit ist

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + \frac{n-1}{nrr'}\right) \cdot d \cdots\cdots (c).$$

oder r negativ, $\varrho = -r'$ und $r > r'$, damit ist

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} + \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \cdots\cdots (c).$$

Auch hier liefern die beiden Gleichungen (c) für F denselben Wert.

Die drei Gleichungen (a), (b) und (c) haben das Gemeinsame, dafs das von den Radien der Linsen abhängige Glied des Wertes von F stets positiv ist; denn auch die Differenz

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \text{ oder } \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$$

ist stets positiv, da im ersten Falle $r' > r$, im zweiten $r > r'$.

Es folgt somit, dafs bei diesen drei Linsenarten die Brennweiten dasselbe Vorzeichen haben, welches bedingt ist durch den Wert von n. Ist $n > 1$, ist also die Linsensubstanz optisch dichter als ihre Umgebung, wie es der Fall ist, wenn wir Glaslinsen in der Luft haben, so ist der Wert der Hauptbrennweiten positiv, die Linsen haben also dann zwei reelle Hauptbrennpunkte, das heifst parallele die Linse treffende Strahlen vereinigen sich wirklich nach ihrem Durchtritt durch die Linse in einem hinter der Linse liegenden Punkte; und Strahlen, welche von einem im Abstande F vor der Linse liegenden Punkte ausgehen, werden nach dem Durchtritt durch die Linse parallel.

Das Umgekehrte ist der Fall, wenn $n < 1$; dann wird der Wert von F negativ, oder Linsen, deren Substanz optisch weniger dicht ist als das die Linse umgebende Medium, haben zwei virtuelle Hauptbrennpunkte. Strahlen, welche parallel einander und der Axe auf die Linse auftreffen, divergieren nach dem Durchtritt durch die Linse, als kämen sie von einem im Abstande F vor der Linse liegenden Punkte, und Strahlen, welche nach dem Durchtritte durch die Linse parallel werden sollen, müssen vor der Linse nach einem im Abstande F hinter der Linse liegenden Punkte konvergieren. Linsen, welche optisch weniger dicht sind als ihre Umgebung, kann man sich leicht herstellen, indem man passende Uhrgläser mit ihren Rändern je zwei zusammenkittet, so dafs sie die Formen Fig. 83 erhalten. Bringt man die Linsen in ein Gefäfs voll Wasser, das von ebenen und parallelen Glaswänden begrenzt ist, so hat die Linsensubstanz einen kleinern Brechungsexponenten als die Umgebung, nämlich das Wasser. Läfst man die Strahlen der Sonne auf solche Linsen fallen, so werden dieselben nicht in einem Punkte hinter der Linse vereinigt, sondern divergieren.

Die Linsen der zweiten Gattung verhalten sich wie jene der erstern, welche optisch dichter sind als die Umgebung, wenn sie selbst optisch dünner sind; also Luftlinsen in Wasser, wenn sie zur zweiten Gattung gehören, verhalten sich wie Glaslinsen in Luft der ersten Gattung; Glaslinsen der zweiten Gattung in Luft verhalten sich wie Luftlinsen in Wasser der ersten Gattung.

Denn für die bikonkaven Linsen ist r negativ, ϱ positiv gleich $+ r'$. Es ist somit

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{-r} - \frac{1}{r'} - \frac{n-1}{nrr'}d\right) = -(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \text{(d)}$$

Für die plankonkaven Linsen ist r negativ, $\varrho = \infty$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\frac{1}{r} \cdot \cdots \cdot \text{(e)}$$

oder $r = \infty$, $\varrho = + r'$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\frac{1}{r'} \cdot \cdots \cdot \text{(e)}$$

und schliefslich für die konvex-konkaven ist r negativ und $\varrho = - r'$ und zugleich $r' > r$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} - \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \cdots \text{(f)}$$

oder r positiv, $\varrho = + r'$, dann aber $r > r'$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \cdots (f).$$

Die drei Gleichungen unterscheiden sich von den ersten nur durch das Vorzeichen, bei ihnen ist also F negativ, wenn $n > 1$, F positiv, wenn $n < 1$. Im ersten Falle haben also die Linsen virtuelle, im zweiten reelle Hauptbrennpunkte. Die am meisten gebräuchlichen Linsen sind Glaslinsen in der Luft, und da bei solchen Linsen der ersten Gattung die Strahlen nach der Brechung konvergieren, so nennt man die Linsen der ersten Gattung, die in der Mitte dicker sind als am Rande, Sammellinsen, die der zweiten Gattung dagegen Zerstreuungslinsen, weil bei ihnen die Strahlen nach der Brechung divergieren.

Bezeichnen wir für die Zerstreuungslinsen die Hauptbrennweite mit $-F$, so erhalten wir für den der Axe parallelen Abstand des Bildpunktes folgende beide Gleichungen:

1. Für die Sammellinsen, wenn $n > 1$, die Zerstreuungslinsen, wenn $n < 1$,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}.$$

2. Für die Zerstreuungslinsen, wenn $n > 1$, für die Sammellinsen, wenn $n < 1$,

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{F} - \frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{a}\right).$$

Im ersten Falle sind im allgemeinen die Bilder reell, nur wenn $a < F$ und positiv ist, wird f negativ; im zweiten Falle dagegen ist f negativ, aufser wenn a negativ und kleiner als F ist.

Diese beiden Gleichungen zusammen mit der dritten für die Gröfse der Bilder

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y$$

lassen sehr leicht die Lage und Gröfse der Bilder, wie sie von Linsen geliefert werden, übersichtlich erkennen.

Ist bei den Sammellinsen der Abstand a des Gegenstandes von der Linse gröfser als die Hauptbrennweite, so ist f stets positiv, somit das Bild immer reell und wegen des negativen Vorzeichens des Wertes von y umgekehrt, denn das negative Vorzeichen bedeutet, dafs das Bild eines Punktes, der über der Axe sich befindet, unterhalb derselben liegt.

Das Bild kann, je nach seinem Abstande vom zweiten Hauptpunkte der Linse, kleiner, gröfser oder an Gröfse gleich dem leuchtenden Objekte sein. Ist $f < a$, so ist das Bild kleiner, ist $f > a$, so ist es gröfser, ist $f = a$, so sind Gegenstand und Bild an Gröfse gleich, der Lage nach entgegengesetzt. Nach unserer Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}$$

wird f gleich a, wenn

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{F}$$

$$a = 2F$$

ist. Wenn demnach der Gegenstand sich in einem der doppelten Brennweite gleichen Abstande befindet, entwirft eine Sammellinse von ihm ein ihm an Gröſse genau gleiches aber umgekehrtes Bild. In diesem Satze erhalten wir ein sehr bequemes Mittel, um die Brennweite einer Linse zu bestimmen, ohne Kenntnis der Krümmungsradien und des Brechungsexponenten der Linse. Man läſst das Licht einer Kerzenflamme oder das, welches durch eine Spaltöffnung in ein dunkles Zimmer tritt, auf eine Linse fallen und fängt das von der Flamme oder dem Spalte entworfene Bild auf einem Schirme auf. Verschiebt man dann Linse und Schirm so lange, bis das auf dem Schirme befindliche Bild genau die Gröſse des Spaltes oder der Flamme hat, so gibt der halbe Abstand des Schirmes von der Linse, oder der Linse von der Flamme die Hauptbrennweite.

Wird der Abstand des Gegenstandes gröſser wie $2F$, so wird f kleiner als a, das Bild nähert sich dem Hauptbrennpunkt und wird kleiner, ist $a = \infty$, so fällt das Bild in den Hauptbrennpunkt und ist unendlich klein. Von der Sonne, deren Entfernung in dieser Beziehung als unendlich groſs angesehen werden kann, erhält man daher im Brennpunkt einer Sammellinse ein sehr kleines Bildchen. Indem man dessen Entfernung von der Linse miſst, kann man ebenfalls die Hauptbrennweite der Linse bestimmen.

Ist der Abstand des Gegenstandes von der Linse kleiner als $2F$, so rückt das Bild weiter von der Linse fort und wird gröſser, und zwar, indem a von $2F$ bis F abnimmt, wächst f von $2F$ bis unendlich.

Wird der Abstand des Gegenstandes kleiner als F, so wird f negativ, da dann

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{F},$$

und zwar ist der absolute Wert von f dann immer gröſser als a, auſser wenn $a = 0$. Denn damit $f = -a$ werde, muſs nach unserer Gleichung

$$-\frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a},$$

also $\frac{1}{F}$ gegen $\frac{1}{a}$ einen verschwindenden Wert haben, deshalb $\frac{1}{a} = \infty$ oder was dasselbe ist $a = 0$ werden.

Wir erhalten also in diesem Falle stets virtuelle, vergröſserte Bilder, und da

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y = \frac{f'}{a} \cdot Y,$$

wenn wir den Wert des Abstandes vor der Linse mit $-f'$ bezeichnen, aufrecht stehende Bilder. Denn das positive Vorzeichen vor y zeigt, daſs der auſser der Axe liegende Bildpunkt an derselben Seite der Axe liegt als der leuchtende Punkt, dessen Bild er ist.

Schlieſslich kann der leuchtende Punkt noch hinter die Linse rücken, also a negativ werden; das ist dann der Fall, wenn ein Strahlenkegel auf die Linse fällt, dessen Spitze hinter der Linse liegt. Der Abstand dieser Spitze vom ersten Hauptpunkte der Linse ist dann gleich $-a$ zu setzen. Damit wird f aus

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{-a} = \frac{1}{F} + \frac{1}{a}$$

immer positiv, der Bildpunkt ist also stets ein reeller, er liegt hinter der Linse und da

$$\frac{1}{f} > \frac{1}{a},$$

näher bei der Linse als der virtuelle leuchtende Punkt.

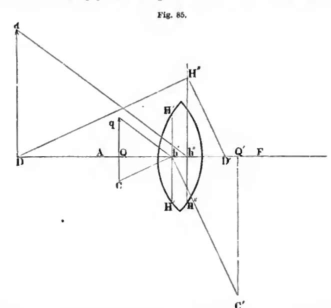
Da ferner jetzt

$$y = -\frac{f}{-a} \cdot Y = \frac{f}{a} \cdot Y,$$

so folgt, dafs der Brennpunkt stets auf derselben Seite der Axe liegt als der leuchtende Punkt.

Alle diese einzelnen Fälle, wie sie sich durch Diskussion der Gleichungen ergehen, folgen auch unmittelbar aus der im Anfange dieses Paragraphen angeführten Konstruktion; es ist dabei nur zu beachten, dafs wenn wir positive Werte von $a - A$ senkrecht nach oben auf der Axe ziehen, dafs dann negative Werte senkrecht nach unten zu ziehen sind. Man erkennt dann sofort, dafs wenn Q (Fig. 85) ein zwischen dem Hauptbrennpunkt A und dem ersten Hauptpunkt h' liegender leuchtender Punkt ist, sein Bild-

Fig. 85.

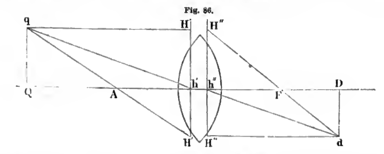


punkt in D liegt, denn ziehen wir $QC = QA = a - A$ senkrecht nach unten und verbinden C mit h', so ist die mit Ch' parallele $H''D$ so geneigt, dafs sie die Axe vor der Linse in D schneidet. Zugleich erkennt man, dafs das Bild ein aufrechtes sein mufs; denn ist Qq eine leuchtende zur Axe senkrechte Linie, so erhalten wir, da die Hauptpunkte hier die Eigenschaften der Knotenpunkte haben, das Bild von qQ, wenn wir von h'' eine Parallele $h''d$ mit $h'q$ ziehen; wo diese Parallele die in D zur Axe senkrechte Dd schneidet, liegt das Bild von q.

Ebenso ergibt die Konstruktion unmittelbar, dafs das Bild des hinter der Linse liegenden Punktes Q' ebenfalls hinter der Linse aber näher beim zweiten Hauptpunkte in D' liegt.

Mit Hülfe der Eigenschaft, dafs der Axe parallele Strahlen nach der Brechung durch den zweiten Hauptbrennpunkt gehen, oder dafs Strahlen, die durch den ersten Hauptbrennpunkt gehen, nach der Brechung der Axe parallel werden, können wir durch eine sehr einfache Konstruktion auch direkt die Lage der Bilder erhalten, ohne vorher ihren Abstand vom zweiten Hauptpunkte aufsuchen zu müssen. Sind A und F (Fig. 86) der erste und zweite Hauptbrennpunkt einer Linse und Qq ein leuchtendes Objekt, so haben wir nur von q aus eine mit der Axe parallele qH' bis zur ersten

Fig. 86.



Hauptebene zu ziehen; der zu dieser als einfallendem Strahl gehörige gebrochene geht dann durch einen Punkt H'' der zweiten Hauptebene, der ebenso weit von h'' entfernt ist, wie H' von h' und durch den zweiten Hauptbrennpunkt F. Der Bildpunkt von q mufs deshalb auf dem Strahl $H''F$ liegen. Einen zweiten Strahl liefert uns entweder die Eigenschaft der Hauptpunkte als Knotenpunkte, oder die erwähnte Eigenschaft des ersten Hauptbrennpunkts, dafs die durch ihn gehenden Strahlen nach der Brechung der Axe parallel werden. Benutzt man die erste Eigenschaft, so hat man nur q mit h' zu verbinden und durch h'' eine mit qh' parallele zu ziehen, wo diese $H''F$ in d schneidet, liegt der Bildpunkt von q, und dD ist das Bild von Qq. Im andern Falle zieht man qAH', nimmt $h''H'' = h'H'$ und zieht durch H'' eine Parallele mit der Axe, wo diese $H''F$ schneidet, ist der gesuchte Bildpunkt.

Die Zerstreuungslinsen liefern im allgemeinen keine reellen, sondern virtuelle, aufrecht stehende und verkleinerte Bilder der Gegenstände, welche ihre Strahlen auf sie senden. Wir haben dort

$$\frac{1}{f} = -\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{a}\right).$$

So lange demnach a positiv ist, hat f immer einen negativen Wert und sein absoluter Wert ist kleiner als a, das heifst nach der Brechung divergieren die Strahlen so, als kämen sie von einem der Linse näher liegenden Punkte als der leuchtende.

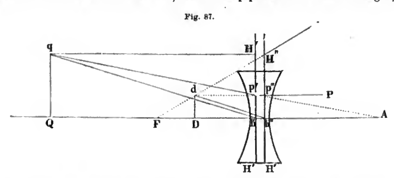
Da auch hier

$$y = -\frac{-f}{a}\,Y = \frac{f}{a}\cdot Y,$$

so folgt, dafs y kleiner ist als Y, dafs also das virtuelle Bild kleiner ist, und da y dasselbe Vorzeichen hat wie Y, dafs das Bild ein aufrechtes Bild ist.

Die vorhin für Sammellinsen abgeleitete Konstruktion führt auch hier unmittelbar zum Ziele. Ist Qq Fig. 87 ein Gegenstand, der seine Strahlen auf die bikonkave Linse sendet, deren Hauptpunkte in h' und h'' liegen,

Fig. 87.



deren erster Hauptbrennpunkt in A, deren zweiter in F liegt, so können wir das Bild Dd zunächst erhalten, indem wir den der Axe parallelen Strahl qH' ziehen; nach der Brechung scheint derselbe von F herzukommen, es mufs also das Bild auf $H''F$ liegen. Ziehen wir dann qh', so mufs das Bild auf der durch h'' mit qh' gezogenen Parallelen $h''d$ liegen, wo also diese FH'' schneidet, in d liegt der Bildpunkt von q und dD ist das Bild von Qq. Wir können als zweiten Strahl auch den durch A gehenden nehmen; derselbe wird nach der Brechung parallel der Axe. Legen wir demnach durch den Punkt p' der ersten Hauptebene $p'P$ parallel der Axe und verlängern rückwärts, bis diese Parallele FH'' oder $h''d$ in d schneidet, so erhalten wir ebenfalls den gesuchten Bildpunkt.

Ist in diesem Falle der leuchtende Punkt ein virtueller, das heifst konvergieren die Strahlen nach einem hinter der Linse liegenden Punkte, so wird in der Gleichung für f der Abstand a negativ, und unsere Gleichung wird dann

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{F} - \frac{1}{-a} = -\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{a}\right).$$

Je nach dem Werte von a kann dann f alle die Werte erhalten, die wir bei den Sammellinsen für ein positives a erhielten, nur dafs das Vorzeichen von f immer das entgegengesetzte ist.

So lange a seinem absoluten Werte nach gröfser ist als F, ist f negativ, der Brennpunkt liegt also vor der Linse, die Strahlen divergieren nach der Brechung; wird $a = F$, so wird $f = \infty$, die Strahlen werden nach der Brechung parallel.

Der absolute Wert von f erhält sein Minimum für $a = \infty$, die Strahlen divergieren nach der Brechung vom Hauptbrennpunkt aus, er wird um so gröfser, je kleiner a wird.

Ist $a = -2F$, so wird auch $f = -2F$, die Strahlen divergieren nach der Brechung von einem Punkte aus, der ebenso weit vor der Linse

liegt, als der Konvergenzpunkt der Strahlen vor dem Eintritt in die Linse hinter derselben liegt.

Wird $a < F$, das heifst konvergieren die Strahlen nach einem Punkte, welcher der Linse näher liegt als die Hauptzerstreuungsweite, so wird f positiv, indem

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{F}$$

und zugleich

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{F}.$$

Da nun aber stets

$$\frac{1}{f} < \frac{1}{a},$$

so ist $f > a$, das heifst die Strahlen konvergieren nach einem Punkte, welcher weiter hinter der Linse liegt, als der Punkt, nach welchem sie vorhin konvergierten.

Die Lage der virtuellen oder reellen Bildpunkte von aufser der Axe liegenden Punkten ergibt sich auch hier aus

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y.$$

Ist f und a negativ, was der Fall ist, so lange $a > F$, so ist die Lage des virtuellen Brennpunktes in Bezug auf die Axe entgegengesetzt der des leuchtenden Pnnktes, und ist $f > a$, so lange $a < 2F$, so ist $y > Y$, der Brennpunkt ist weiter von der Axe entfernt als der virtnelle leuchtende Punkt.

Wenn $a > 2F$ ist, so ist $f < a$, der Brennpunkt liegt also der Axe näher als der virtuelle leuchtende Punkt.

Wenn $a < F$, so wird f positiv, und da a negativ ist, wird also auch y positiv und zwar, da $f > a$, auch immer gröfser als Y. Im Falle also konkave Linsen einen reellen Brennpunkt haben, liegt derselbe für aufser der Axe liegende leuchtende Punkte weiter von der Axe, als der leuchtende Punkt.

Wir haben bisher angenommen, dafs die Linse auf beiden Seiten dasselbe brechende Medium habe; die Erscheinungen sind qualitativ nur wenig anders, wenn die Medien verschieden sind; ist $n > 1$, $\nu < 1$, so liefern die Sammellinsen unter denselben Umständen reelle oder virtuelle und ebenso die Zerstreuungslinsen virtnelle oder reelle Bilder, wie wenn auf beiden Seiten dasselbe Mittel und $n > 1$ ist. Ist $n < 1$, $\nu > 1$, so sind die Erscheinungen so, als wenn bei gleichem Mittel auf beiden Seiten $n < 1$. Bei gleichen Linsen werden nur die absoluten Werte von f anders, da der Wert von F ein anderer wird und in der Gleichung für f

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\nu a}$$

der Nenner des letzten Gliedes den Faktor $n\nu$ enthält, der hier nicht gleich 1 ist.

In Betreff der Gröfse des Bildes und der Konstruktion desselben ist ferner zu beachten, dafs die beiden Hauptbrennweiten verschieden sind, somit auch die Hauptpunkte und Knotenpunkte nicht zusammenfallen. Bei

den Konstruktionen Fig. 86 und 87 mufs man deshalb anstatt der Linien qh' und dh'' die Verbindungslinien des leuchtenden Punktes mit dem ersten Knotenpunkte und die durch den zweiten Knotenpunkt mit der letzten parallel gezogene Richtung einführen. Fig. 82 § 39 deutet an, wie etwa die Knotenpunkte liegen, wenn hinter der Linse Wasser, vor derselben Luft ist.

Sind n und ν beide gröfser oder beide kleiner als 1, so hängt das Verhalten der Linsen wesentlich von dem Verhältnis dieser beiden Brechungsexponenten und der Radien r und ϱ ab, ob eine bestimmte Linse reelle oder virtuelle Bilder liefert, das heifst, ob F positiv oder negativ ist, man wird in den einzelnen Fällen leicht den Wert berechnen können.

Auf einen Unterschied im Verhalten der Linsen, wenn an den beiden Seiten verschiedene Medien sind, müssen wir noch hinweisen. Wenn die Krümmungsradien der Flächen verschieden sind, ist es nicht gleichgültig, welche Seite der Linse dem ankommenden Lichte zugewandt ist. Es mag das an einem Beispiele gezeigt werden; nehmen wir eine plankonvexe Linse aus Glas, vor welcher Luft, hinter welcher Wasser sei. Der Brechungsexponent des Glases sei 1,5, der des Wassers also $n\nu = 1,33$, somit $\nu = \frac{8}{9}$. Ist dann die konvexe Seite die erste, so ist $\varrho = \infty$

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{n\nu r} = \frac{0,5}{\frac{4}{3} r} = \frac{1}{2,66 r}$$

$$F = 2,66 r; \quad A = 2 r.$$

Ist dagegen die ebene Seite die erste, so ist $r = \infty$, $\varrho = -r$

$$\frac{1}{F} = -\frac{\nu - 1}{\nu r} = \frac{1}{8 r}$$

$$F = 8 r; \quad A = 6 r.$$

Wie man sieht ist ein beträchtlicher Unterschied in den Hauptbrennweiten und deshalb auch in der Lage der Bilder. Ähnlich ist es in andern Fällen, wie man leicht durch Berechnung derselben findet[1]).

§ 41.

Brechung des Lichtes in einem Systeme beliebig vieler kugelförmiger Flächen. In den letzten Paragraphen haben wir den Gang des Lichtes durch ein centriertes System von zwei Kugelflächen vollständig bestimmt; in der Praxis reichen wir indes damit nicht aus, da wir häufig den Gang des Lichtes durch ein kombiniertes Linsensystem zu verfolgen haben. Wir müssen deshalb noch die Frage beantworten, wie wir die Lage und Gröfse der Bilder bestimmen können, wenn wir anstatt zweier ein centriertes System beliebig vieler kugelförmiger Flächen haben.

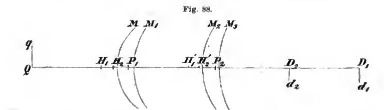
Dafs ein solches System ebenfalls, wie die Linsen, Bilder entwirft, das haben wir bereits im Anfange des § 37 erkannt, und ebenso dort bereits allgemein den Weg angedeutet, den wir zur Bestimmung derselben anzu-

[1]) Eine andere, rein graphische Behandlung der Brechung des Lichtes in Linsen gibt *Reusch* „Konstruktionen zu der Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems". Leipzig, B. G. Teubner, 1870.

wenden haben. Das von zwei Flächen entworfene Bild ist das leuchtende Objekt für die folgenden Flächen und dessen Lage wird nach den Gleichungen der letzten Paragraphen berechnet. Führen wir die Rechnungen durch, so erhalten wir die Ausdrücke, welche Lage und Gröfse der Bilder für die vorhandene Zahl Flächen geben. Wir wollen die Rechnungen für ein System von vier Flächen durchführen, da uns diese schon das Resultat für beliebig viele Flächen erkennen lassen.

Seien M, M_1, M_2, M_3, Fig. 88, vier solcher brechender Flächen. Der Radius der ersten sei r, der zweiten ϱ, der dritten r_1, der vierten ϱ_1; die Brechungsexponenten des Lichtes seien in der ersten Fläche n, in der

Fig. 88.



zweiten ν, in der dritten n_1, in der vierten ν_1. Wir fassen nun die ersten beiden Flächen als ein System, die Flächen M_2 und M_3 als ein zweites System von Flächen auf; auf jedes derselben können wir dann unsere Gleichungen anwenden.

Die Hauptpunkte des ersten Systems, berechnet nach den für die Hauptpunkte im § 38 abgeleiteten Gleichungen, seien H_1 und H_2, die des zweiten Systems seien H'_1 und H'_2; ferner sei die erste Hauptbrennweite des ersten Systems A_1, die des zweiten A_2, die zweite Hauptbrennweite des ersten Systems sei F_1, die des zweiten F_2. Befindet sich nun im Abstande a_1 vom ersten Hauptpunkte des ersten Systems ein leuchtendes Objekt Qq, so entwirft das erste System von demselben ein Bild im Abstande f_1 vom zweiten Hauptpunkte dieses Systems, welcher gegeben ist durch die Gleichung

$$f_1 = \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1},$$

dessen Gröfse gegeben ist durch

$$y_1 = -\frac{f_1}{n\nu a_1} \cdot Y = -\frac{A_1}{a_1 - A_1} \cdot Y.$$

Dieses Bild, es sei $d_1 D_1$, ist das leuchtende Objekt für das zweite System. Ist sein Abstand vom ersten Hauptpunkte des zweiten Systems a_2, so entwirft das zweite System von $d_1 D_1$ ein Bild, dessen Abstand vom zweiten Hauptpunkte des Systems gegeben ist durch

$$f_2 = \frac{a_2 F_2}{a_2 - A_2}$$

und dessen Gröfse ist

$$y_2 = -\frac{f_2}{n_1 \nu_1 a_1} \cdot y_1 = -\frac{A_2}{a_2 - A_2} \cdot y_1,$$

und wenn wir hierin y_1 durch seinen Wert ersetzen,

$$y_2 = \frac{A_1}{a_1 - A_1} \cdot \frac{A_2}{a_2 - A_2} \cdot Y.$$

Nennen wir den Abstand des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems vom zweiten Hauptpunkte des ersten D, so ist

$$a_2 = D - f_1,$$

da auch hier wieder, wenn $D < f_1$, a_2 negativ zu setzen ist. Ersetzen wir f_1 durch seinen Wert, so wird

$$a = D - \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1} = \frac{a_1 D - A_1 D - a_1 F_1}{a_1 - A_1}$$

und setzen wir in die Gleichung für f_2 diesen Wert von a_2

$$f_2 = \frac{a_1 F_2 (D - F_1) - D A_1 F_2}{a_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2}.$$

Der Wert von y_2 wird dann

$$y_2 = \frac{A_1 A_2}{a_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2} \cdot Y.$$

Zur Vereinfachung dieser Ausdrücke suchen wir jetzt die Hauptpunkte des ganzen Systems, die wir wieder genau so definieren wie früher, und rechnen die Abstände des leuchtenden Objektes von dem ersten, des Bildes von dem zweiten Hauptpunkte.

Nennen wir den Abstand des ersten Hauptpunktes des ganzen Systems vom ersten Hauptpunkte des ersten Flächenpaares h_1, so gibt uns die Definition für diesen Abstand die Gleichung

$$\frac{y_2}{Y} = 1 = \frac{A_1 A_2}{h_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2}$$

und daraus

$$h_1 = \frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2}.$$

Mit Hülfe dieses Wertes erhalten wir dann den Abstand des zweiten Hauptpunktes von dem zweiten Hauptpunkte des zweiten Flächenpaares, h_2, wenn wir in der Gleichnng für f_2 für a_1 diesen Wert von h_1 einsetzen. Es wird

$$h_2 = \frac{F_2 D}{D - F_1 - A_2},$$

ein Ausdruck, der sich von dem für den ersten Hauptpunkt erhaltenen nur dadurch unterscheidet, dafs an die Stelle der ersten Hauptbrennweite des ersten Flächenpaares im Zähler die zweite Hauptbrennweite des zweiten Flächenpaares eintritt.

Um die Abstände des leuchtenden Objektes von dem ersten Hauptpunkte P_1 an zu rechnen, sei $QP_1 = a$; dann ist

$$a_1 = a + h_1 = a + \frac{D A_1}{D - F_1 - A_2}.$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand des Bildes von dem zweiten Hauptpunkte P_2 oder D_2P_2 mit f, so ist

$$f = f_2 - h_2 = f_2 - \frac{DF_2}{D - F_1 - A_2}.$$

Berechnen wir nun den Wert von f, indem wir a_1 durch den Wert von $a + h_1$ ausdrücken, so erhält man nach einigen leicht zu übersehenden Reduktionen

$$f = \frac{aF_1F_2}{a(F_1 + A_2 - D) - A_1A_2};$$

ganz ebenso vereinfacht sich der Ausdruck für y_2

$$y_2 = -\frac{A_1A_2}{a(F_1 + A_2 - D) - A_1A_2} \cdot Y.$$

Durch Einführung der Hauptbrennweiten gelangen wir zu noch einfacheren Ausdrücken; die zweite Hauptbrennweite wird aus

$$\frac{1}{f} = \frac{F_1 + A_2 - D}{F_1F_2} - \frac{A_1A_1}{aF_1F_2},$$

indem $a = \infty$ gesetzt wird

$$\frac{1}{F} = \frac{F_1 + A_2 - D}{F_1F_2}$$

und die erste Hauptbrennweite A aus

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{A_1A_2}{aF_1F_2}$$

durch Einsetzen des Wertes $f = \infty$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{F} \cdot \frac{F_1F_2}{A_1A_2}.$$

Beachten wir nun, daſs

$$F_1 = n\nu \, . \, A_1 \qquad F_2 = n_1\nu_1 \, . \, A_2,$$

so wird

$$F = n\nu \, . \, n_1\nu_1 \, . \, A$$

und

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\nu n_1\nu_1 a}$$

und indem wir jetzt auf beiden Seiten mit F multiplicieren und nach f auflösen

$$f = \frac{aF}{a - A}$$

$$y_2 = -\frac{f}{n\nu n_1\nu_1 A} \, . \, Y = -\frac{A}{a - A} \cdot Y.$$

Es reproducieren sich also durch Einführung der Hauptbrennweiten des ganzen Systems wieder genau dieselben Ausdrücke, wie wir auch für zwei Flächen bekommen haben.

Daraus folgt auch unmittelbar, daſs genau dieselben Beziehungen für beliebig viele brechende Flächen gültig sind, und daſs man nur in jedem Falle die Lage der Hauptpunkte und die Hauptbrennweiten für das ganze System zu berechnen hat. Die Art und Weise dieser Berechnung ergibt

sich aus dem Vorstehenden unmittelbar, man geht von Fläche zu Fläche weiter; man kann allerdings auch auf Grund obiger Formeln Gleichungen für die Hauptbrennweiten von n Flächen entwickeln und zwar ohne Schwierigkeiten, indes kommt man dadurch nicht rascher zum Ziel, als wenn man in der Weise weiter rechnet, wie es hier für vier Flächen geschehen ist.

§ 42.

Sphärische Abweichung bei Linsen; aplanatische und kombinierte Linsen. Wir haben in unserer Entwicklung über die Linsenbilder die Voraussetzung gemacht, dafs alle von einem Punkte ausgehende Strahlen nach den Brechungen in beiden Linsenflächen in der That alle nach einem Punkte konvergieren. Es ist dies jedoch ein idealer Fall, der in der Praxis niemals erreicht werden kann, da nur die Strahlen, welche der Axe unendlich nahe liegen, wirklich genau, und die, welche der Axe sehr nahe liegen, nahezu in einem Punkte vereinigt werden. Diejenigen Strahlen, welche näher dem Rande der Linse auftreffen, werden in einem andern Punkte hinter der Linse vereinigt, als die centralen Strahlen, welche mit der Axe nur kleine Winkel bilden. Den Abstand des Punktes, in welchem die Randstrahlen nach der Brechung sich schneiden, von dem Brennpunkte der centralen Strahlen, nennt man die sphärische Längenabweichung.

Wenn man anstatt der angenäherten Ausdrücke des § 36 die genauern anwendet, also nicht anstatt der Abstände des leuchtenden Punktes und Brennpunktes von dem Punkte, wo der einfallende Strahl die Fläche trifft, die Abstände vom Scheitel der brechenden Fläche einsetzt, so findet man, dafs bei konvexen Flächen die Brennweite der centralen Strahlen gröfser ist als diejenige der Randstrahlen. Nur wenn die einfallenden Strahlen nach dem Mittelpunkte der Kugel konvergieren, vereinigen sie sich nach dem Durchtritt durch die Fläche, da sie ohne Brechung hindurchgehen, im Mittelpunkte der Kugel. Wird die Konvergenz der einfallenden Strahlen noch stärker, so ist die Brennweite der Randstrahlen gröfser als die der centralen. Bei konkaven Flächen findet das Umgekehrte statt.

Man erkennt das unmittelbar, wenn man von den strengen Ausdrücken des § 36 ausgeht

$$\frac{QC}{CD} = n \cdot \frac{QJ}{JD}.$$

Drücken wir hierin QJ und JD durch QC, CJ und CD sowie durch den Winkel $SCJ = \alpha$, welcher den Einfallspunkt J bestimmt, aus, so erhalten wir, wenn wir gleichzeitig die bisher stets angewandte Bezeichnung $QC = b$, $CD = g$, $CJ = r$ anwenden,

$$\frac{b}{g} = n \sqrt{\frac{b^2 + r^2 - 2br \cdot \cos\alpha}{g^2 + r^2 + 2gr \cdot \cos\alpha}}$$

oder schreiben wir diese Gleichung

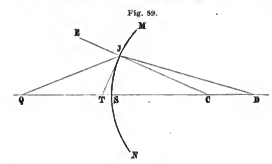
$$\frac{g^2}{b^2} = \frac{1}{n^2} \frac{(g+r)^2 + 2gr(\cos\alpha - 1)}{(b-r)^2 - 2br(\cos\alpha - 1)},$$

so erkennt man sofort, dafs der gröfste Wert, den dieser Ausdruck und damit g, im Falle r positiv ist, annehmen kann, dem Werte $\cos\alpha = 1$,

also $\alpha = 0$ entspricht, dafs somit alle nicht centralen Strahlen die Axe näher beim Scheitel schneiden als die centralen. Ist dagegen r negativ, so nimmt jener Ausdruck für $\alpha = 0$ seinen kleinsten Wert an, somit schneiden bei konkaven Flächen die nicht centralen Strahlen die Axe in gröfserm Abstande vom Scheitel.

Die Differenz des Wertes von g oder f, welcher sich aus diesem Ausdrucke ergibt, wenn wir für α die halbe Öffnung der brechenden Fläche einsetzen und dessen, den wir erhalten, wenn wir α gleich 0 setzen, also

Fig. 89.



die Abweichung der Randstrahlen hängt von dem Werte von b, von dem Abstande des leuchtenden Punktes ab. Bei einem und demselben Abstande des leuchtenden Punktes hängt dieselbe von dem Werte α, also von der Krümmung der Fläche ab; die Abweichung ist um so gröfser, je gröfser α ist.

Ähnliches wie für die einzelne Fläche gilt für die Linsen; bei der Ausgedehntheit der im übrigen nicht schwierigen Rechnungen begnügen wir uns hier damit, die von Herschel[1]) und andern[2]) gefundenen Resultate kurz mitzuteilen. Es folgt aus denselben, dafs für die meisten Linsen, die bikonvexen, plankonvexen, bikonkaven, plankonkaven und konvex-konkaven die Brennweite der Randstrahlen immer kleiner ist als diejenige der Centralstrahlen. Bei den konkav-konvexen Linsen kann je nach dem Abstande des leuchtenden Punktes die Brennweite der Randstrahlen kleiner oder gröfser sein als diejenige der centralen Strahlen, und es gibt für jede konkavkonvexe Linse eine von dem Verhältnis der Krümmungsradien und der Brechungsverhältnisse des Mittels abhängige bestimmte Entfernung des leuchtenden Punktes, für welche die beiden Brennweiten gleich werden. Für diesen Fall nennt man die Linse aplanatisch.

Die Verschiedenheit der Brennweiten der Rand- und Centralstrahlen bewirkt, dafs die durch die Linsen erzeugten Bilder an Undeutlichkeit leiden, indem der von dem Rande kommende Strahlenkegel den Brennpunkt der centralen Strahlen umgibt, und somit das Bild jedes einzelnen Punktes nicht ein einzelner Punkt, sondern ein kleiner Kreis ist. Diese Undeutlichkeit wird um so gröfser, je gröfser der Unterschied der Brennweiten ist, und da dieser zunimmt, je gröfser der Winkel ist, den die nach dem Rande

[1]) *Herschel*, On Light. § X.
[2]) Man sehe *Gehlers* Wörterbuch, Artikel Linse. Bd. VI. Abt. 1.

gezogenen Radien der Flächen mit der Axe bilden, um so gröfser, je stärker die Krümmung der Linsenflächen oder je kleiner die Krümmungsradien derselben sind. Da nun die Brennweite um so kleiner wird, je kleiner die Krümmungsradien der Linse werden, so folgt, dafs die sphärische Aberration um so gröfser ist, je kleiner die Brennweite einer Linse ist.

Um diese Undeutlichkeit zu vermeiden, mufs man entweder Linsen mit sehr kleinen Öffnungen anwenden, bei denen nur centrale Strahlen durch die Linse hindurchtreten, oder man mufs anstatt einer Linse ein System von Linsen anwenden.

Sowie nämlich eine konkav-konvexe Linse für eine bestimmte Entfernung des leuchtenden Punktes aplanatisch ist, so kann man durch eine passende Wahl der Linsenkrümmungen ein System von Linsen herstellen, welches für parallele Strahlen gar keine und für solche, welche von weit entfernten Punkten herkommen, fast gar keine Abweichnng gibt, ein solches Linsensystem nennt man ein aplanatisches. Indes werden solche aplanatische Systeme selten angewandt, weshalb wir hier anf die ziemlich weitläufigen Rechnungen, welche doch nicht zu allgemeinen Sätzen führen, nicht eingehen wollen.

Ein einfacheres Mittel, nm bei kurzen Brennweiten eine geringe Abweichung zu erhalten, ohne zugleich auf wenige centrale Strahlen beschränkt zu sein, ist die Anwendung einer Kombination mehrerer Linsen von grofser Brennweite anstatt einer Linse von kleiner Brennweite. Die Linsen werden dann in einiger Entfernung von einander aufgestellt, so dafs der aus der ersten konvergierend austretende Strahlenkegel auf der folgenden Linse schon sehr nahe dem Centrum auftrifft. Wie wir im vorigen Paragraphen sahen, ist die Brennweite einer Kombination von zwei Linsen aus der Gleichung abzuleiten

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_2} + \frac{A_2}{F_1 \, . \, F_2} - \frac{D}{F_1 F_2},$$

oder wenn wir voraussetzen, dafs die Linsen auf beiden Seiten dasselbe Mittel haben, so dafs $A_2 = F_2$,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_1} - \frac{D}{F_1 F_2}.$$

Nehmen wir zwei Linsen, deren Brennweiten jede $0^m,5$ beträgt, und stellen sie so, dafs der Abstand der Hauptpunkte $0^m,1$ beträgt, so wirken dieselben gerade wie eine Linse von $0^m,26$ Brennweite, jedoch ist die Abweichung bei der Kombination viel kleiner als bei der einfachen Linse, wenn die Helligkeit des Bildes dieselbe ist, da bei gleicher Gröfse der Linsen der Wert von α bei der Kombination nur halb so grofs ist als bei der einfachen Linse.

Für drei Linsen erhalten wir, wenn D_1 der Abstand der ersten und zweiten, D_2 der der zweiten und dritten Linse ist,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_3} + \frac{A_3}{F_2 F_3} + \frac{A_2 A_3}{F_1 F_2 F_3} - \frac{D_1 A_3}{F_1 F_2 F_3} - \frac{D_2 (F_1 + A_2 - D_1)}{F_1 F_2 F_3},$$

wie man unmittelbar findet, wenn man in den für zwei Linsen gegebenen Ausdruck anstatt F_2 den für zwei Linsen gültigen Ausdruck einsetzt.

Nehmen wir auf beiden Seiten des ganzen Systems und zwischen den Linsen dasselbe Mittel an, so wird

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_1} - \frac{D_1}{F_1 F_2} - \frac{D_2}{F_2 F_3} - \frac{D_2}{F_1 F_3} + \frac{D_1 D_2}{F_1 F_2 F_3}.$$

Ist die Brennweite der drei Linsen jede $0^m,5$, die Distanz $D_1 = 0,1$, $D_2 = 0^m,01$, so erhält man $F = 0^m,181$. Bei einer solchen Kombination ist die Abweichung kaum merklich.

§ 43.

Chromatische Abweichung. Achromatische Linsen. Bei den durch einfache Linsen erzeugten Bildern tritt noch eine andere Undeutlichkeit der Bilder ein, welche darin ihren Grund hat, daſs das Licht verschiedener Farben eine verschiedene Brechbarkeit hat. Wir hatten bei einer Linse in Luft für f die Gleichung

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{nr\varrho} \cdot d\right) - \frac{1}{a},$$

und es folgt daraus, daſs je gröſser n ist, um so kleiner f ist. Da nun der Brechungsexponent von dem roten nach dem violetten Ende des Spektrums immer gröſser wird, so folgt, daſs die violetten Strahlen ihren Brennpunkt am nächsten bei der Linse haben, und daſs derjenige der roten Strahlen am weitesten entfernt ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, indem man ein Bündel Sonnenstrahlen durch eine Sammellinse treten läſst und den konvergenten Strahlenkegel auf einem Schirme auffängt. Bei jeder Entfernung, welche kleiner ist als die nach unseren Ausdrücken berechnete Brennweite für Strahlen mittlerer Brechbarkeit, erhält man auf dem Schirm einen weiſsen Kreis, der von einem roten Rande umgeben ist, in Abständen, die gröſser sind als die mittlere Brennweite, dagegen einen weiſsen Kreis, der von einem blau-violetten Rande umgeben ist. Dadurch wird bewiesen, daſs der violette Strahlenkegel stärker konvergiert als der rote, denn anfangs wird der violette Strahlenkegel vom roten, später der rote Strahlenkegel vom violetten umhüllt.

Diese Abweichung, welche natürlich auch bei einer Linsenkombination stattfindet, wie wir sie im vorigen Paragraphen betrachtet haben, wirkt bei Linsen von starker zerstreuender Kraft viel störender als die Abweichung wegen der Kugelgestalt; sie kann indes ebenso mittels einer passenden Kombination von Linsen aufgehoben werden.

Da die chromatische Abweichung darin ihren Grund hat, daſs nach dem Durchtritt durch die Linse die violetten Strahlen stärker konvergieren als die roten Strahlen, so kann sie dadurch aufgehoben werden, daſs man die Strahlen durch eine zweite Linse hindurchtreten läſst, welche die Strahlen weniger konvergent macht, also durch eine Zerstreuungslinse, welche dann die violetten Strahlen stärker bricht als die roten Strahlen. Da aber mit der Aufhebung der chromatischen Abweichung nicht die Wirkung der Linse aufgehoben werden soll, so muſs die zweite Linse einen ebenso groſsen Unterschied zwischen den Brennweiten der roten und violetten Strahlen haben, ohne daſs die Brennweiten selbst die gleiche Gröſse bei entgegen-

gesetztem Vorzeichen haben. Wir müssen daher, wenn wir eine achromatische Sammellinse herstellen wollen, dieselbe aus einer konvexen und einer konkaven Linse zusammensetzen, deren letztere bei einer größern negativen Brennweite den gleichen Unterschied zwischen den Brennweiten der roten und violetten Strahlen besitzt.

Für die Lage des Brennpunktes, wenn das Licht durch eine Kombination zweier Linsen hindurchgegangen ist, erhalten wir unter Voraussetzung, daſs der Abstand des zweiten Hauptpunktes der ersten vom ersten Hauptpunkte der zweiten so klein ist, daſs wir $D = 0$ setzen dürfen,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F'} + \frac{1}{F''} - \frac{1}{a}.$$

Bezeichnen wir durch f_r, F'_r, F''_r den Abstand des Brennpunktes der roten Strahlen von der zweiten Linse, resp. die Hauptbrennweiten der roten Strahlen für die erste und zweite Linse, so haben wir

$$\frac{1}{f_r} = \frac{1}{F'_r} + \frac{1}{F''_r} - \frac{1}{a}.$$

und analog für die violetten Strahlen

$$\frac{1}{f_v} = \frac{1}{F'_v} + \frac{1}{F''_v} - \frac{1}{a}.$$

Die Bedingung der Achromasie ist nun, daſs die roten und violetten Strahlen in gleichen Abständen von den Linsen vereinigt werden, ohne daſs jedoch die Linse aufhört, als Linse zu wirken. Es muſs daher

$$\frac{1}{f_r} = \frac{1}{f_v}.$$

Die erste Lösung dieser Aufgabe würde sein

$$F'_r = -F''_r, \quad F'_v = -F''_v,$$

also die Zusammensetzung zweier Linsen, von denen die zweite eine ebenso groſse negative Brennweite hat, als die erste eine positive besitzt; da aber dann die Linsenkombination aufhört als Linse zu wirken, so würde diese Lösung der zweiten Bedingung der Aufgabe nicht Genüge leisten.

Die andere Lösung ist

$$\frac{1}{F'_r} + \frac{1}{F''_r} = \frac{1}{F'_v} + \frac{1}{F''_v},$$

ohne daſs obige Bedingung erfüllt wird. Das ist nur dann möglich, wenn die Substanzen verschiedene Brechungsvermögen und verschiedene zerstreuende Kräfte besitzen.

Sind die Brechungsexponenten der Substanz des ersten Prismas n'_r und n'_v, derjenigen des zweiten n''_r und n''_v und die Krümmungsradien der vier Flächen r' r'' r''' r^{IV}, so heiſst obige Bedingung

$$(n'_r - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_r - 1}{n'_r r' r''} \cdot d\right) + (n''_r - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_r - 1}{n''_r r''' r^{IV}} \cdot d_1\right)$$

$$= (n'_v - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_v - 1}{n'_v \cdot r' r''} \cdot d\right) + (n''_v - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_v - 1}{n''_v r''' r^{IV}} \cdot d_1\right).$$

Die gestellte Aufgabe kann eine doppelte sein, entweder kann man verlangen zu einer gegebenen Linse eine zweite aus einer gegebenen Substanz herzustellen, welche mit der ersten zusammen eine achromatische Kombination macht, oder es soll aus zwei gegebenen Substanzen eine achromatische Kombination hergestellt werden. So gestellt sind aber für beide Aufgaben noch sehr viele Lösungen möglich.

Denn unsere die Bedingung der Achromasie ausdrückende Gleichung hat zehn Gröfsen; die erste Aufgabe gibt deren sieben, nämlich n'_r, n'_v, n''_r, n''_v, r', r'' und d, die noch übrigen Gröfsen r''', r^{IV} und d_1 lassen sich aber aus der einen Gleichung nicht bestimmen, es läfst sich daraus nur die Brennweite der zweiten Linse bestimmen, die dann noch sehr viele Formen haben kann. Die Aufgabe wird erst bestimmt, wenn über eine der beiden Gröfsen r''' oder r^{IV} noch eine Bedingung hinzugefügt, etwa dafs $r''' = r''$ werden soll oder irgend eine andere, und über die Dicke der zweiten Linse eine bestimmte Annahme gemacht wird.

Bei der zweiten Aufgabe, wo die Brennweite der Kombination gegeben ist, zerfällt die Gleichung in zwei

$$(n'_r - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_r - 1}{n'_r r' r''} \cdot d\right) + (n''_r - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_r - 1}{n''_r r''' r^{IV}}\, d_1\right) = \frac{1}{F}$$

$$(n'_v - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_v - 1}{n'_v r' r''} \cdot d\right) + (n''_v - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_v - 1}{n''_v r'' r^{IV}}\, d_1\right) = \frac{1}{F},$$

wenn wir mit F die Brennweite der Kombination bezeichnen, in der von den zehn Gröfsen sechs zu bestimmen sind. Auch dann müssen demnach, um die Aufgabe vollkommen bestimmt zu machen, noch zwei Bedingungen gegeben sein, welche zwei andere Relationen zwischen den vier unbekannten Gröfsen geben, und eine bestimmte Dicke der beiden Linsen gefordert werden. Eine leicht zu erfüllende Bedingung ist z. B. die, dafs das Linsensystem zugleich ein aplanatisches sein soll, wenn auch die Rechnungen ziemlich kompliciert werden.

Sehr leicht lassen sich die Rechnungen durchführen, wenn man z. B. die Bedingung macht, dafs die erste Linse eine bikonvexe sein soll, deren zweite Fläche einen halb so grofsen Krümmungradius hat als die erste, und dafs der Radius der ersten Fläche der zweiten Linse gleich sein soll dem der zweiten Fläche der ersten Linse, also

$$r' = -2r'' = -2r''',$$

wenn wir gleichzeitig die Annahme machen, dafs die Linsen so dünn seien, dafs wir sowohl d als d_1 gleich 0 setzen dürfen.

Berechnen wir für diesen Fall eine achromatische Kombination aus Crownglas No. 9 und Flintglas No. 13, deren Brennweite $F = 500$ Millimeter ist, so haben wir

$$n'_r = 1{,}525\,8 \qquad n''_r = 1{,}627\,7$$

$$n'_v = 1{,}546\,5 \qquad n''_v = 1{,}671\,0$$

und unsere beiden Gleichungen werden

$$0{,}525\,8\left(\frac{1}{r'}+\frac{2}{r'}\right)+0{,}627\,7\left(-\frac{2}{r'}-\frac{1}{r^{IV}}\right)=\frac{1}{500}=0{,}002$$

$$0{,}546\,5\left(\frac{1}{r'}+\frac{2}{r'}\right)+0{,}671\,0\left(-\frac{2}{r'}-\frac{1}{r^{IV}}\right)=\frac{1}{500}=0{,}002.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir

$$0{,}020\,7\left(\frac{1}{r'}+\frac{2}{r'}\right)+0{,}043\,3\left(-\frac{2}{r'}-\frac{1}{r^{IV}}\right)=0$$

$$\frac{0{,}020\,7}{0{,}043\,3}\left(\frac{1}{r'}+\frac{2}{r'}\right)=\frac{2}{r'}+\frac{1}{r^{IV}}$$

$$\left(\frac{621}{433}-2\right)\frac{1}{r'}=\frac{1}{r^{IV}}=-\frac{0{,}565\,9}{r'}\,.$$

Setzen wir diesen Wert von r^{IV} in eine unserer beiden Gleichungen ein, so erhalten wir z. B. aus der ersten

$$0{,}525\,8\cdot\frac{3}{r'}-0{,}627\,7\,\frac{2-0{,}565\,9}{r'}=0{,}002$$

$$r'=338^{\text{mm}}{,}6$$

und daraus

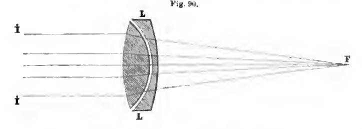
$$r^{IV}=-\frac{1}{0{,}565\,9}\cdot r'=-1{,}767\,r'=-598^{\text{mm}}{,}3$$

und

$$r''=r'''=-\frac{r'}{2}=-169^{\text{mm}}{,}3.$$

Fig. 90 stellt diese Linse im Mafsstabe 0,1 dar, das heifst es ist anstatt $F=500^{\text{mm}}$ $F=50^{\text{mm}}$ angenommen.

Fig. 90.



Die Brennweiten der einzelnen Linsen für Strahlen mittlerer Brechbarkeit sind

$$F'=210{,}28;\quad F''=-363{,}43.$$

Daraus berechnet sich die Brennweite der Kombination

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{210{,}28}-\frac{1}{363{,}43}=0{,}004\,7-0{,}002\,7=0{,}002$$

$$F=500^{\text{mm}}.$$

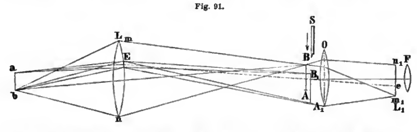
Es ist zu bemerken, dafs diese Kombination auch eine nahezu aplanatische ist.

Sowie zwei Prismen nicht ein vollkommen achromatisches Prisma liefern können, so können zwei Linsen ebenfalls keine achromatische Kombination liefern, da, wenn in beiden auch die Abstände der Brennweiten für rot und violett ganz gleich sind, sie es doch nicht für die übrigen Farben sind. Es treten deshalb sekundäre Farbensäume auf, zu deren Fortschaffung es noch einer oder mehrerer Linsen bedarf. Meist begnügt man sich indes mit einer Kombination zweier Linsen[1]).

§ 44.

Beobachtungen nach der Schlierenmethode. Am Schlusse der Betrachtung der Brechungserscheinungen des Lichtes wollen wir kurz eine Methode beschreiben, welche die kleinsten Unterschiede in dem Lichtbrechungsvermögen an den einzelnen Stellen eines Raumes erkennen läfst und dadurch sonst ganz unsichtbare Erscheinungen sichtbar und beobachtbar macht; es ist das die im Princip allerdings zuerst von Foucault[2]) angegebene, indes unabhängig davon von Töpler[3]) aufgefundene und verwertete Methode der Schlierenbeobachtung. Das Princip dieser Methode ergibt sich unmittelbar aus dem Schema Fig. 91. Es sei *ab* eine kleine leuchtende

Fig. 91.



Fläche, etwa dadurch erhalten, dafs man um die Flamme eines Argandbrenners ein undurchsichtiges Zugrohr gesetzt hat, welches gerade vor der hellsten Stelle der Flamme einen kleinen, am besten geradlinig begrenzten Ausschnitt hat. In *L* befindet sich eine ziemlich grofse achromatische Linse von nicht zu kleiner Brennweite, der Abstand der Linse von der leuchtenden Fläche *ab* sei nur wenig gröfser als die Brennweite der Linse *L*, so dafs das Bild der Fläche *ab* in grofser Entfernung von der Linse in *AB* entworfen werde. Unmittelbar hinter *AB* befinde sich das Objektiv *O* eines

---

[1]) Vollständigere Behandlung der Brechung in centrierten Systemen kugelförmiger Flächen siehe in:

H. Coddington. A Treatise on the Reflexion and Refraction of light. Cambridge. 1829.

Gauss, Dioptrische Untersuchungen in den Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Teil I. 1841.

Bessel, Über die Grundformen der Dioptrik in Schuhmacher Astronom. Nachrichten. Bd. 18. No. 415. Febr. 1841.

Möbius, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. V. 1830. Ferner die schon erwähnten Abhandlungen von *Reusch*.

[2]) *Foucault*, Annales de l'observatoire de Paris. T. V.

[3]) *Töpler*, Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode. Bonn 1864. Poggend. Annal. Bd. CXXVII, CXXVIII, CXXXI, CXXXIV.

auf die Linse L eingestellten Fernrohrs, also eine Linse O, welche in L_1 ein Bild von L entwirft, hinter welchem sich das Okular F des Fernrohrs in einem Abstande befindet, der etwas kleiner ist als die Brennweite des Okulars F, so dafs man durch das Okular F sehend, das Bild L_1 der Linse scharf sieht, wenn die Linse auf irgend eine Weise hinreichend beleuchtet ist. Wenn die Einstellung der Linse stattgefunden hat, werde aus dem Beobachtungsraum alles nicht von ab herkommende Licht ausgeschlossen. Zwischen dem Bilde AB und dem Objektive Q sei ein undurchsichtiger Schieber angebracht, der unten geradlinig und parallel der Grenzlinie a der kleinen leuchtenden Fläche begrenzt ist. Derselbe kann in einer solchen Richtung, in der Zeichnung also nach unten, verschoben werden, dafs seine geradlinige untere Kante sich, genau mit der Grenzlinie a parallel bleibend, bewegt, so dafs also das Bild BA allmählich verdeckt werden kann, bis die Kante genau mit der Grenze A des Bildes zusammenfällt. So lange der Schieber nicht in die Grenzstellung eingerückt ist, sieht dann das durch F gegen L hinblickende Auge die Linse L als gleichmäfsig beleuchtete Fläche, welche, je nachdem der Schirm weniger oder mehr vorgeschoben ist, heller oder dunkler, immer aber ganz gleichmäfsig beleuchtet ist, so lange noch irgend ein Teil des Bildes AB unverdeckt ist, vorausgesetzt, dafs die Linse fehlerlos und der Raum, der von den von ab ausgehenden das Bild liefernden Strahlen durchlaufen wurde, ganz homogen ist.

Um das zu erkennen müssen wir uns daran erinnern, dafs jeder Punkt des Bildes AB ganz gleichmäfsig von der ganzen Linse L Licht erhält. Wird also zunächst durch Vorschieben des Schirmes S die Kante B des Bildes verdeckt, so fällt der Strahl bm fort, der in dem Bilde der Linse nach m' kommt, aber ebenso fällt der Strahl bn fort, der im Bilde der Linse nach n' geht, da der Strahl nB abgeblendet wird, und so fällt für jeden Punkt der Linse ein Strahl fort, der von b durch denselben nach B geht und an die entsprechende Stelle des Linsenbildes L' Licht hinsendet. Durch Fortnahme der in B sich schneidenden Strahlen wird also das ganze Linsenbild gleichmäfsig verdunkelt. Ganz dasselbe wie für B gilt aber für alle allmählich zugedeckten Punkte des Bildes AB, so dafs das Bild der Linse L mit vorschreitendem Schirme S immer dunkler wird, allein dennoch in jedem Augenblicke einen gleichförmig beleuchteten Kreis darstellt.

Erreicht endlich der Schirm S die Grenze A des Bildes, so wird das Bild der Linse plötzlich verdunkelt, da kein die Linse passierender Strahl mehr zu dem Linsenbilde hin gelangen kann. Diese Stellung des Schirmes S ist die empfindliche Einstellung.

Nehmen wir an, es sei in oder in der unmittelbarsten Nähe der Linse eine Stelle, wo das Licht anders gebrochen wird als an allen übrigen Stellen, es sei etwa in E an der Oberfläche der Linse ein kleiner Schlifffehler, der mit freiem Auge nicht zu sehen ist, und so wirkt wie ein kleines sehr spitzes Prisma, dessen brechende Kante nach oben gekehrt ist. Die durch E hindurchgehenden Strahlen werden dann etwas anders gebrochen als die übrigen, sie werden diesen gegenüber etwas nach unten abgelenkt und sich dem zufolge nicht mit den übrigen Strahlen zu dem Bilde AB vereinigen, sondern ein etwas nach unten verschobenes, in der Zeichnung neben AB als $A'B'$ angedeutetes Bild geben. Wird der Schirm bis zur empfindlichen Einstellung vorgeschoben, so wird der unterhalb A fallende Teil dieses

Bildes nicht verdeckt, das denselben liefernde Licht dringt in das Fernrohr und gelangt zur Stelle e des Bildes, welches der Stelle E der Linse entspricht. Man sieht deshalb die Stelle E der Linse hell auf dunklem Grunde, und zwar sieht man dieselbe, also die Stelle, wo das Licht abgelenkt wird, in ihrer Gestalt und Gröfse auf das schärfste begrenzt. Man erkennt weiter, dafs, wenn nur die Linse L hinreichend weit von dem Fernrohr entfernt ist, die allerkleinste durch eine solche Ungleichmäfsigkeit hervorgebrachte Ablenkung genügt, um eine hinreichende Verschiebung des sekundären Bildes AB hervorzubringen, so dafs bei der empfindlichen Einstellung soviel Licht zu dem Bilde L' gelangt, um die betreffende Stelle der Linse hell auf dunklem Grunde zu sehen.

Ganz dasselbe, was für eine solche Ungleichmäfsigkeit an der Oberfläche der Linse gilt, zeigt sich auch, wenn in unmittelbarer Nähe der Linse sich in der Luft etwa eine Stelle befindet, welche das Licht anders bricht als die Umgebung. Lassen wir z. B. unmittelbar vor der Linse, etwa aus einer engen Röhre einen Gasstrom in der Luft aufsteigen, und sei jetzt das Fernrohr scharf auf die Mündung des Rohres eingestellt, wenn der Abstand von der Linse etwa zu grofs wäre, als dafs man bei Einstellung auf die Linse dieselbe nicht mehr scharf sehen kann. Das im Fernrohr sichtbare Bild würde das Bild der Vertikalebene sein, in welcher die Mündung des Gasrohres sich befindet. So lange das Bild AB nicht ganz verdeckt ist, sieht man im Fernrohr eine helle Fläche. Wird aber durch den aufsteigenden Gasstrom nur ein Teil des Lichtes nach unten abgelenkt, so dafs ein sekundäres Bild $A'B'$ entsteht, so sieht man sofort, wenn die empfindliche Einstellung erreicht ist, den Gasstrom aufsteigen, indem eben von allen Punkten des Gesichtsfeldes, durch welche Strahlen, die das sekundäre Bild liefern, hindurchgehen, Strahlen in das Fernrohr eindringen.

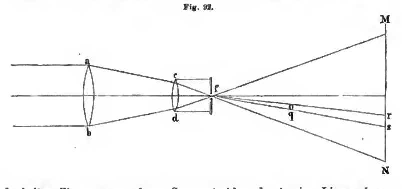
Auf eine genauere Beschreibung der Einzelheiten des von Töpler zum Zwecke dieser Beobachtungen konstruierten Apparates können wir hier nicht eingehen, wir verweisen deswegen auf die Abhandlungen Töplers, besonders auf die Abhandlung im 131. Bande von Poggendorffs Annalen. Von welch grofser Empfindlichkeit diese Beobachtungsmethode ist, erkennt man, wenn man unmittelbar vor die Linse L ein dünnes, von ebenen Glasplatten begrenztes, mit einer Flüssigkeit, etwa mit Wasser gefülltes Gefäfs setzt. Die geringste Bewegung im Innern der Flüssigkeit läfst sich dann direkt sehen. Bläst man z. B. mit einem Blasebalge auf die Oberfläche der Flüssigkeit, so dafs dort infolge der raschern Verdunstung eine nur geringe Abkühlung eintritt, so sieht man, wie sich in dem Flüssigkeitstroge dicke Massen von der Oberfläche aus zu Boden senken. Bei längerer Dauer des Blasens stellt sich ein regelmäfsiger Wirbel her, an den Wänden abwärts, in der Mitte aufwärts gerichtet. Taucht man in die Flüssigkeit einen Glasstab, so genügt es schon durch Umrühren Teile der Oberfläche in das Innere der Flüssigkeit zu bringen, um in dem Apparate sichtbare Bewegungen zu erzeugen.

Von besonderm Interesse ist die mit dem Schlierenapparate mögliche Beobachtung der Verbreitung der Schallwellen in der Luft, welche durch die mit knatterndem Geräusche stattfindende Entladung des elektrischen Funkens zwischen den beiden Enden einer Induktionsspirale entstehen. Wegen der dazu erforderlichen Anordnung verweisen wir ebenfalls auf die Abhandlung von Töpler im 131. Bande von Poggendorffs Annalen Seite 180.

Man kann auf diese Weise die von dem Funken ausgehende sphäroidische Verdichtungswelle direkt sehen und sogar die Erscheinung der Reflexion, die nach der Huyghensschen Konstruktion von einer ebenen Wand zurückkehrende Welle verfolgen, indem man in der Nähe des elektrischen Funkens eine ebene Glasplatte aufstellt, gegen welche die sich von dem Funken ausbreitende Welle trifft.

In ähnlicher Weise wie nach der Töplerschen Methode kann man die geringsten Unterschiede in dem Brechungsvermögen an den verschiedenen Stellen eines Raumes und damit eine Anzahl sonst unsichtbarer Erscheinungen sichtbar machen durch Entwerfung von Schatten von einer möglichst kleinen fast punktförmigen Lichtquelle. Wenn diese Methode auch nicht ganz die Empfindlichkeit hat als die Töplersche, so bietet sie den grofsen Vorteil, dafs sie die Erscheinungen objektiv auf einem Schirme zu entwerfen gestattet, so dafs man sie einem gröfsern Kreise sichtbar machen kann. Eine zu dem Zwecke bequeme Anordnung zeigt nach den Angaben Dvořáks[1]) Fig. 92. Man läfst die durch einen Heliostaten in ein sonst ver-

Fig. 92.



dunkeltes Zimmer geworfenen Sonnenstrahlen durch eine Linse *ab* von 20—30 cm Brennweite gehen, und läfst sie dann, um das Sonnenbild noch weiter zu verkleinern, auf eine zweite Linse von etwas kleinerer Brennweite fallen, die von der ersten um etwas weniger als die Brennweite der ersten Linse entfernt ist. Gibt man der ersten Linse 25 cm, der zweiten 20 cm Brennweite und setzt die Linsen 15 cm von einander entfernt, so liegt das Sonnenbildchen etwa 4 cm hinter der zweiten Linse. Dort, wo das Bildchen liegt, bringt man eine Metallplatte mit einer kleinen, etwa 1 mm Durchmesser habenden kreisförmigen Öffnung an, so dafs in der That nur die von dem Sonnenbildchen aus divergierenden Strahlen durch diese hindurchgehen. Den Strahlenkegel fängt man in einem Abstande von 4—5 m von dem Diaphragma *f* auf einem weifsen Schirme auf, der dann ein kreisförmiges ganz gleichmäfsig beleuchtetes Feld zeigt, dessen Gröfse von dem Abstande des Schirmes und dem Durchmesser des auf die Linse *ab* fallenden Strahlencylinders abhängt. Man mufs deshalb die erste Linse ziemlich grofs wählen, verkleinern läfst sich das beleuchtete Feld, indem man vor *ab* eine Platte mit kreisförmigem Ausschnitt der gewünschten Gröfse bringt.

[1]) *Dvořák,* Wiedem. Annal. Bd. IX.



Die zu beobachtenden Gegenstände bringt man etwa in die Mitte zwischen das Sonnenbildchen und den Schirm. Sobald sich dort Gegenstände befinden, welche einen andern Brechungsexponent besitzen als die Luft, werfen sie auf dem Schirm einen Schatten, indem infolge der an der Oberfläche dieser Gegenstände stattfindenden Reflexionen in den geometrischen Schatten derselben weniger Licht eindringt, als wenn diese Gegenstände nicht vorhanden wären, oder in deren Umgebung. Bringt man etwa bei *q* die Mündung einer Röhre an, aus welcher Leuchtgas ausströmt, so genügt die an dem aufsteigenden Gase stattfindende Reflexion, um auf dem Schirm einen Schatten *rs* zu werfen. Hält man bei *q* die warme Hand, so genügt die von der Hand aufsteigende warme und feuchte Luft, um auf dem Schirme einen Schatten zu werfen, man sieht sie deshalb wallend aufsteigen. Um die Bewegungen in Flüssigkeiten zu sehen, stellt man bei *q* ein dünnes Gefäfs mit parallelen zur Richtung der Strahlenaxe senkrechten Wänden auf. Man erhält auf dem Schirm einen Schatten des Gefäfses und der darin enthaltenen Flüssigkeit, welch letzterer ganz gleichmäfsig beleuchtet ist, wenn die Flüssigkeit ganz homogen ist. Sowie man aber durch Blasen auf die Oberfläche, durch Herabfallenlassen eines Tropfens auf die Flüssigkeit auch nur die geringste Verschiedenheit im Innern der Flüssigkeit hervorbringt, werden die Schatten dieser Stellen anders beleuchtet als die Umgebung, sie werden sichtbar.

Weil man nach dieser Methode die Erscheinungen objektiv auf einem Schirme darstellt, ist sie ein äufserst wertvolles Demonstrationsmittel, welches noch dadurch an Wert gewinnt, dafs man nicht nur mit Sonnenlicht, sondern auch mit dem Lichte der elektrischen Lampe die Versuche anzustellen imstande ist, indem man auf *ab* die durch eine passende Linsenkombination parallel gemachten Strahlen des elektrischen Lichtes fallen läfst.

Drittes Kapitel.

Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen.

§ 45.

Absorption des Lichtes in festen und flüssigen Körpern. In dem vorigen Kapitel haben wir zwei Gruppen von Erscheinungen betrachtet, welche bei der gestörten Fortpflanzung des Lichtes sich darbieten, und die vorzugsweise in einer Änderung der Fortpflanzungsrichtung und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bestanden. Bei den Reflexionserscheinungen nahmen wir an, dafs das Licht von der Oberfläche der Körper zurückgeworfen werde, und bei der Brechung, dafs das durch die erste Fläche in ein begrenztes Mittel eindringende Licht an der zweiten Fläche das Mittel wieder vollständig verlasse, wenn auch nicht, wie bei den Prismen, alles nach derselben Richtung. Oder nach der Wellentheorie zu sprechen: wir betrachteten bei der Reflexion nur die von der Grenzfläche in das erste Mittel zurückkehrenden Wellen und bei der Brechung nur die durch das zweite Mittel hindurchtretenden Wellen.

Aufser der regelmäfsigen Reflexion erwähnten wir damals bereits eine andere Art der Zurückwerfung, die unregelmäfsige oder zerstreuende, welche von der regelmäfsigen sich zunächst dadurch unterschied, dafs wir durch sie nicht Bilder der den Körper beleuchtenden Lichtquelle erhielten, sondern den Körper selbst wahrnehmen konnten. Den Grund dieser Thatsache erkennen wir leicht eben in der Unregelmäfsigkeit der Zurückwerfung. Auch die glatteste Oberfläche eines Körpers ist keine Ebene, bei keiner sind alle Flächenelemente gleich gerichtet, wenn auch, je glatter eine Oberfläche ist, um so mehr Flächenelemente mit der als geometrische Begrenzung des Körpers betrachteten Fläche zusammenfallen.

Von den nicht mit der geometrischen Grenzfläche zusammenfallenden Flächenelementen wird nun auch das Licht nach andern Richtungen zurückgeworfen, und da die Einfallslote dieser unregelmäfsig geordneten Elemente alle möglichen Richtungen haben können, so wird das Licht von diesen auch nach allen möglichen Richtungen zurückgeworfen. Diese nach allen möglichen Richtungen zurückgeworfenen Strahlen konvergieren nicht nach denselben Punkten, nach welchen die regelmäfsig zurückgeworfenen Strahlen konvergieren, sondern nach den verschiedenen Elementen der Fläche selbst, und da wir den Konvergenzpunkt eines unser Auge treffenden Strahlenkegels als den Ausgangspunkt der Lichtstrahlen ansehen, scheinen uns die Oberflächen der Körper selbst das Licht auszusenden. Die sämtlichen von den einzelnen Punkten der Fläche ausgehenden Strahlenkegel bewirken daher ebenso, dafs wir den Körper selbst sehen, wie wir in den Konvergenzpunkten der regelmäfsig zurückgeworfenen Strahlen das Bild der Lichtquelle erhalten.

Dies ist auch der Grund, weshalb der Körper selbst um so weniger sichtbar ist, je mehr Licht er regelmäfsig zurückwirft, je mehr Flächenelemente mit der geometrischen Grenzfläche zusammenfallen.

Bei der Zerstreuung des Lichtes fällt uns aber sofort noch eine andere Thatsache auf, welche uns zwingt, doch einen Unterschied zwischen der unregelmäfsigen und regelmäfsigen Zerstreuung zu machen, es ist die Erscheinung, dafs die verschiedenen Körper uns in immer anderer von der des auf sie fallenden Lichtes verschiedener Farbe erscheinen.

Eine solche Änderung der Farbe findet bei der regelmäfsigen Reflexion nicht statt, oder doch nur in so unbedeutendem Mafse, dafs wir die Farbe der reflektierten Strahlen als merklich gleich derjenigen des auffallenden Lichtes ansehen können; die durch die diffus zurückgeworfenen Strahlen dagegen sichtbaren Körper erscheinen im weifsen Lichte farbig und im einfarbigen Lichte hell oder dunkel; nur wenige Körper giebt es, welche im weifsen Lichte weifs und in jedem farbigen Lichte hell in der Farbe des Lichtes erscheinen.

Die diffuse Reflexion ändert jedoch die Farbe des Lichtes nicht in der Art, dafs sie Licht bestimmter Farbe in anderer Farbe zurückwirft, sie ändert sie nur insoweit, dafs sie nicht alles Licht, welches den Körper trifft, wieder zurücksendet. Man überzeugt sich davon schon dadurch, dafs ein Körper nur farbig erscheint, wenn er von weifsem Lichte getroffen wird, dafs er aber im einfarbigen hell erscheint, wenn das ihn treffende Licht mit ihm gleich gefärbt ist, dagegen dunkel oder schwarz, wenn das Licht eine andere Farbe besitzt. Ein sehr einfacher Versuch liefert dafür einen über-

zeugenden Beweis. Wirft man das durch ein Prisma erzeugte Spektrum direkt auf einen farbigen Körper, so erscheinen diejenigen Farben, welche die im weifsen Lichte sichtbare Farbe des Körpers zusammensetzen, hell und glänzend, während die Teile des Spektrums, denen keine Farbe in der des Körpers entspricht, dunkel sind; auf hochrotem Papier erscheinen meist die blauen und violetten Teile des Spektrums dunkel, auf mit Ultramarin gefärbtem dagegen die roten und gelben.

Diejenigen Strahlen, welche die dunkel bleibenden Partieen des Spektrums ausmachen, werden offenbar nicht zurückgeworfen, sie werden vom Körper absorbiert; die Farbe, in welcher er im weifsen Lichte erscheint, ist daher die aus den übrigbleibenden zusammengesetzte.

Es gibt keinen Körper, welcher gar keine der auf ihn fallenden Farben zurücksendet, ein solcher Körper würde vollkommen schwarz erscheinen, so wie es auch wohl keinen Körper gibt, der alle farbigen Strahlen ohne Schwächung oder alle gleichmäfsig geschwächt zurückstrahlt; ein solcher Körper würde vollkommen weifs sein.

Die Absorption erstreckt sich somit auf alle Strahlen, aber auf die verschiedenen Strahlen in verschiedener Stärke; diejenigen, welche am stärksten absorbiert werden, fehlen in dem von den Körpern zurückgegebenen Lichte, die Körper erscheinen in der, dieser fehlenden, komplementären Farbe.

Die Farbe der Körper ist daher in den seltensten Fällen eine homogene, sondern fast immer eine Mischfarbe, indem, soweit die Erfahrung reicht, kein Körper Licht nur einer Wellenlänge reflektiert. Aufser durch den soeben erwähnten Versuch kann man sich davon überzeugen, wenn man einen schmalen Streifen eines Körpers durch ein Prisma betrachtet, dessen brechende Kante mit der Längsrichtung des Streifens parallel ist. Der Streifen erscheint dann immer verbreitert und als ein teilweises Spektrum.

Nach der Erklärung der Reflexion in der Wellenlehre mufs diese Erscheinung zunächst sehr auffallend und fast mit den Principien derselben im Widerspruch erscheinen. Denn wir sahen, dafs notwendigerweise jede an der Grenze zweier Mittel ankommende Wellenbewegung, wenn die Mittel verschiedene Dichtigkeit oder Elasticität besitzen, zu zwei Wellenbewegungen Anlafs ist, von denen die eine in das zweite Mittel übergeht, die andere in das erste Mittel zurückkehrt. Wenn demnach im weifsen Lichte ein ganzes System verschiedener Wellen an der Oberfläche eines Körpers ankommt, so mufs jede der ankommenden Wellen auch zu einer reflektierten Anlafs geben. Indes fällt diese Schwierigkeit fort, wenn wir annehmen, dafs die Reflexion nicht nur an der Grenzfläche auftritt, sondern dafs im zerstreuten Lichte auch solche Strahlen in das erste Mittel zurückkehren, welche an tiefern Schichten im Innern des Körpers reflektiert werden, welche also eine Schicht des Körpers durchlaufen haben.

An dem Lichte nämlich, welches durch durchsichtige Körper hindurchgegangen ist, nehmen wir etwas ganz Ähnliches wahr, auch von diesem wird im Innern der Körper immer ein Anteil des Lichtes absorbiert, und die meisten absorbieren das verschieden farbige Licht in verschiedenem Mafse und erscheinen dadurch gefärbt.

Man kann die Absorption des Lichtes beim Durchtritt durch farbige Substanzen sehr gut an mit Kobalt gefärbtem blauen Glase untersuchen. Wird ein Glas mit nur wenig Kobalt gefärbt, so ist es bei der Dicke einer

gewöhnlichen Fensterscheibe noch fast ungefärbt und weifs. Bringt man ein solches Glas vor den Spalt im Fensterladen eines dunkeln Zimmers und untersucht das durchgelassene Licht mit dem Prisma, so treten in dem Spektrum noch alle Farben auf, wenn auch schwächer an Intensität als in dem direkt von den Strahlen entworfenen Spektrum. Nimmt man aber immer dickere Platten, so wird das durchtretende Licht, hauptsächlich aber die mittlern Teile des Spektrums mehr und mehr geschwächt, und bei hinreichend dicker Platte besteht das Spektrum aus zwei durch einen ganz dunkeln Raum getrennten Teilen, einem schwächern roten und einem breitern und hellern blauen Streifen.

Die gelben und grünen Strahlen werden daher beim Durchtritte durch das Glas stärker geschwächt als die blauen und roten, daher rührt die blauviolette Färbung des durch ein solches Glas gegangenen Lichtes. Ähnliches gilt von allen durchsichtigen Körpern; alle schwächen das Licht und alle schwächen das verschieden gefärbte Licht in verschiedenem Mafse.

Bei hinreichender Dicke färben sie daher alle das durch sie hindurchtretende Licht, es fehlt in dem davon entworfenen Spektrum ein Teil. Selbst reines destilliertes Wasser färbt bei einer Dicke der Schicht von zwei Metern nach den Versuchen von Bunsen[1]) das Licht schwach blau.

Wie das farbig zurückgeworfene Licht, so ist auch das durchgelassene Licht niemals homogen, keine Substanz erstreckt also die Absorption auf alle Farben aufser einer; das durchgelassene Licht ist also stets eine Mischfarbe, wenn auch sein Ansehen sich dem einer spektralen Farbe fast ganz gleich stellt. Es gibt jedoch einige, welche fast homogenes Licht liefern, so rotes mit Kupfer gefärbtes Glas.

Wenn auch die Absorption stetig mit der Dicke des absorbierenden Mittels zunimmt, so kann doch Licht, welches eine Schicht von ziemlich homogener Farbe durchdrungen hat, viel mächtigere Schichten derselben Substanz ohne merkliche Schwächung durchlaufen. Wenn dagegen Licht, welches ein Mittel durchlaufen hat, auf ein zweites trifft, welches vorzugsweise anderes Licht durchläfst, so wird es sehr viel stärker geschwächt. Es ist eine bekannte Erfahrung, dafs eine Kombination eines roten und grünen Glases fast gar kein Licht durchläfst, während jedes einzelne derselben das Licht nur sehr wenig schwächt.

Mit Hülfe dieser Erfahrungen über die Absorption beim Durchgange des Lichtes durch durchsichtige Körper erklären sich die Farben der Körper im reflektierten Lichte unmittelbar durch die Annahme, dafs im zerstreuten Lichte nicht nur von der Oberfläche, sondern auch aus einer gewissen Tiefe Licht zurückkehrt; dieses hat eine Schicht des Körpers zweimal durchlaufen, und in dieser sind die fehlenden Farben zurückgehalten worden. Die regelmäfsige Reflexion findet nur oder doch hauptsächlich an der Oberfläche statt, indem eine Glättung des Körpers nur die oberflächlichen Elemente beeinflussen kann, während die mehr im Innern liegenden Elemente alle möglichen Lagen besitzen. Die Reflexion der zerstreuten Strahlen findet dagegen vorwiegend an den Elementen des Körpers statt, welche unter der Oberfläche liegen, deshalb bei ihnen die Färbung, welche bei der regelmäfsigen Reflexion fehlt.

---

[1]) *Bunsen,* Liebigs Annalen. Bd. LXII.

Die Annahme einer Reflexion im Innern der Körper widerspricht nicht dem in den Principien der Wellenbewegung (§ 133 I.) bewiesenen Satze, dafs eine Reflexion im Innern eines und desselben Mittels nicht eintreten kann. Denn die Reflexion des Lichtes findet an den Elementen des Körpers statt, während die Wellenbewegung des Lichtes in den diese umlagernden Äthermolekülen ihren Sitz hat. Die Körperteile verhalten sich daher der Wellenbewegung des Lichtes gegenüber wie ein anderes Mittel, und es können im Innern des Körpers ebenso gut Reflexionen stattfinden wie an der Oberfläche.

Die Erklärung der Farben der Körper setzt eine gewisse Durchsichtigkeit derselben voraus, eine Voraussetzung, welche ebenfalls mit unseren Erfahrungen im Einklang ist, nach denen auch die dichtesten Körper in hinreichend dünnen Schichten durchsichtig werden. Bei totalen Reflexionen kann daher eine Färbung nicht auftreten, es kann nur die Farbe der Beleuchtung reflektiert werden und der Körper heifst dann weifs. Diese totale Reflexion tritt nur ein, wenn das Licht aus einem dichtern durchsichtigen Mittel an der Grenze eines dünnern ankommt; soll sie nach allen Richtungen geschehen, so müssen beide Medien häufig mit einander abwechseln. Weifse Körper sind daher innige Gemenge von zwei durchsichtigen Mitteln, welche recht verschieden das Licht brechen. So bildet Luft und Wasser innig gemengt Schaum und Wolken, Luft und Eis den blendend weifsen Schnee. Dagegen wird der undurchsichtige weifse Hydrophan im Wasser durchsichtig und farblos, weil die Poren desselben anstatt mit Luft mit Wasser angefüllt werden, das mit der Substanz des Hydrophans gleiches Brechungsvermögen besitzt[1]).

Nach dem Vorigen wird das Licht nur im Innern der Körper zurückgehalten; da bei dem Durchstrahlen eines Körpers das Licht um so mehr geschwächt wird, je dicker die Schicht ist, so fragt es sich, nach welchem Gesetze die Schwächung des Lichtes erfolgt, wenn die durchstrahlte Schicht ihre Dicke ändert. Die einfachste und naturgemäfseste Annahme dafür ist die, dafs Schichten gleicher Dicke unter denselben Umständen immer den gleichen Bruchteil des sie treffenden Lichtes verschlucken[2]). Diese Annahme ist die gleiche mit derjenigen, dafs ein und derselbe Körper unter denselben Umständen von einer ihn treffenden Lichtmenge eine der Intensität des Lichtes proportionale Lichtmenge absorbiere, dafs also, wenn man mit J die Menge des einfallenden, mit J' die Menge des absorbierten Lichtes bezeichnet, allgemein

$$\frac{J'}{J} = A$$

gleich einer konstanten Gröfse sei, welche das Absorptionsvermögen dieses Körpers bedeutet.

Fällt auf die Grenzfläche eines Körpers die Lichtmenge J einer bestimmten Farbe und ist a das Absorptionsvermögen einer Schicht dieses Körpers von der Dicke eins, so dafs also in dieser ersten Schicht die Lichtmenge aJ absorbiert wird, so fällt auf die vordere Fläche der zweiten Schicht die Lichtmenge

---

[1]) *Dove*, Farbenlehre. Berlin 1853. p. 153.
[2]) *Herschel*, On Light Art. 488.

$$J - aJ = J(1-a);$$

in der zweiten Schicht von derselben Dicke wird die Lichtmenge $aJ(1-a)$ absorbiert; es trifft auf die Vorderfläche der dritten Schicht

$$J(1-a) - aJ(1-a) = J(1-a)^2.$$

In der dritten Schicht und so in jeder folgenden wird wieder der $a$te Teil des sie treffenden Lichtes festgehalten, es geht der $(1-a)$te Teil des eindringenden Lichtes hindurch, so dafs durch einen Körper von der Dicke d die Lichtmenge

$$J(1-a)^d$$

hindurchgeht. Aus unserer Annahme ergibt sich somit der Satz, dafs die durch einen Körper hindurchdringende Lichtmenge in geometrischer Reihe abnimmt, wenn die Dicke des Körpers in arithmetischer Reihe wächst.

Diese Folgerung läfst zugleich erkennen, dafs man die ihr zu Grunde liegende Voraussetzung sehr bequem dadurch prüfen kann, dafs man die Schwächung bestimmt, wenn Licht bestimmter Farbe durch Schichten einer Substanz von verschiedener Dicke hindurchgeht. In der Weise ist denn auch das Absorptionsgesetz mehrfach geprüft worden; die bisher von uns besprochenen photometrischen Methoden sind allerdings zu solchen Versuchen nicht geeignet, wir werden indes in den Polarisationsphotometern Apparate kennen lernen, welche derartige Versuche auszuführen gestatten. Gibt man einer Substanz die Dicken d_1, d_2, d_3 und beobachtet die Schwächung des Lichtes bei der ersten Dicke auf $1 - A_1$, die der zweiten auf $1 - A_2$, bei der dritten auf $1 - A_3$, so mufs

$$1 - A_1 = (1-a)^{d_1},\quad 1 - A_2 = (1-a)^{d_2},\quad 1 - A_3 = (1-a)^{d_3},$$

somit

$$\sqrt[d_1]{1 - A_1} = \sqrt[d_2]{1 - A_2} = \sqrt[d_3]{1 - A_3} = (1-a).$$

In dieser Weise haben unter andern Bernard[1]), Beer[2]), Hagen[3]) das Absorptionsgesetz geprüft. Bernard bestimmte die Absorptionskoefficienten des Kronglases sowie einiger Lösungen für mehrere Farben, und erhielt für die Dicken 1 und 2 Centimeter folgende Werte

Substanz	Farbe des angewandten Lichtes	$1-a$	$\sqrt{(1-a)^2}$	a Mittel
Kronglas	rot	0,908 1	0,908 8	0,091 5
	grün	0,958 9	0,962 7	0,039 2
Lösung von chroms.	rot	0,984 9	0,985 1	0,015 0
Kali 0,1 % Satz	gelb	0,957 4	0,959 9	0,041 5
Lösung von schwefels.	orange	0,506 8	0,517 3	0,488 0
Kupfer-Amoniak	gelb	0,523 9	0,527 3	0,474 4
0,05 % Satz.	violett	0,950 6	0,952 3	0,048 5

[1]) *Bernard*, Ann. de chim. et de phys. III. Serie. T. XXXV.
[2]) *Beer*, Poggend. Annal. Bd. LXXXVI.
[3]) *Hagen*, Poggend. Annal. Bd. CVI.

Die in der letzten Kolumne angegebenen Zahlen bedeuten sonach den Bruchteil des Lichtes, der in einer Schicht der betreffenden Substanzen von 1 Centimeter Dicke zurückgehalten wird.

Bunsen und Roscoe[1]) haben das Absorptionsgesetz geprüft, indem sie in bestimmter Weise die Intensität des auf eine absorbierende Schicht fallenden Lichtes veränderten und zeigten, dafs immer derselbe Bruchteil des auffallenden Lichtes absorbiert wurde, wir werden die Versuche in § 56 kennen lernen.

Wenn man in einer das Licht in dünnen Schichten nicht merklich absorbierenden Flüssigkeit Substanzen löst, welche das Licht stark absorbieren, so kann man die absorbierende Schicht nicht nur dadurch ändern, dafs man bei ungeänderter Konzentration die Dicke sich ändern läfst, sondern auch dadurch, dafs man bei ungeänderter Dicke die Konzentration der Lösung anders wählt. Bei absorbierenden Gasen kann man direkt durch Kompression des Gases die Dichtigkeit der absorbierenden Schicht verändern. Bernard und Beer schlossen aus ihren Versuchen mit verschieden konzentrierten Lösungen, dafs eine Änderung der Konzentration, also der Dichte der absorbierenden Substanz bei ungeänderter Dicke die Absorption gerade so verändert, wie eine Änderung der Dicke bei ungeänderter Dichte. Nennen wir also den Absorptionskoefficienten für eine Schicht von der Dicke und Dichte eins α, so wird, wenn die Dichte gleich δ wird, das durch diese Schicht hindurchgehende Licht von der Intensität J auf

$$J\,(1-\alpha)^{\delta}$$

geschwächt. Ändern wir gleichzeitig die Dicke der Schicht von 1 auf d, so mufs dann das Licht auf die Intensität

$$J\,(1-\alpha)^{\delta d}$$

geschwächt werden. Denn wenn in der Schicht von der Dicke eins und der Dichte δ das Licht im Verhältnis $1:(1-\alpha)^{\delta}$ geschwächt wird, so ist der Absorptionskofficient des Lichtes in dieser Schicht

$$1-(1-\alpha)^{\delta},$$

da das austretende Licht immer gleich der Differenz des eindringenden und des absorbierten ist. Ist aber $1-(1-\alpha)^{\delta}$ der Absorptionskoefficient für die Schicht von der Dicke eins, so wird nach dem Vorigen das aus einer Schicht von der Dicke d austretende Licht, wenn die Menge J eindringt,

$$J\,[1-(1-(1-\alpha)^{\delta})]^{d} = J\,(1-\alpha)^{\delta d}.$$

Ändert man die Dichte und Dicke der Schicht gleichzeitig in der Weise, dafs $d\delta$ denselben Wert behält, dann mufs hiernach die Lichtschwächung dieselbe sein. Beer stellte verschiedene Salzlösungen her und prüfte diesen Satz in der Weise, dafs er die Schwächung des Lichtes in einer Schicht von einem Decimeter Länge, welche dasselbe bei einer gewissen Konzentration der Lösung erfuhr, mit derjenigen in einer Schicht von 2 Decimeter Dicke verglich, wenn die erst benutzte Lösung durch ein gleiches Volumen Wasser verdünnt war. Folgende Tabelle enthält auf Schichtdicken von 1

[1]) *Bunsen* und *Roscoe*, Poggend. Annal. Bd. CI.

resp. 2 Centimeter umgerechnet die von Beer beobachteten Schwächungskoefficienten. Dieselben gelten für rotes Licht.

Lösung von	Konzentration	Dicke	$(1-\alpha)^{d\delta}$
essigsaurem Kupfer	1	1	0,700 6
	$\frac{1}{2}$	2	0,712 0
schwefels. Kupfer	1	1	0,760 7
	$\frac{1}{2}$	2	0,758 8
Kupferchlorid	1	1	0,786 8
	$\frac{1}{2}$	2	0,788 0
schwefels. Kupferoxyd-Ammoniak	1	1	0,791 2
	$\frac{1}{2}$	2	0,788 6
Chromalaun	1	1	0,835 7
	$\frac{1}{2}$	2	0,834 2
essigs. Eisen	1	1	0,854 3
	$\frac{1}{2}$	2	0,856 7

Ebenso fand Bunsen, dafs bei dem Durchstrahlen von Chlorgas das Licht in einer Schicht von doppelter Dicke und halber Dichte ebenso stark geschwächt werde als in einer Schicht von einfacher Dicke und Dichte.

Zu ganz demselben Resultate wie Beer gelangten Vierordt[1]), der auf diesen Satz eine quantitative analytische Methode gründete und Zöllner[2]), während Glan[3]) bei seinen ersten Versuchen über die Absorption des Lichtes in Jodlösungen zu dem Resultate gelangte, dafs mit wachsender Dichte die Absorption rascher wachse, als sie nach jenem Gesetze thun müfste. In einer spätern Arbeit hat indes Glan selbst auf eine Fehlerquelle seiner ersten Versuche hingewiesen und die Messungen nach einer fehlerfreien Methode mit seinem im zweiten Abschnitte zu besprechenden Spektrophotometer wiederholt[4]). Um sicher zu gehen, dafs er bei dem Verdünnen seiner Lösungen stets dieselben absorbierenden Flüssigkeiten habe, schichtete Glan zunächst die Lösung und das später zur Verdünnung dienende Lösungsmittel in einem genau parallelepipedischen Gefäfse, dessen Boden aus einer Spiegelglasplatte bestand, über einander, und liefs das Licht durch Spiegel so reflektieren, dafs es die Flüssigkeit vertikal durchsetzte und dann wieder horizontal zum Spektrophotometer gelangte. So wurde zunächst der Schwächungskoefficient der getrennten Flüssigkeiten bestimmt. Darnach wurden die beiden Flüssigkeiten gemischt, und dann der Schwächungskoefficient der so verdünnten Lösung gemessen.

Durch dieses Verfahren wird die Dicke der durchstrahlten Schicht genau in demselben Verhältnisse vergröfsert, wie die Dichtigkeit verkleinert wird,

---

[1]) *Vierordt,* Die Anwendung des Spektralapparates zur Messung und Vergleichung des farbigen Lichtes. Tübingen 1873; und: Die quantitative Spektralanalyse etc. Tübingen 1876.

[2]) *Zöllner,* Poggend. Annal. Bd. CIX, CXLII.

[3]) *Glan,* Poggend. Annal. Bd. CXLI.

[4]) *Glan,* Wiedem. Annal. Bd. III.

es bleibt somit das Produkt $d\delta$ konstant. Der in den beiden Fällen beobachtete Schwächungskoefficient mufs deshalb derselbe sein. Die Versuche ergeben in der That auch keine Unterschiede, welche die Beobachtungsfehler überschreiten. In folgender Tabelle sind einige der von Glan beobachteten Werte zusammengestellt. Die erste Kolumne gibt die Wellenlänge λ des Lichtes, also die Stelle des Spektrums, für welche die Schwächungskoefficienten angegeben sind, die zweite gibt die Dicke der Schicht der konzentrierten Lösung d, die dritte jene d' des darüber gebrachten Lösungsmittels, die vierte den Schwächungskoefficienten vor die fünfte nach der Mischung

Schwefelsaures Kupferoxyd

λ	d mm	d' mm	$(1-\alpha)^{d\delta}$	$(1-\alpha_1)^{d\delta}$
6,47	3,40	23,80	0,077	0,073
6,59	3,40	23,80	0,155	0,150
6,26	7,09	35,45	0,336	0,330
5,57	7,09	49,63	0,510	0,507
5,25	7,09	49,63	0,848	0,854
		Jod in absolutem Alkohol gelöst.		
6,57	6,80	47,60	0,627	0,638
5,27	3,40	23,80	0,168	0,183.

Hiernach stimmen alle Beobachtungen darin überein, dafs die Absorption mit zunehmender Dichte der absorbierenden Substanz in einer Schicht bei konstanter Dicke geradeso wächst wie bei zunehmender Dicke und konstanter Dichte der Schicht.

Die wenigen vorliegenden Versuche wie auch die Erfahrungen über die Farben der Körper zeigen, dafs die Schwächungskoefficienten für die Einheit der Dicke $1 - a = x$ infolge der Absorption abhängig sind von der Natur des Körpers und von der Farbe des Lichtes. Für Licht einer und derselben Farbe hat x verschiedene Werte je nach der Natur des Körpers, für ein und denselben Körper je nach der Farbe des Lichtes. Wird daher ein Körper von einer gewissen Menge zusammengesetzten Lichtes getroffen, in welcher die Mengen $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$ ..... M_m verschiedener Lichtarten vorhanden sind, so wird das eine Schicht von der Dicke d verlassende Licht dargestellt sein durch die Summe

$$M_{,}x_{,}^{d} + M_{,,}x_{,,}^{d} + M_{,,,}x_{,,,}^{d} + \cdots\cdot M_m x_m^d.$$

Die Farbe dieses Lichtes ist die aus der Zusammensetzung der einzelnen Bestandteile resultierende.

Sind bei einem Körper die Werte der verschiedenen x nur wenig von einander verschieden, so dafs nahezu

$$x_{,} = x_{,,} = x_{,,,} \ldots = x_m,$$

so werden durch diesen Körper alle Farben nahezu gleich geschwächt; jene Summe geht über in

$$(M_{,} + M_{,,} + M_{,,,} + \cdots\cdot M_m)\, x^d,$$

es tritt durch die Absorption keine bemerkbare Änderung der Farbe, sondern nur eine Schwächung des Lichtes im Verhältnisse $1 : x^d$ ein.

Diese Beziehung des Wertes von x stellt demnach die sogenannten farblosen oder weifsen Körper dar, diejenigen, welche weifses Licht fast ungeändert durchlassen oder reflektieren. Ist der Körper sehr durchsichtig, so ist x sehr grofs; je undurchsichtiger der Körper ist, um so kleiner wird x. Bis zu einem gewissen kleinen Werte von x erscheint der Körper aber im weifsen Lichte immer noch weifs; wird aber x noch kleiner, so erscheint der Körper grau und zwar um so dunkler, je kleiner x ist, bis schliefslich ein Körper, für welchen x einen unendlich kleinen Wert hat, vollkommen schwarz ist.

Mit wachsender Dicke der durchstrahlten Schichten werden alle durchsichtigen Körper farbig; es folgt das auch aus dem soeben abgeleiteten Satze, denn mit wachsendem d müssen die Werte $x_{,}^{d}$, $x_{,,}^{d}$ ... immer verschiedener werden, wenn $x_{,}$ $x_{,,}$ ... nicht absolut gleich sind.

Die meisten Körper färben das Licht schon in dünnen Schichten, die Färbung des Lichtes wird aber im allgemeinen um so reiner, das heifst weniger mit Weifs gemischt, je dicker die Schicht des durchstrahlten Körpers ist. Für diese Körper hat x je nach der Farbe der Körper einen merklich andern Wert, ohne dafs jedoch für einige x sehr grofs, für andere sehr klein ist. Das ist der Fall für diejenigen Körper, in welchen schon nach dem Durchtritt durch eine dünne Schicht die Färbung sehr rein wird, in denen dann bei Anwendung dickerer Schichten das Licht nur wenig mehr geschwächt wird als bei Anwendung dünner Schichten.

Einige absorbierende Mittel zeigen ein ganz eigentümliches Verhalten, sie ändern die Farbe des weifsen durch sie hindurchtretenden Lichtes verschieden, wenn das Licht durch verschieden dicke Schichten derselben hindurchtritt. Ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Art bietet eine Lösung von Blattgrün in Alkohol. Läfst man das Licht durch eine dünne Schicht hindurchtreten, so wird es grün wie das von den Pflanzen reflektierte Licht, wendet man Schichten von grofser Dicke an, so wird das Licht tiefrot gefärbt.

Diese Thatsache ist mit Hülfe unseres Satzes leicht zu verstehen, sie beweist, dafs der Wert von x verschiedene Maxima hat. Untersucht man das durch eine mäfsig dicke Schicht hindurchgelassene Licht prismatisch, so findet man, dafs dasselbe nur rot und grün enthält, alle andern Farben sind ausgelöscht. Dieser Versuch zeigt, dafs x nur für grün und rot merkliche Werte hat. Nehmen wir nun an, dafs x für rot bedeutend gröfser ist als für grün, so erklären sich die Erscheinungen leicht. Im weifsen Licht ist nämlich nach Fraunhofers Messungen die Intensität des grünen viel gröfser als die des roten Lichtes. So lange daher eine Schicht, welche nur grün und rot durchläfst, nur dünn ist, wird in dem durchgelassenen Licht, wenn x für grün nicht in demselben Verhältnis kleiner ist als für rot, in welchem das Rot im weifsen Licht schwächer ist als im Grün, das Grün vorherrschen. Nimmt aber die Dicke der Schicht zu, so mufs der Wert x^{d} für rot denjenigen für grün so stark überwiegen, dafs das Rot vorherrscht und schliefslich bei hinreichend grofsem d allein noch einen merkbaren Wert hat.

§ 46.

Absorption des Lichtes in Gasen. Während gefärbte Flüssigkeiten oder feste Körper die Intensität des Lichtes verschiedener Farben durch Absorption schwächen und dadurch im Spektrum des hindurchgegangenen Lichtes im allgemeinen breitere dunkle Räume erzeugen, ist das Verhalten farbiger Gase dem Lichte gegenüber ein anderes und viel auffallenderes, welches eine Erklärung der Absorption scheinbar sehr erschwert. Das Spektrum des durch eine Säule verschiedener Gase hindurchgegangenen Lichtes zeigt nämlich eine ganze Reihe schwarzer Streifen, welche teils den Fraunhoferschen Linien äufserst ähnlich sind, teils als mehr oder weniger breite Banden erscheinen.

Brewster[1]) machte diese Beobachtung zuerst an gasförmiger salpetriger Säure. Wenn man das durch eine Schicht dieses Gases hindurchgegangene Licht der Sonne mit dem Prisma untersucht, so zeigen sich in dem Spektrum gegen 2000 schwarze Linien ganz nach Art der Fraunhoferschen, nur zum Teil breiter. Die Streifen sind, obwohl das Gas nur ganz schwach orange gefärbt ist, über das ganze Spektrum verteilt, sie zeigen sich jedoch häufiger im grünen und blauen Teile als im roten und gelben.

Ganz ähnliche Beobachtungen machten Daniell und Miller[2]) mit gewöhnlichem Lampenlichte, welches prismatisch analysiert keine dunklen Streifen nach Art der von Fraunhofer im Sonnenspektrum bestimmten darbietet.

Bei ihren Versuchen liefsen die beiden Physiker das Licht einer Gaslampe, nachdem es durch die mit dem zu untersuchenden Gase gefüllte Flasche hindurchgegangen war, mittels Dazwischensetzung einer als Cylinderlinse wirkenden mit Wasser gefüllten Glasröhre in eine Brennlinie konvergieren. Die so erhaltene Lichtlinie wurde dann nach der Fraunhoferschen Methode (§ 26) prismatisch untersucht.

Wenn die Luft in der Flasche ein wenig mit Bromdampf gefärbt war, so zeigte sich das ganze Spektrum unterbrochen durch wahrscheinlich mehr als hundert Linien in gleichem Abstande; als der Dampf dichter wurde, verschwand das blaue Ende des Spektrums und in dem roten Ende wurden die Linien stärker.

Joddampf erzeugt ähnliche Linien als der Bromdampf, mit dem Unterschiede jedoch, dafs, wenn die Dichtigkeit des Dampfes nicht sehr grofs ist, in dem violetten Teile sich keine dunklen Streifen zeigen.

Ebenso erzeugt der Dampf von Chromoxydchlorid eine grofse Anzahl ähnlich liegender Linien[3]).

Eine ausgedehntere Untersuchung über die durch die Absorption in Gasen auftretenden festen Linien nahm später W. A. Miller vor[4]). Er verglich die Spektra von diffusem Tageslicht mit denjenigen, welche er erhielt, nachdem das Licht durch die entsprechenden Gase hindurchgegangen war. Die von ihm erhaltenen Resultate lassen sich folgendermafsen zusammenfassen.

[1]) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.
[2]) *Miller*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.
[3]) *Miller*, Poggend. Annal. Bd. XXXII.
[4]) *W. A. Miller*, Poggend. Annal. Bd. LXIX.

1) Die Linien treten nur bei Anwendung farbiger Gase auf, niemals bei derjenigen farbloser; bei farbigen Gasen jedoch auch nicht immer; so erzeugt Chlor keine Linien. Selbst Dämpfe ganz gleicher Farbe verhalten sich verschieden. So gibt Bromdampf eine grofse Zahl von Linien, der ganz gleich gefärbte Dampf von Wolframchlorid dagegen gar keine.

2) Einfache und zusammengesetzte Gase oder Dämpfe können Linien geben; zwei einfache Gase, welche keine Linien geben, können zusammengesetzt welche erzeugen, Sauerstoff, Stickstoff, Chlor geben keine Linien, aber mehrere Oxyde sowohl vom Stickstoff als vom Chlor zeigen sie sehr auffallend. Andererseits geben einfache Körper Linien, ihre Verbindungen dagegen nicht immer. So erzeugt Jod eine Reihe von Linien, dagegen liefert Jodwasserstoffsäure sie nicht. Zuweilen erscheinen die Linien in gleicher Zahl und gleicher Lage bei verschiedenen Oxydationsstufen derselben Substanz, so bei chloriger Säure und Unterchlorsäure.

3) Die Linien nehmen an Zahl zu bei Verlängerung der durchstrahlten Gasschicht oder bei vermehrter Dichtigkeit derselben.

Letztere Erfahrung war früher schon von Brewster bei den Dämpfen der Untersalpetersäure (NO_2) gemacht, der aufserdem noch die merkwürdige Beobachtung machte, dafs eine Erwärmung des Gases auf die Zahl der auftretenden Linien den merkwürdigsten Einflufs hat. Er fand[1]), dafs es schwierig sei, eine Gasschicht von solcher Dicke zu erhalten, dafs die Linien am roten Ende des Spektrums auftraten, aber durch Erwärmung einer nicht ein Centimeter dicken Schicht erhielt er die Linien ganz deutlich. Ja bei weiterm Erwärmen wurde das Gas blutrot und schliefslich, ohne dafs es zersetzt wurde, ganz schwarz, so dafs es auch nicht einen Strahl der hellsten Sommersonne durchliefs.

Der erste der von Miller aufgestellten Sätze mufs jedoch nach den neuern Versuchen von Janssen[2]) und Morren[3]) modificiert werden. Morren ist es gelungen zu zeigen, dafs wenn man Sonnenstrahlen durch eine zwei Meter lange mit Chlor gefüllte Röhre hindurchgehen läfst, in dem Spektrum eine Reihe von neuen dunklen Linien auftritt, welche sich zwischen den auf dem Kirchhoffschen Spektrum, man sehe Tafel III, mit 1800 und 2110 bezeichneten Linien befinden.

Janssen hat den Nachweis geliefert, dafs der farblos durchsichtige Wasserdampf im Spektrum ebenfalls solche dunkle Linien erzeugt. Er liefs das Licht einer hell leuchtenden Gasflamme, welche direkt betrachtet ein ganz kontinuierliches Spektrum liefert, durch eine 37 Meter lange mit farblos durchsichtigem Wasserdampf gefüllte Röhre hindurchgehen, und fand in demselben besonders im Rot und Orange eine ganze Anzahl neuer Linien. In einer andern Weise hat Secchi[4]) schon vor Janssen denselben Nachweis dadurch geführt, dafs er in dem Spektrum einer weit entfernten Gasflamme eben dieselben dunklen Linien fand.

Dafs die farblosen Gase solche Linien erzeugen können, folgt schon

---

[1]) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXXVIII.

[2]) *Janssen*, Comptes Rendus. T. LXIII. p. 289.

[3]) *Morren*, Comptes Rendus. T. LXVIII. p. 376. Poggend. Annal. Bd. CXXXVII.

[4]) *Secchi*, Comptes Rendus. T. LVII. Archive des sciences physiques de Genève. XXVIII. 1866.

aus dem von Brewster zuerst gelieferten Nachweise, dafs wenigstens ein Teil der Fraunhoferschen Linien seinen Ursprung in unserer Atmosphäre hat[1]). Brewster konstatierte nämlich, dafs die Zahl der in dem Sonnenspektrum vorhandenen dunklen Linien gröfser wird, wenn die Sonnenstrahlen eine dickere Schicht der Atmosphäre durchlaufen haben; er beobachtete, dafs des Morgens bei Sonnenaufgang oder des Abends bei Sonnenuntergang die Zahl der Linien gröfser war als gegen Mittag, und allgemein im Winter gröfser als im Sommer. Durch die Beobachtungen von Janssen[2]), Secchi[3]) und Cooke[4]) ist diese Erfahrung von Brewster auf das unzweifelhafteste bestätigt und zugleich gezeigt worden, dafs hauptsächlich der Wasserdampf es ist, welcher als absorbierendes Gas in der Atmosphäre vorhanden ist, indem sich ein inniger Zusammenhang der Linienanzahl und des Wassergehaltes der Atmosphäre erkennen liefs. Besonders im Roten und Gelben war die Anzahl der Linien grofs, wenn die Luft mit Wasserdampf gesättigt war. Dafs indes nicht nur der Wasserdampf in der Atmosphäre solche Linien erzeugt, ergibt sich aus den Beobachtungen Ångströms[5]), der das Spektrum des Sonnenlichtes bei — 24° untersuchte. Alle zwischen den Fraunhoferschen Linien *A* und *D* liegenden von den andern Beobachtern und ihm selbst als Wasserlinien erkannten verschwanden, deutlich waren aber die Fraunhoferschen Linien *A* und *B* noch als atmosphärische zu erkennen, da ihre Dunkelheit wesentlich von dem Stande der Sonne bedingt war. Letzterer Umstand ist für die durch die Atmosphäre erzeugten dunklen Linien charakteristisch, und die Konstanz anderer Linien, wie die der Doppellinie *D*, *F* u. a., beweist, dafs deren Ursache aufserhalb der Atmosphäre gesucht werden mufs. Der nächste Paragraph wird uns die Quelle dieser Linien kennen lehren.

Aus diesen Erfahrungen über die absorbierende Wirkung der in unserer Atmosphäre vorhandenen farblosen Gase werden wir den Schlufs zu ziehen geneigt sein, dafs alle Gase, wenn man sie in hinreichend dicken Schichten als absorbierende Medien benutzt, ähnliche dunkle Linien liefern, ein Schlufs, dessen Berechtigung die Untersuchung der Emissionsverhältnisse der Gase beweisen wird.

Das Auftreten neuer dunkler den Fraunhoferschen ähnlicher Linien im Sonnenspektrum zeigt sich nur, wenn das Licht durch Gase hindurchgetreten ist; bei festen und flüssigen Körpern erstreckt sich die Absorption stets auf ausgedehntere Strecken des Spektrums; es gibt davon nur zwei Ausnahmen: die eine bildet das oxalsaure Chromoxydkali. Bei geringer Dicke läfst das Salz nur rotes Licht durch; mit dem Prisma untersucht zeigt sich aber in der Mitte des roten, zwischen den Linien *A* und *B*, etwa $\frac{1}{6}$ des Intervalls mehr nach *B* hin eine scharf begrenzte dunkle Linie[6]). Die andere Ausnahme bilden die Salze des Didym, Erbium und Terbium, welche in fester Form, wie auch in Lösung ausgezeichnete Absorptionslinien zeigen[7]).

1) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXXVIII. *Brewster* u. *Gladstone*, Philosophical Transactions for 1860.

2) *Janssen*, Comptes Rendus. LX. p. 213. Poggend. Annal. CXXVI.

3) *Secchi*, Comptes Rendus. Bd. LX. p. 379. Poggend. Annal. Bd. CXXVI.

4) *Cooke*, Poggend Annal. Bd. CXXVIII.

5) *Ångström*, Comptes Rendus LXIII.

6) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

7) *Bunsen*, Poggend. Annal. Bd. CXXVIII. Liebig Annal. Bd. CXXXI.

§ 47.

Absorption des Lichtes in farbigen Flammen. Noch viel auffallender als die Absorption des Lichtes in Gasen bei gewöhnlicher Temperatur ist auf den ersten Blick die Absorption desselben in glühenden Gasen, in Flammen. Die sämtlichen Flammen, die wir herstellen können, und sämtliche Gase, wenn sie bis zum Glühen erhitzt werden, liefern ein anderes Spektrum als die Sonne, und sehr viele sind gerade dadurch charakterisiert, dafs ihr Spektrum nur aus einer Anzahl bestimmter heller Linien besteht. Wir werden diese Emissionsverhältnisse in den nächsten Paragraphen näher untersuchen. Wir erwähnen hier nur beispielsweise, dafs eine sonst nicht leuchtende Flamme einer Alkohollampe oder eines Bunsenschen Gasbrenners, wenn man in dieselbe eine Perle von Kochsalz hält, sich gelb färbt, und dafs das Spektrum derselben fast nur eine gelbe Doppellinie zeigt, welche genau der dunklen Doppellinie D im Sonnenspektrum entspricht. Um eine solche Flamme zu untersuchen, stellt man dieselbe so auf, dafs ihr Saum sich gerade vor dem Spalt des Spektrometers befindet, und bringt dann nahe unter dem Spalt in den Saum der Flamme eine an eine Platinöse angeschmolzene Perle des Salzes. Wendet man anstatt des Natronsalzes ein anderes an, z. B. ein Lithionsalz, so nimmt die Flamme eine rote Farbe an, und das Spektrum derselben ist eine scharf begrenzte, sehr helle rote, zwischen B und C gelegene Linie.

Läfst man nun durch eine Flamme, in welcher mittels eines Metalles, z. B. Natrium, die charakteristische Färbung hervorgebracht ist, Licht hindurchgehen, welches Strahlen derselben Farbe enthält, so fand Kirchhoff[1]), dafs von der mit Natrium gefärbten Flamme gerade die Strahlen der gleichen Farbe absorbiert werden. Das Spektrum des Drummondschen Lichtes, eines im Knallgase glühenden Kalkcylinders, enthält in der Regel die beiden hellen Natriumlinien, wenn die leuchtende Stelle des Kalk-

[1]) *Kirchhoff,* Poggend. Annal. Bd. CIX. Vielfach, besonders in französischen Werken wird Foucanlt als der erste Entdecker dieser Erscheinung angegcben. Foucault hat allerdings eine Beobachtung gemacht, welche ihn auf die Entdeckung Kirchhoffs hätte führen können; er fand nämlich, dafs in dem Spektrum des elektrischen zwischen Kohlenspitzen erzeugten Lichtbogens sich gewöhnlich die oben als der Natronflamme eigentümlich bezeichnete helle Doppellinie findet, welche genan an der Stelle der Linie D des Sonnenspektrums liegt. Liefs er nun ein Bündel Sonnenstrahlen durch den Lichtbogen hindurchgehen, so zeigten sich in dem Spektrum derselben die Linien D nicht hell, sondern dunkel, und zwar viel dunkler, als wenn man das Sonnenlicht direkt mit dem Prisma untersuchte. Ebenso fand er, dafs das Licht weifsglühender Kohle durch den Lichtbogen betrachtet in seinem Spektrum die dunklen D-Linien infolge der Absorption des Lichtes im Lichtbogen zeigte. Er hat indes diese Beobachtung nicht verfolgt und es versäumt, den Schlufs daraus zu ziehen, den Kirchhoff zog, dafs jede Lichtquelle gerade die Strahlen absorbiere, die sie aussendet; im Gegenteil nach seinen eigenen Worten sah Foucault dies als eine Eigentümlichkeit des Lichthogens an, denn er sagt (ich citiere nach Archives des sciences physiques et naturelles T. X. 1849. p. 223): „*Ainsi l'arc nous offre un milieu* qui émet pour son propre compte les rayons D, et qui, en même temps, les absorbe lorsque ces rayons viennent d'ailleurs.“ Darnach kann man nicht daran zweifeln, dafs Foucault die Tragweite der Beobachtung nicht erkannte. Meines Wissens hat Foucault selbst, der erst 1868 starb, auch niemals diese Beobachtung der Kirchhoffschen gegenüber benutzt, um für sich die Priorität der oben besprochenen Entdeckungen zu beanspruchen.

cylinders noch nicht lange der Glühhitze ausgesetzt war; bleibt der Kalkcylinder unverrückt, so werden diese Linien schwächer, verschwinden endlich ganz und das Spektrum erscheint kontinuierlich. Sind sie verschwunden oder nur schwach hervortretend, so bewirkt eine mit Kochsalz versehene Alkoholflamme, welche zwischen den Kalkcylinder und den Spalt gestellt ist, dafs an ihrer Stelle zwei dunkle Linien von ausgezeichneter Schärfe und Feinheit sich zeigen, die in jeder Hinsicht den Linien *D* des Sonnenspektrums entsprechen.

Die Alkoholflamme, welche selbst gelbes, den dunklen Linien *D* entsprechendes Licht aussendet, hat somit das von dem Kalkcylinder ausgehende Licht gleicher Wellenlänge absorbiert; und wegen der geringern Intensität des von der Alkoholflamme ausgesandten Lichtes erscheint die demselben entsprechende Stelle im Spektrum des Kalklichtes dunkel auf hellem Grunde.

Bringt man in die Flamme der Bunsenschen Gaslampe Chlorlithium, so zeigt sich im Spektrum derselben eine sehr helle scharf begrenzte rote Linie, die in der Mitte der Fraunhoferschen Linien *B* und *C* liegt.

Läfst man nun Sonnenlicht von mäfsiger Intensität, durch einen engen Spalt, durch die Flamme auf den Spalt des Kollimatorrohres eines Spektralapparates, etwa des Apparates Fig. 69 fallen, so sieht man an dem bezeichneten Ort die Linie hell auf dunklem Grunde; bei gröfserer Stärke aber des Sonnenlichtes tritt an ihrer Stelle eine dunkle Linie auf, die ganz denselben Charakter hat, als die Fraunhoferschen Linien.

Kirchhoff schlofs aus diesen Beobachtungen, dafs farbige Flammen, in deren Spektris helle, scharfe Linien vorkommen, Strahlen von der Farbe dieser Linien, wenn dieselben durch sie hindurchgehen, so schwächen, dafs an Stelle der hellen Linien dunkle auftreten, sobald hinter der Flamme eine Lichtquelle von hinreichender Intensität angebracht wird, in deren Spektrum diese Linien sonst fehlen.

Später hat Kirchhoff[1]) dann durch theoretische Betrachtungen nach-

[1]) *Kirchhoff* a. a. O. p. 275. Ångström erhebt ebenfalls auf diesen von Kirchhoff bewiesenen Satz Ansprüche, nnd hält diesen Anspruch, trotz der Zurückweisung, welche ihm Kirchhoff schon Poggend. Annal. Bd. CXVIII hat angedeihen lassen, in einer neuern Arbeit „Recherches sur le spectre solaire" Berlin bei Dümmler 1869 p. 39 aufrecht. Mit diesem Anspruche verhält es sich aber gerade so wie mit dem für Foncault erhobenen. Angström hat aus einem von Euler in seiner Theoria lucis et coloris aufgestellten Satze, nach welchem in ähnlicher Weise wie bei der Resonanz die in einen Körper eindringenden Schwingungen die Moleküle desselben in Schwingungen versetzen, wenn sie dieselbe Periode haben, in welcher die Körpermoleküle zu schwingen geneigt sind, den Schlufs gezogen, „dafs der Körper im glühenden Zustande gerade alle die Lichtarten aussenden mufs, welche er in gewöhnlicher Temperatur absorbiert." Dafs dieser Satz ein ganz anderer ist als der Kirchhoffsche liegt auf der Hand, denn Kirchhoff bezieht Absorption und Emission auf dieselbe Temperatur. Dafs Ångström aber auch diesen Satz gar nicht in der Weise aufgefafst hat, wie er durch Kirchhoff als das Fundament der glänzendsten Entdeckung der neuern Zeit, als Fundament der Analyse der Gestirne aufgestellt ist, beweist der auf den angeführten folgende Satz von Ångström (Poggend. Annal. Bd. XCIV p. 144): „Die Prüfung der Richtigkeit dieses Satzes ist indes grofsen Schwierigkeiten unterworfen, weil ein ins Glühen versetzter Körper unter ganz andern Elasticitätsverhältnissen auftritt, als unter welchen sein Absorptionsvermögen geprüft wurde." Hätte Ångström seine Ideen weiter verfolgt und



gewiesen, dafs die soeben beschriebene Erscheinung nur ein specieller Fall eines ganz allgemeinen Gesetzes ist. Dieses Gesetz spricht er dahin aus, dafs das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen für Licht für alle Körper bei ein und derselben Temperatur dasselbe sei. Unter Emissionsvermögen versteht er dann die Intensität der von den Körpern ausgesandten Strahlen irgend einer Gattung oder Farbe, und unter Absorptionsvermögen das Verhältnis der Intensität der absorbierten Strahlen zur Intensität der den Körper treffenden Strahlen ebenderselben Gattung. Für dieses Verhältnis findet Kirchhoff dann einen bestimmten Wert, welcher nur abhängig ist von der Temperatur des Körpers und der Wellenlänge des den Körper treffenden Lichtes. Wir können diesen Wert leicht auf folgende Weise erhalten.

Nennen wir einen vollkommen schwarzen Körper einen solchen, welcher Licht weder zurückwerfen noch durchlassen kann, so wird ein solcher stets alles ihn treffende Licht absorbieren, sein Absorptionsvermögen, welches mit a bezeichnet werden mag, ist also für alle Temperaturen und für Licht aller Farben dasselbe und zwar gleich 1. Denken wir uns nun eine Kugel eines solchen Körpers, so wird diese bei einer bestimmten Temperatur eine bestimmte Menge Licht einer bestimmten Farbe aussenden. Dieselbe sei gleich e. Denken wir uns ferner eine eben solche Kugel irgend eines bestimmten andern Körpers, so wird dieser bei derselben Temperatur eine andere Menge Licht derselben Farbe ausstrahlen. Die letztere sei gleich E. Die beiden Gröfsen e und E sind dann das Emissionsvermögen des ganz schwarzen und des beliebigen andern Körpers.

Wenn nun der letzte Körper von allen Seiten von Strahlen derselben Gattung und der Intensität J getroffen wird, so wird er von diesen die Intensität J' absorbieren. Das Verhältnis

$$\frac{J'}{J} = A$$

ist die als Absorptionsvermögen bezeichnete Gröfse.

Nach dem erwähnten Kirchhoffschen Satze ist das Verhältnis des Emissionsvermögens und Absorptionsvermögens für alle Körper dasselbe, also auch für schwarze und nicht schwarze, somit ist

$$\frac{E}{A} = \frac{e}{a} = e.$$

Es folgt somit, dafs das Absorptionsvermögen irgend eines Körpers für eine bestimmte Farbe bei bestimmter Temperatur sich zu dem eines vollkommen schwarzen Körpers verhält, wie die Intensität des von diesem Körper bei derselben Temperatur ausgesandten Lichtes der gleichen Wellen-

die sechs Jahre früher von Foucault gemachte Beobachtung hinzugezogen, so hätte er vielleicht die Entdeckungen Kirchhoffs machen können; es ist aber unberechtigt, wenn er jetzt auf Grund der angeführten Sätze einen solchen Anspruch erhebt.

W. Thomson beansprucht die Entdeckung dieses Gesetzes in einer sehr eigentümlichen Weise für Stokes; einer Zurückweisung dieser Ansprüche bedarf es nach den Bemerkungen von Kirchhoff Poggend. Ann. CXVIII. und Zöllners in der Vorrede zu seinem Werke über die Natur der Kometen. Leipzig, 1872, nicht mehr.

länge zur Intensität des von dem vollkommen schwarzen Körper unter den gleichen Verhältnissen ausgesandten Lichtes.

Schreiben wir obige Gleichung

$$A = \frac{E}{e}; \; E = A \cdot e,$$

so sieht man, wie Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen einander proportional sind.

Die Gröfse e ist die Intensität des bei der betrachteten Temperatur von dem vollkommen schwarzen Körper ausgesandten Lichtes der in Rede stehenden Wellenlänge; sie ist somit nur abhängig von der Temperatur und der Wellenlänge der Strahlen.

Die vorhin beschriebenen Absorptionserscheinungen in Flammen ergeben sich aus dem Kirchhoffschen Satze folgendermafsen. Für eine konstante Temperatur ändert sich die Gröfse e nur mit der Farbe des Lichtes; wir werden zugleich annehmen dürfen, dafs die Gröfse e sich kontinuierlich ändert, und dafs sie bei gleichbleibender Temperatur keine stark hervortretenden Maxima oder Minima hat, wie sich schon daraus ergibt, dafs e das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers ist, und ein solcher in seinem Spektrum keine Diskontinuitäten haben kann. Wenn demnach in dem Spektrum einer glühenden Flamme helle Streifen, also Maxima des Emissionsvermögens, sich zeigen, so folgt, dafs für dieselben Farben auch das Absorptionsvermögen ein Maximum haben mufs. Denn da e sich stetig mit der Farbe des Lichtes ändert, so kann wegen der Gleichung

$$E = A \,.\, e$$

E für eine bestimmte Farbe nur dann einen gröfsten Wert haben, wenn zugleich A einen solchen erhält.

Läfst man Licht durch eine solche Flamme gehen, so wird deshalb vorzugsweise jenes absorbiert, welches von der Flamme selbst ausgesandt wird; untersucht man dann das durchgetretene Licht prismatisch, so mufs an der Stelle der hellen Flammenstreifen die Wirkung folgende sein: die Helligkeit wird vermehrt durch die Aussendung des Lichtes von der Flamme, vermindert durch die Absorption des Lichtes in der Flamme. Wird von der Flamme mehr Licht absorbiert, als sie aussendet, so mufs an der Stelle der vorher hellen Streifen jetzt eine Schwächung des Lichtes bemerkbar sein, dieselbe mufs dunkler sein, als wenn keine Flamme vorhanden wäre.

Das Spektrum der Lithiumflamme besteht z. B. nur aus dem einen hellen Streifen im Rot mitten zwischen B und C. Nehmen wir an, dafs die Intensität der hellen Lithiumlinie $\frac{1}{n}$ von derjenigen ist, welche ein vollkommen schwarzer Körper an dieser Stelle zeigen würde, so wird die Lithiumflamme auch von dem durch sie hindurchtretenden Lichte derselben Farbe $\frac{1}{n}$ absorbieren. Ist die Intensität der hintern Lichtquelle gerade die $n$fache der Lithiumflamme, so wird das Spektrum des durch die Flamme getretenen Lichtes durch die Flamme gar nicht geändert, da dann die Flamme $\frac{1}{n}$ fortnimmt und selbst ebenso viel Licht aussendet. Ist aber die Hellig-

keit der hintern Lichtquelle größer, strahlt sie z. B. das 2 . $n$fache Licht der Lithiumflamme aus, so wird die Lithiumflamme $\frac{1}{n}$ dieses Lichtes absorbieren, also doppelt so viel, als sie anssendet, es mufs daher an der Stelle der hellen Lithiumlinie eine dunkle Linie auf dem hellen Grunde des übrigen Spektrums sich zeigen.

Mit Hülfe des Sonnenlichtes gelingt es leicht, durch passendes Enger- und Weitermachen des ersten Spaltes, durch den man die Strahlen auf den Spalt des Kollimatorrohres eines Spektralapparates fallen läfst, alle drei Fälle mit der Lithiumflamme hervorznbringen.

Die Spektra, welche andere Salze, wenn sie in die Flamme gebracht werden, hervorrufen, sind meist weniger einfach nnd bilden selten Linien von der Helligkeit der Lithium- und Natrinmlinien. Alle diese Spektra kann man anf ähnliche Weise umkehren. Wenn man hinter der Flamme eine Lichtqnelle von hinreichender Intensität anfstellt und der Flamme eine genügende Dicke giht, so gehen die vorher hellen Linien in dunkle über.

Nach diesen Erfahrungen müssen in dem Spektrum eines lenchtenden Körpers immer dann dunkle Streifen auftreten, wenn das zu dem Prisma dringende Licht nur dnrch eine Schicht von absorbierenden Dämpfen hindnrchgeht, selbst dann, wenn diese Dämpfe von dem lenchtenden Körper selbst ausgehen. Man kann in der That auf diese Weise Lichtquellen erzeugen, die in einem ganz kontinuierlichen Spektrum dunkle Linien haben, wie die Fraunhoferschen. Ich habe ein solches auf zwei verschiedene Arten erhalten[1]). Wenn man dnrch eine Kapillarröhre, welche an ihren Enden mit Erweiterungen, in welche Metalldrähte eingeschmolzen sind, versehen ist, und welche irgend ein Gas in höchst verdünntem Znstande enthält, die elektrischen Entladungen einer Leydener Flasche mit sehr kleiner Schlagweite gehen läfst, so wird zunächst das Gas glühend, und man sieht das Spektrum des Gases; vergröfsert man die Schlagweite ein wenig, so verdampft infolge der gesteigerten Temperatnr etwas Natrium aus dem Glase, und man sieht in dem Spektrum, wenn man die Röhre mit dem Prisma betrachtet, anch das Licht des glühenden Natriumdampfes, die gelbe Doppellinie. Nimmt man nnn die Schlagweite der elektrischen Entladung grofs, so werden durch diese von der Innenwand der Glasröhre eine Menge feiner Glassplitterchen abgerissen, welche anf das lebhafteste weifs glühen. Wie alle weifsglühenden festen Körper liefern diese Glassplitter ein kontinuierliches Spektrum, in demselben erscheint aber an Stelle der Natriumlinie eine dunkle Linie, wie im Sonnenspektrum die Linie *D*. Da nämlich die Glassplitter in einer mit Natriumdampf gefüllten Atmosphäre glühen, so wird das von ihnen ausgesandte entsprechende gelbe Licht in dieser Atmosphäre absorbiert, und die Stelle erscheint bei der grofsen Helligkeit ihrer Umgehung dunkel.

Eine andere Lichtqnelle, deren Spektrum dieselbe dunkele Linie enthält, erhält man, wenn man durch eine im nächsten Paragraphen zn beschreibende Geisslersche Röhre, welche Wasserstoff unter einem Drucke von 1200^{mm} enthält, den Strom eines starken Induktionsapparates gehen läfst, in welchem aufserdem noch eine Leydener Flasche eingeschaltet ist.

---

[1]) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXV und CXXXVII.

Das Spektrum des von dem Wasserstoffe unter diesen Umständen ausgesandten Lichtes ist vollständig kontinuierlich, es zeigt nur die dunkle D-Linie, da bei der hohen Temperatur desselben aus dem Glase der Röhre Natrium verdampft, welches den Wasserstoff einhüllt.

In anderer Weise kann man diese Erscheinung selbst objektiv zeigen mit Hülfe der im vierten Teile zu beschreibenden elektrischen Lampe; erzeugt man den elektrischen Lichtbogen zwischen Kohle und metallischem Natrium und erzeugt mit Linsen und Prismen ein objektives Spektrum auf einem Schirm, so sieht man zunächst einen Streifen von orangegelbem Licht, sehr bald tritt dann aber an der Stelle, wo wenn ein Sonnenspektrum auf dem Schirme in der entsprechenden Lage entworfen würde, die D-Linie sich zeigen würde, eine dunkle Linie auf. Durch die hohe Temperatur des Lichtbogens verdampft ein grofser Teil des Natriums und hüllt das glühende Metall ein; der Dampf absorbiert dann das Licht, welches er selbst aussenden würde.

Wie wir im vorigen Paragraphen sahen, müssen wir in dem Sonnenspektrum eine grofse Anzahl dunkler Linien als dem Sonnenlichte eigentümlich ansehen, da ihre Schärfe und Dunkelheit durchaus von der Stellung der Sonne, also von dem Wege, den die Sonnenstrahlen in der Atmosphäre zurücklegen, unabhängig ist. Nach den in diesem Paragraphen vorgelegten Erfahrungen sind wir daher berechtigt den Schlufs zu ziehen, dafs diese Linien durch Absorption in einer die Sonne umgebenden Dampfatmosphäre entstehen.

Kirchhoff[1]) hat deshalb gegenüber der frühern aus der Erscheinung der Sonnenflecken abgeleiteten Anschauung von der Beschaffenheit der Sonne, nach welcher die Sonne aus einem dunklen von einer leuchtenden Photosphäre umgebenen Kerne besteht, eine andere Annahme über die physische Beschaffenheit der Sonne gebildet. Er nimmt an, dafs die Sonne ein fester oder flüssiger Körper von der höchsten Glühhitze sei, der wie alle festen oder flüssigen in Weifsglühhitze befindlichen Körper ein ganz kontinuierliches Spektrum liefert. Dieser Kern wird von einer gasförmigen Hülle umgeben, in welcher sich die Dämpfe der in dem Kern verdampfbaren Substanzen befinden, und deren Temperatur niedriger ist. Diese Dämpfe absorbieren die Lichtarten, welche sie selbst in geringerer Intensität aussenden als der Kern. Die diesen Lichtarten entsprechenden Stellen im Spektrum müssen demnach dunkel erscheinen, sie bilden die Fraunhoferschen Linien. Würde man nun wissen, welche Dämpfe gerade jene Lichtarten aussenden, die im Sonnenspektrum fehlen, so würden wir daraus schliefsen können, welche Substanzen in der Sonne vorhanden sind; aus dem Bisherigen schliefsen wir sofort schon, dafs in der Sonne Natrium vorhanden ist, da wir schon mehrfach hervorhoben, dafs die dunklen D-Linien genau mit den hellen Natriumlinien zusammenfallen, und da wir keinen andern Stoff kennen, der genau diese Linien gibt. Die weitere Kenntnis liefert uns eine genauere Untersuchung der Emission des Lichtes.

Das Wesentliche der Kirchhoffschen Annahme über die physische Beschaffenheit der Sonne ist, dafs ein sehr viel heller leuchtender

[1]) *Kirchhoff*, Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente (Abhandl. der Berliner Akad. 1861).

Kern von einer weniger hell leuchtenden Atmosphäre umgeben ist, wir werden sehen, dafs der Kern nicht fest oder flüssig zu sein braucht, dafs auch Gase bei hinreichend hoher Temperatur ein kontinuierliches Spektrum zu liefern imstande sind.

§ 48.

Emission des Lichtes; Spektralanalyse. Der Kirchhoffsche Satz setzt die Absorption des Lichtes durch einen Körper und die Emission des Lichtes von diesem Körper in die innigste Beziehung. Kirchhoff hat diesen Satz ohne irgendwelche Voraussetzung über den Mechanismus der Absorption und Emission lediglich aus dem Satze abgeleitet, dafs ein Körper in einer Umgebung gleicher Temperatur seine Temperatur nicht ändert; wir werden diese Ableitung im dritten Bande kennen lernen. Die Helmholtzsche Theorie der Brechung und Dispersion führte uns ebenfalls zu einem Ausdrucke für den Absorptionskoefficienten der brechenden Medien, der von der durch die Lichtbewegung im Innern der Körper erregten Bewegung der Moleküle abhängig war. Da die Emission des Lichtes nun jedenfalls durch die Bewegungen der Moleküle der strahlenden Körper bedingt wird, ist es zur Aufstellung einer vollständigen Absorptionstheorie notwendig, dafs wir zunächst die Emissionserscheinungen untersuchen, um so mehr, da dieselben nach dem Kirchhoffschen Satze unsere Kenntnis von der Absorption vervollständigen.

Wir wissen zunächst, dafs die Körper im allgemeinen nur Licht aussenden, wenn sie erhitzt werden und zwar, wenn sie zu einer gewissen sehr hohen Temperatur erhitzt werden, welche man als die Glühhitze bezeichnet. Untersucht man die Strahlen eines festen, einer allmählich gesteigerten Glühhitze ausgesetzten Körpers, etwa eines Platindrahtes, mit dem Prisma, so findet man zunächst, dafs das ausgesandte Licht rot ist, und zwar das am wenigsten brechbare Rot des Spektrums; steigert man die Temperatur, so wächst die Intensität dieses Lichtes, zugleich treten aber zu den roten Strahlen allmählich solche kleinerer Wellenlängen. Zunächst kommen gelbe hinzu, dann grüne und so fort, bis schliefslich in der Weifsglühhitze der Körper Strahlen aller Brechbarkeiten aussendet, das Spektrum wird kontinuierlich und enthält alle Farben vom Rot bis Violett. Nach dem Kirchhoffschen Satze ist nun das Emissionsvermögen E eines Körpers für irgend eine Lichtart

$$E = A \,.\, e,$$

worin, wie wir sahen, e das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers und A das Absorptionsvermögen des in Rede stehenden Körpers für dieselbe Lichtart ist. Nach den eben mitgeteilten Erfahrungen an einem Platindraht folgt, dafs dessen Emissionsvermögen, also sein Wert von E, bis zu einer bestimmten Temperatur gleich Null ist und bei dieser zunächst für rotes Licht einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Da das Platin in allen Temperaturen undurchsichtig ist, so folgt, dafs A dort stets einen von Null verschiedenen Wert hat. Daraus folgt dann aber weiter, dafs e, das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers, erst bei dieser bestimmten Temperatur von Null verschieden ist und von dieser Temperatur an stetig wächst. Da aber für alle Körper bei dieser Temperatur das Emissions-

vermögen gleich ist dem Produkte aus ihrem Absorptionsvermögen und dem Werte von e, so folgt, dafs alle Körper, die bei der betreffenden Temperatur nicht vollkommen durchsichtig sind, bei eben dieser Temperatur anfangen müssen rotes Licht auszustrahlen. Dasselbe gilt für alle übrigen Lichtarten, so dafs wir also allgemein zu dem Satze gelangen, dafs alle Körper, wenn sie allmählich erhitzt werden, bei derselben Temperatur Strahlen von derselben Farbe auszusenden beginnen, also bei derselben Temperatur rot zu glühen, bei einer höhern, allen gemeinsamen Temperatur gelbe Strahlen u. s. w. auszugeben anfangen[1]).

Dieser Satz ist schon früher durch Versuche von Draper experimentell bewiesen worden[2]). Draper schlofs kleine Stückchen Kalk, Marmor, Flufsspath, Kupfer, Antimon, Blei, Platin und Koaks in ein Flintenrohr und fand, dafs beim Erhitzen alle diese Körper gleichzeitig leuchtend wurden und beim Abkühlen alle gleichzeitig erloschen. Wenn aber auch für alle Körper der Faktor e in dem das Emissionsvermögen darstellenden Ausdruck denselben Wert hat, so ist für die verschiedenen Körper der Wert von E für eine bestimmte Lichtart doch nicht derselbe, da dieser aufser von e auch von dem Werte von A abhängt. Ja es ist denkbar, dafs ein Körper in einer Temperatur, in welcher e für alle Farben einen von Null verschiedenen Wert hat, doch gar kein Licht aussendet, wenn nämlich A für alle Farben den Wert Null hat. Ein solcher Körper würde in dieser Temperatur vollkommen durchsichtig sein. In der That hat Kirchhoff einen solchen Körper aufgefunden. In einen aus Platindraht gebogenen Ring von etwa 5^{mm} Durchmesser brachte er etwas phosphorsaures Natron und erhitzte dasselbe in der wenig leuchtenden Flamme der Bunsenschen Lampe. Das Salz schmolz, bildete eine flüssige Linse und blieb dabei vollkommen klar; aber es leuchtete auch gar nicht, während der dasselbe berührende Platinring das lebhafteste Licht ausstrahlte.

Bezeichnen wir das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers für die verschiedenen Lichtarten mit $e_1, e_2 \ldots e_n$, das Absorptionsvermögen irgend eines Körpers für dieselben Lichtarten mit $A_1, A_2 \ldots A_n$, so werden wir die gesamte bei einer bestimmten Temperatur von diesem Körper ausgesandte Lichtmenge darstellen können durch

$$S = A_1 e_1 + A_2 e_2 + \cdots\cdots A_n e_n$$

und man sieht deutlich, dafs die Zusammensetzung des Lichtes oder das bei der angenommenen Temperatur von dem Körper gelieferte Spektrum wesentlich von dem Absorptionsvermögen desselben für die verschiedenen Lichtarten abhängt. Da nun dieses letztere wesentlich von der Natur des betreffenden Körpers abhängt, so werden wir weiter allgemein den Schlufs ziehen, dafs das Spektrum, welches ein glühender Körper liefert, wesentlich von seiner Natur abhängt. Wir können ferner durch die schon im § 45 erkannte Abhängigkeit der Werte A von der Dicke und Dichte des absorbierenden Körpers leicht zeigen, dafs wenn wir den glühenden Körpern

---

[1]) *Kirchhoff*, Poggend. Annal. Bd. CIX. p. 293.

[2]) *Draper*, Philosophical Magazin XXX. 1847. Man sehe auch *E. Becquerel*, Annal. de chim. et de phys. 3. Sér. T. LXVIII und La lumière, ses causes et ses effets. Paris 1867. p. 71—97.



die Dampfform gehen, dafs dann das Spektrum für die Natur der Körper charakteristisch ist und zu ihrer Erkennung dienen kann.

Um das nachzuweisen, wollen wir die Lichtmenge einer bestimmten Wellenlänge, welche eine Schicht eines gegebenen Körpers von der Einheit der Dicke bei einer bestimmten Temperatur absorbiert, mit α bezeichnen. Entsprechend sei die Lichtmenge derselben Wellenlänge, welche diese Schicht aussendet, gleich ε, so dafs also, wenn e wie immer das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers unter denselben Umständen ist,

$$\varepsilon = \alpha \,.\, e$$

ist. Hat der strahlende Körper eine Dicke von d solchen Schichten, so erhalten wir das von ihm ausgesandte Licht derselben Wellenlänge E in folgender Weise[1]).

Die erste seiner Schichten strahlt nach aufsen die Lichtmenge

$$\varepsilon_1 = \alpha \,.\, e.$$

Die zweite Schicht strahlt dieselbe Lichtmenge aus, da aber dieses Licht, um nach aufsen zu gelangen, die erste Schicht durchsetzen mufs, so wird in dieser Schicht die Lichtmenge $\alpha \varepsilon_1$ absorbiert, so dafs nach aufsen hervortritt die Lichtmenge

$$\varepsilon_2 = (1 - \alpha)\, \varepsilon_1 = \alpha\, (1 - \alpha) \,.\, e.$$

Das von der dritten Schicht ausgestrahlte Licht ist wieder dasselbe, dieses Licht mufs aber die beiden ersten Schichten durchstrahlen, in der zweiten Schicht wird $\alpha \varepsilon_1$ zurückgehalten, so dafs an der Grenze der ersten Schicht die Menge $(1 - \alpha)\, \varepsilon_1$ ankommt, von dieser Menge wird dann in der ersten Schicht wieder $\alpha\, (1 - \alpha)\, \varepsilon_1$ absorbiert, so dafs nach aufsen hervortritt

$$\varepsilon_3 = (1 - \alpha)\, \varepsilon_1 - \alpha\, (1 - \alpha)\, \varepsilon_1 = (1 - \alpha)^2 \,.\, \varepsilon_1 = \alpha\, (1 - \alpha)^2 \,.\, e.$$

In derselben Weise erhält man für das aus der vierten Schicht nach aufsen gelangende Licht

$$\varepsilon_4 = \alpha\, (1 - \alpha)^3 \,.\, e$$

und für das aus der d-Schicht nach aufsen gelangende

$$\varepsilon_n = \alpha\, (1 - \alpha)^{d-1} \,.\, e.$$

Die gesamte von dem Körper nach der einen Seite ausgestrahlte Lichtmenge ist gleich der Summe aller der von den einzelnen Schichten aus dem Körper herausgelangenden Lichtmengen, somit

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots \varepsilon_n = \alpha \cdot e \{ 1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \cdots (1-\alpha)^{d-1} \}.$$

Die Summe der in der Klammer enthaltenen geometrischen Reihe ist nun

$$\frac{1 - (1 - \alpha)^d}{\alpha},$$

somit wird

$$E = \{ 1 - (1 - \alpha)^d \} \cdot e.$$

[1]) *Zöllner,* Poggend. Annal. Bd. CXLII.

Jeder der Koefficienten A in der oben hingeschriebenen Reihe, welche uns das von einem gegebenen Körper ausgestrahlte Licht S liefert, ist also von der Form

$$A = 1 - (1 - \alpha)^d,$$

wenn d die Dicke des ausstrahlenden Körpers bedeutet. Da seiner Definition nach α ein echter Bruch und positiv oder eventuell gleich 0 ist, so ist ebenfalls $1 - \alpha$ ein echter Bruch und positiv, oder für den Fall, dafs α absolut gleich Null ist, gleich 1. Im letztern Falle ist A ebenfalls unter allen Umständen gleich Null, oder von jenen Lichtarten, welche der Körper absolut nicht absorbiert, sendet er auch, selbst bei unendlicher Dicke nichts aus. Sobald aber α von Null verschieden ist, und man wird annehmen können, dafs wohl für keinen Körper und keine Lichtart α absolut gleich Null ist, nähert sich mit wachsender Dicke der Wert von A immermehr der Einheit, welchen Wert es bei unendlich grofser Dicke der strahlenden Schicht erreicht. Es folgt somit, dafs das Emissionsvermögen eines strahlenden Körpers mit wachsender Dicke der strahlenden Schicht für alle Lichtarten wachsen und sich dem Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers nähern mufs, welches er für eine, strenge genommen unendlich grofse Dicke erreicht. Bei hinreichend grofser Dicke der strahlenden Körper mufs daher das von solchen gelieferte Spektrum sich mehr oder weniger dem Spektrum eines schwarzen Körpers annähern.

Ganz denselben Einflufs, den die Vermehrung der Dicke einer strahlenden Schicht hat, mufs bei konstanter Dicke der Schicht eine Vermehrung der Dichtigkeit derselben haben[1]). Wir haben § 45 die Versuche von Beer, Vierordt, Glan kennen gelernt, nach welchen in Lösungen die Vermehrung der Dichte der absorbierenden Substanz auf die Absorption ganz denselben Einflufs hat als die Vergröfserung der Dicke bei konstanter Dichte, wir haben weiter die Versuche Bunsens erwähnt, nach denen die Verdoppelung der Dichte einer Schicht Chlorgas die Absorption gerade so zunehmen läfst wie Verdoppelung der Dicke bei konstanter Dichte. Zu derselben Folgerung führt auch schon die bei Ableitung der Brechungserscheinungen gegebene Andeutung über den Mechanismus der Absorption. Nach der der Helmholtzschen Theorie zu Grunde liegenden, schon früher durch Stokes[2]) ausgesprochenen Auffassung ist die Absorption Folge einer Abgabe der schwingenden Bewegung an die Moleküle des absorbierenden Körpers, die Absorption mufs daher mit der Anzahl der körperlichen Moleküle, welche das Licht auf seinem Durchtritte trifft, zunehmen, und wir werden annehmen dürfen, dafs immer, wenn die gleiche Anzahl der Moleküle sich auf dem Wege des Lichtstrahles befindet, auch dieselbe Absorption stattfindet. Dann mufs es aber gleichgültig sein, ob wir diese Anzahl dadurch vermehren, dafs wir eine gröfsere Dicke der strahlenden Schicht anwenden, oder dadurch, dafs wir bei gleichbleihender Schichtdicke die Dichtigkeit des absorbierenden Mittels in demselben vermehren. Das Gleiche mufs dann auch von der Emission des Lichtes gelten, da das Licht von der schwingenden Bewegung der Moleküle erzeugt wird, und die Menge des

---

[1]) *Zöllner*, Poggend. Annal. Bd. CXLII.
[2]) *Stokes*, Poggend. Annal. Erg. Bd. IV. p. 322 ff. Ann. de chim. et de phys. III. Série. T. LXII. p. 191.

ans einem Körper hervortretenden Lichtes, wie wir soehen sahen, von der Menge des erzeugten und in dem Körper absorhierten Lichtes ahhängt. Nennen wir daher das Absorptionsvermögen für Licht einer hestimmten Wellenlänge irgend einer Substanz hei der Dicke eins der ahsorhierenden Schicht, wenn die Dichtigkeit derselhen gleich eins ist, $\mathfrak{a}$, so ist die Lichtmenge $\mathfrak{E}$ derselhen Wellenlänge, welche eine Schicht von der Dicke d aussendet, wenn ihre Dichtigkeit δmal gröfser wird,

$$\mathfrak{E} = \{1 - (1 - \mathfrak{a})^{d\delta}\} \cdot e.$$

Auch mit zunehmender Dichte einer strahlenden Schicht mufs somit das Emissionsvermögen aller Strahlen wachsen und hei nnendlich grofser Dichte dem eines schwarzen Körpers gleich werden, somit mufs auch damit das Spektrum dem kontinuierlichen eines vollkommen schwarzen Körpers sich mehr oder weniger nähern.

Es folgt daraus, dafs wenn eine Snhstanz charakteristische Maxima des Ahsorptionsvermögens für gewisse Wellenlängen hesitzt, diese im Spektrum des von dem glühenden Körper ausgesandten Lichtes nur dann charakteristische Maxima der Lichtstärke, also die Suhstanz charakterisierende helle Linien liefern, wenn wir dünne Schichten der Suhstanz zum Lenchten bringen und dafür sorgen, dafs in diesen Schichten die hetreffende Suhstanz nur eine geringe Dichtigkeit hesitzt. Wir werden daraus schliefsen, dafs ein glühender fester oder flüssiger Körper niemals ein scharf charakteristisches Spektrum hahen kann, wegen zn grofser Dichte der strahlenden Moleküle, dafs ein solcher vielmehr, wie es auch die Erfahrung zeigt, immer ein kontinnierliches Spektrum hahen mufs. Das den charakteristischen Maximis des Ahsorptionsvermögens entsprechende, aus einzelnen hellen Streifen hestehende Spektrum einer Suhstanz kann nur dann auftreten, mufs aber auch dann auftreten, wenn wir geringe Mengen derselhen in Dampfform zum Glühen hringen.

Diese aus dem Kirchhoffschen Satze sich unmittelbar ergehende Folgerung ist schon lange von verschiedenen Chemikern und Physikern geahnt worden[1]), wie man ja schon längst hei der chemischen Analyse aus der gelben Flamme eines Weingeistes, in dem ein Salz aufgelöst wurde, auf die Gegenwart von Natrium, aus der violetten auf die Gegenwart von Kalium, aus der roten Färhung der Flamme auf Lithium geschlossen hat. So hat, um nur jene Physiker namhaft zu machen, welche der Erkenntnis des Satzes am nächsten gekommen sind, Ångström[2]) in seinen optischen Untersnchungen hereits erkannt, dafs das Spektrum des elektrischen Funkens, der eine Lichtlinie von grofser Feinheit hildet, von den Metallen, zwischen denen der Funke überspringt, und dem Gase, in welchem der Funke sich hildet, ahhängt; so hat ganz besonders Plücker erkannt, dafs jedes glühende Gas ein für dasselhe charakteristisches Spektrum hat, so dafs die Natur des Gases und seine chemische Änderung durch die hellen Linien seines Spektrums in charakteristischer Weise angezeigt wird. Ja Plücker sprach es hereits aus, dafs wenn man die dem Spektrum eines bestimmten Gases eigentümlichen Lichtlinien mit Genauigkeit hestimmt hahe, dafs man dann

[1]) Man sehe *Kirchhoff:* Zur Geschichte der Spektralanalyse. Poggend. Ann. Bd. CXVIII.

[2]) *Ångström*, Poggend. Ann. Bd. XCIV.

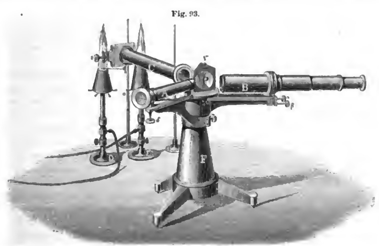
das Vorhandensein eines Gases mit Sicherheit aus der Beobachtung seiner Linien schliefsen könne, und dafs man in dem Spektrum dann ein sicheres Mittel habe, um mannigfaltige Fragen über die chemische Konstitution von Gasen und Dämpfen zu beantworten[1]). In soweit hat Plücker es zuerst präcise ausgesprochen, dafs das Spektrum ein Mittel der chemischen Analyse sein könne.

In seiner ganzen Allgemeinheit wurde indes der Satz, dafs jede verdampfbare Substanz in eine Flamme gebracht, oder überhaupt jeder glühende Dampf ein ihn charakterisierendes Spektrum habe, und dafs deshalb das Spektrum ein ausgezeichnetes Mittel der chemischen Analyse sei, von Kirchhoff und Bunsen erkannt[2]).

Kirchhoff und Bunsen benutzten zur Untersuchung der Spektra der chemischen Elemente teils den Fig. 69 gezeichneten grofsen Spektralapparat, teils ein einfacheres Spektroskop Fig. 93.

Auf das obere Ende des gufseisernen Fufses F ist eine Messingplatte geschraubt, die das Flintglasprisma P von 60^0 brechendem Winkel und das Rohr C trägt, welches an dem dem Prisma zugewandten Ende durch eine

Fig. 93.



Sammellinse, an dem andern durch eine Platte verschlossen wird, die mit einem Spalt versehen ist. An dem Fufse sind weiter zwei Arme so befestigt, dafs sie um eine Axe drehbar sind, von denen der eine das Fernrohr B von etwa achtfacher Vergröfserung, der andere das Rohr A hält; in dem dem Prisma zugewandten Ende des letztern ist eine Sammellinse, in dem andern eine Skala angebracht, die durch Reflexion an der vordern Prismenfläche sich dem durch das Fernrohr blickenden Beobachter zeigt. Die Skala ist eine auf Glas photographierte auf etwa $\frac{1}{15}$ verkleinerte Millimeterskala, sie ist mit Staniol so weit gedeckt, dafs nur der schmale Streifen, auf welchem die Teilstriche und die Zahlen sich befinden, sichtbar ist.

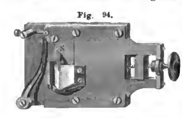
---

1) *Plücker*, Poggend. Annal. Bd. CVII. p. 499.

2) *Kirchhoff* und *Bunsen*, Poggend. Annal. Bd. CX u. Bd. CXIII.

Die hellen oder dunklen Linien in dem Spektrum einer vor dem Spalt befindlichen Lichtquelle sieht man dann auf dem Bilde der Skala projiciert, und indem man die Stelle der Skala beobachtet, an welcher die Linien erscheinen, ist sofort die Stellung derselben im Spektrum, welches dieser Apparat gibt, bestimmt. Man hat deshalb nur in dem Apparate die Stellung der Fraunhoferschen Linien im Sonnenspektrum zu bestimmen, um sofort auch die Stellung der hellen Linien einer künstlichen Lichtquelle im Sonnenspektrum zu kennen. Zur direkten Vergleichung der Lage der Linien in dem Spektrum zweier verschiedener Lichtquellen gaben Kirchhoff und Bunsen dem Spalt die Fig. 94 dargestellte Einrichtung. Von dem Spalt ist nur die obere Hälfte frei; die untere ist gedeckt durch ein kleines gleichseitiges Glasprisma, das durch totale Reflexion die Strahlen der Lichtquelle E durch den Spalt sendet, während die Strahlen der Lichtquelle D frei durch die obere Hälfte desselben treten. Ein kleiner Schirm S über dem Prisma hält das Licht von E von der oberen Hälfte ab. Bei dieser Anordnung erblickt der Beobachter die beiden Spektra unmittelbar über einander, und kann direkt die Übereinstimmung oder Verschiedenheit der etwa in den Spektren vorhandenen Linien erkennen.

Fig. 94.



Als Lichtquellen wandten Kirchhoff und Bunsen die nicht leuchtende Flamme des Bunsenschen Brenners und eine Anzahl anderer Flammen, wie die des Kohlenoxydes, des Wasserstoffs, des Knallgasgebläses, sowie den elektrischen Funken an; letztern, indem sie den Funken, welchen der im vierten Teile zu beschreibende elektrische Induktionsapparat gibt, zwischen Drähten des zu untersuchenden Metalles überspringen liefsen. In die Flammen wurden Verbindungen der Metalle mit Chlor, Brom u. s. w. gebracht.

Auf diese Weise fanden sie, dafs für alle Metalle ein charakteristisches Spektrum existiert, welches in allen den untersuchten Flammen und im elektrischen Funken dasselbe war, und dafs dieses charakteristische Spektrum der Metalle in den Flammen sich zeigte, welche Verbindung des Metalles auch in die Flamme gebracht wurde. Die von Kirchhoff und Bunsen auf diese Weise bestimmten Linien der Metallspektra sind zum gröfsten Teil auf Tafel II und III unter den Linien des Sonnenspektrums angedeutet.

Die Fruchtbarkeit dieser neuen analytischen Methode hat sich schon auf das glänzendste dadurch bewährt, dafs sie bereits zur Entdeckung mehrerer neuer Metalle geführt hat. Kirchhoff und Bunsen selbst entdeckten bei ihren Untersuchungen das Cäsium und Rubidium, zwei Metalle, welche in ihrem Verhalten dem Kalium sehr nahe stehen. Das Spektrum des Cäsiums ist hauptsächlich charakterisiert durch zwei scharfe blaue Linien, etwa in der Mitte zwischen F und G, aufserdem zeigen sich auf schwach beleuchtetem Hintergrunde einige schwächere Linien in Gelb und Grün. Das Rubidium ist charakterisiert durch zwei sehr nahe beisammen liegende Linien im Blau-Violetten, etwa $\frac{1}{3}$ des Zwischenraums zwischen G und H von G entfernt, aufserdem durch zwei rote Linien, welche noch vor der

Linie A des Sonnenspektrums liegen; endlich zeigt es, ähnlich wie das Cäsium, einige schwache Linien anf schwach belenchtetem Hintergrunde im Gelben nnd Grünen[1]).

Im Jahre 1861 entdeckte Crookes in dem Schlamme der Bleikammern ein nenes Metall, welches wesentlich durch eine grüne Linie charakterisiert wird, dem er den Namen Thallinm gab; die charakteristische Linie fällt mit derjenigen Nr. 1402,6 des Kirchhoffschen Spektrums zusammen[2]).

Im Jahre darauf entdeckten Reich und Richter in Freiberg im Zink ein neues Metall, das Indium, welches besonders durch eine blane Linie charakterisiert ist[3]).

Die von Kirchhoff bestimmten Linien der verschiedenen Elemente sind anf Tafel II nnd III unter den einzelnen Stellen des Sonnenspektrums, denen sie entsprechen, angegeben. Man sieht daraus, wie ganz besonders die vielen dem Eisen angehörigen hellen Linien sich im Sonnenspektrum als dnnkle Linien wieder finden, wie ebenso die Linien des Cäsium, Mangan, Kobalt, Nickel n. a. dnnkeln Linien des Sonnenspektrums entsprechen.

Ans den Untersuchungen von Bunsen und Kirchhoff schien hervorzugehen, dafs wenn man ein Metallsalz in die Flamme bringt, sich stets nur das Spektrum des Metalles zeige, und man könnte geneigt sein, daraus den Schlufs zu ziehen, dafs das Spektrum eines Elementes sich immer in derselben Weise zeige, mit welchen andern Elementen es auch verbunden sei. Dafs dem indes nicht so ist, schliefsen die beiden Forscher aus den Absorptionsverhältnissen z. B. des Joddampfes und der Jodwasserstoffsänre. Ersterer zeigt die § 46 besprochenen charakteristischen Absorptionserscheinungen, letztere zeigt nichts derart. Al. Mitscherlich[4]) ist es dann anch gelungen zn zeigen, dafs die Verbindnngen der Metalle ihnen eigentümliche von den Elementen verschiedene Spektra haben. Indem er gleichzeitig in die Flamme aufser dem Salze etwas Chlorwasserstoffsänre brachte, erhielt er z. B. von Chlorknpfer, Chlorcalcium etc. besondere Spektra, so dafs die frühere Beobachtung dadurch zu erklären ist, dafs in den Flammen die Salze sich sofort zersetzen.

§ 49.

Abhängigkeit der Spektralerscheinungen von der Dicke und Dichte der strahlenden Schicht. Wir haben im vorigen Paragraphen den Einflnfs der Dichte und Dicke der strahlenden Schicht anf das von derselben ansgesandte Licht nur so weit berührt, um die Frage zn beantworten, unter welchen Umständen wir ein charakteristisches aus einzelnen hellen Linien bestehendes Spektrum erhalten können. Es ist das nur möglich,

[1]) *Kirchhoff* und *Bunsen*, Poggend. Annal. Bd. CXIII.

[2]) *Crookes*, Philosophical Magazin. 4. Ser. T. XXI. *Lamy*, Annales de chim. et de phys. 3. Série. T. LXVII.

[3]) *Reich* und *Richter*, Erdmanns Journal für prakt. Chemie. Bd. LXXXIX und XC.

[4]) *Al. Mitscherlich*, Poggend. Annal. Bd. CXVI. Die seitdem sehr angeschwollene Litteratnr über Spektralanalyse, die mehr ein chemisches als ein physikalisches Interesse hat, findet man sehr vollständig in den Jahresberichten über Chemie seit 1860 nnd in den Fortschritten der Physik dargestellt von der Berliner physikalischen Gesellschaft seit 1860.

wenn wir die betreffenden Substanzen in Dampfform zum Glühen bringen, und dann nur Dämpfe sehr geringer Dichte oder sehr dünne Schichten derselben als Lichtquelle benutzen. Deshalb ist zur Darstellung der charakteristischen Spektra das beste Mittel der elektrische Funke, den wir am bequemsten unter Benutzung des Induktionsstromes aus den nahe einander gegenübergestellten, aus dem betreffenden Metall hergestellten Enden des Induktionsdrahtes überspringen lassen, da dieser eine Lichtlinie von sehr grofser Feinheit ist. Die Flammen, wie die nicht leuchtende Flamme der Bunsenschen Lampe, oder die nicht leuchtende Flamme des Wasserstoffgases sind zur Darstellung solcher aus hellen Linien bestehenden Spektra nur geeignet, wenn die in die Flammen gebrachten Substanzen nur wenig verdampfen, wie das mit den meisten Salzen der Fall ist.

Gibt man dagegen in diesen Flammen den Dämpfen eine grofse Dichte, so müssen dieselben nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen ein mehr oder weniger kontinuierliches Spektrum liefern, welches sich von den kontinuierlichen Spektren der glühenden festen Körper dadurch unterscheidet, dafs es vielfach schattiert, aus hellern und dunklern Partieen bestehen mufs. Es folgt das daraus, dafs die Dichte der Dämpfe gegen jene der festen Körper immerhin nur eine sehr kleine ist. In der das ausgesandte Licht darstellenden Gleichung

$$S = \{1 - (1 - \mathfrak{a}_1)^{d\delta}\} e_1 + \{1 - (1 - \mathfrak{a}_2)^{d\delta}\} e_2 + \cdots\cdots \{1 - (1 - \mathfrak{a}_n)^{d\delta}\} e_n$$

worin $e_1, e_2 \ldots e_n$ die von einem vollkommen schwarzen Körper ausgesandten Lichtmengen der verschiedenen Wellenlängen, und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$ die Absorptionsvermögen einer Schicht der Flamme von der Dicke eins für dieselben Wellen bedeutet, unter Voraussetzung, dafs der Dampf in der Flamme die Einheit der Dichte besitzt, nimmt bei Anwendung von Dämpfen die Dichte δ im allgemeinen, wenn die Temperatur nicht sehr hoch ist, ein Umstand, den wir nachher besprechen werden, nicht derartig grofse Werte an, dafs die Unterschiede in den Werten von $\mathfrak{a}$ bei den den Flammen zu gehenden Dicken d verschwinden. Es mufs deshalb in dem Spektrum einer solchen Flamme noch jeder Unterschied in dem Absorptionsvermögen sich durch gröfsere oder geringere Helligkeit zu erkennen geben.

Für die meisten Dämpfe und Gase, denen wir in den erwähnten Flammen eine grofse Dichtigkeit geben können, ist das Absorptionsvermögen zu klein, als dafs sie bei der Temperatur der Flammen überhaupt eine merkbare Lichtmenge ausstrahlen können, für einen Dampf habe ich aber die abgeleitete Beschaffenheit des Flammenspektrums nachweisen können, für den stark absorbierenden Joddampf. Ich leitete zu dem Ende[1]) Wasserstoff aus einem geräumigen Gasometer durch eine Glasröhre, welche Joddampf enthielt. Die Glasröhre endigte in eine nach oben gebogene weite Spitze, welche sich gerade unter der Spaltöffnung des Spektralapparates befand. Das Ende der Glasröhre an der Spitze war mit einem losen Pfropfen von Asbest versehen, welcher verhinderte, dafs feste Partikelchen mit in die Flamme gerissen wurden. Überdies war dieses vordere Ende der Röhre in ein Sandbad gelegt, und so auf einer Temperatur gehalten, bei welcher

[1]) *Wüllner*, Über die Absorption des Lichtes in isotropen Mitteln (Gratulationsschrift), Marburg 1862. Poggend. Annal. Bd. CXX.

der Joddampf sich nicht verdichtet. Das Jod wurde in das hintere Ende der Röhre nahe bei der Eintrittsstelle des Wasserstoffs gebracht und mit einer Weingeistflamme erhitzt. Das Wasserstoffgas mischte sich auf diese Weise vollständig mit dem Joddampf, welcher in der Flamme zum Glühen kam, wenn der Gasstrom an der Spitze entzündet wurde. Ist die Flamme stark mit Joddampf gesättigt, und bringt man dann den hellsten Teil der mit rötlich gelbem Lichte leuchtenden Jodflamme vor den Spalt, so genügt ein Blick in das Fernrohr des Spektralapparates, um die überraschende Ähnlichkeit in dem Charakter des Jodspektrums mit dem Spektrum des durch dicke Schichten dieses Dampfes hindurchgegangenen Tageslichtes zu erkennen.

Wie dieses aus einem vielfach schattierten, von dunklen Linien durchzogenen kontinuierlichen Spektrum besteht, so auch das Spektrum des glühenden Dampfes, so dafs man im letztern an der gröfsern oder geringern Helligkeit des ausgesandten Lichtes die Unterschiede in den Werten von a deutlich erkennen konnte. Die Bestimmung der Lage der dunklen und hellen Streifen in dem Spektrum des Dampfes und die Vergleichung mit der Lage der hellen und dunklen Streifen im Absorptionsspektrum ergab dann auf das sicherste, dafs der Theorie gemäfs die hellen Streifen im Dampfspektrum den dunklen im Absorptionsspektrum entsprachen, dafs also der Joddampf für jene Lichtarten ein Maximum des Emissionsvermögens hat, für welche er ein Maximum des Absorptionsvermögens zeigt.

Fig. 95.

Das aus einzelnen hellen, den Maximis des Absorptionsvermögens entsprechenden Linien bestehende Spektrum des Joddampfes läfst sich in der Flamme nicht erhalten, da bei der dazu erforderlichen geringen Dichte des Dampfes das Licht der Flamme zu schwach wird.

Man erhält aber nach den Versuchen von Plücker, Plücker und Hittorf und von mir selbst für den Joddampf das Linienspektrum, sowie für alle Gase das mehr oder weniger kontinuierliche Spektrum, sowie auch das Linienspektrum, wenn man die Gase durch den elektrischen Induktionsstrom zum Glühen bringt. Man schliefst dazu die Gase in sogenannte Geisslersche Röhren. Diese Röhren bestehen in ihrer gewöhnlichen Form aus zwei weitern Röhren (Fig. 95), welche durch ein längeres oder kürzeres Stück einer kapillaren Röhre mit einander verbunden sind. In die Enden der weitern Röhren bei a und b sind Platindrähte eingeschmolzen. Die Röhren werden mit Gas in sehr verdünntem Zustande gefüllt; zu dem Ende werden sie mit einem Ansatzrohre c an der Geisslerschen Luftpumpe befestigt, möglichst luftleer gepumpt und dann mit dem durch wasserfreie Phosphorsäure vollkommen ausgetrockneten Gase gefüllt, wieder ausgepumpt und so mehrfach mit dem trocknen Gase ausgespült, bis man sicher sein kann, dafs jede Spur Luft und alle Feuchtigkeit aus der Röhre verschwunden ist. Um letzteres zu erreichen, wird bei dem Spülen die Röhre aufserdem stark erhitzt. Schliefslich läfst man dann von dem Gase soviel in die Röhre, dafs dasselbe nur mehr eine Spannung von wenigen Millimetern besitzt. Um die Spannung des Gases in den Röhren beliebig variieren zu können, habe

ich denselben die Form Fig. 96 gegeben, indem ich sie mit zwei Glashähnen *c* und *d* versah, welche gut geschliffen vollkommen luftdicht schliefsen.

Läfst man den Induktionsstrom durch solche Röhren hindurchgehen, so leuchtet besonders der kapillare Teil sehr hell in einer für jedes Gas charakteristischen Farbe, man bringt deshalb den kapillaren Teil vor den Spalt des Spektralapparates. Später habe ich indes den kapillaren Teil fortgelassen und Röhren von überall gleicher Weite zu den Versuchen benutzt, hauptsächlich Röhren, welche bei einem Abstande der Drahtspitzen von 7,5 Centimeter eine überall gleiche Weite von 2 Centimeter und solche, welche 1 Cent. oder 0,5 Cent. Weite besafsen.

Fig. 96.

In seiner ersten Arbeit über die Spektra der Gase und Dämpfe erhielt Plücker[1]) von den meisten von ihm untersuchten Gasen nur die Linienspektra. So erhielt er vom Wasserstoff, der in der kapillaren Röhre mit schönem und hellem rötlichem Lichte leuchtet, ein aus drei hellen scharfen Linien bestehendes Spektrum, einer roten, einer grünblauen und einer blauvioletten, welche Plücker mit H_α, H_β, H_γ bezeichnete. H_α entspricht genau der Fraunhoferschen Linie *C*, H_β genau der Linie *F* und H_γ, deren Wellenlänge in zehntausendstel Millimetern 4,343 ist, einer feinen dunklen Linie im Sonnenspektrum eben vor *G*.

Das Spektrum des Sauerstoffes, welches er erhielt, besteht aus einer ziemlich beträchtlichen Anzahl einzelner heller Linien, welche über das ganze Spektrum verteilt sind, jedoch mehr im Blauen und Violetten auftreten als im Roten und Gelben. Plücker bestimmte von diesen Linien vier als für den Sauerstoff charakteristisch, denen er die Bezeichnung O_α, O_β, O_γ, O_δ beilegte. Die erste ist eine fleischrote Linie zwischen *C* und *D*, deren Wellenlänge 6,150, die zweite und dritte sind grüne Linien ganz in der Nähe der Fraunhoferschen Linie *E*, deren Wellenlängen 5,328 und 5,185 sind, die vierte Linie ist eine violette, deren Wellenlänge 4,367 ist; sie liegt sehr nahe bei der Linie H_γ des Wasserstoffs.

Von den übrigen von Plücker beschriebenen Linienspektren erwähnen wir nur noch jenes des Joddampfes. Dasselbe besteht wie das des Sauerstoffs aus einer grofsen Anzahl heller und scharfer Linien, welche durch dunkle Zwischenräume von einander getrennt sind. Die hellen Linien treten hauptsächlich im Gelbgrünen und Grünen zwischen *D* und *F* auf. An diesem

[1]) *Plücker*, Poggend. Annal. Bd. CVII.

Dampfe erhalten wir somit eine Bestätigung der eben gemachten Folgerung, dafs dichte Dämpfe in Flammen ein schattiertes kontinuierliches, die feine Lichtlinie der elektrischen Entladung dagegen ein Spektrum einzelner heller Linien liefert.

Bei ganz derselben Behandlungsweise lieferte der Stickstoff nicht ein aus einzelnen hellen Linien bestehendes Linienspektrum, sondern ein prachtvoll schattiertes kontinuierliches Spektrum. Dasselbe ist abgebildet Tafel I, Fig. 3. Es beginnt im Roten zwischen B und C und erstreckt sich reich schattiert bis tief in das Violette hinein. Besonders charakteristisch für den Stickstoff sind die eigentümlichen Schattierungen im blauen und violetten Teile, welche ganz den Eindruck kannelierter Säulen machen und welche kein Spektrum in ähnlicher Weise darbietet.

Nach diesen Beobachtungen Plückers, welche, wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, vor den Arbeiten Kirchhoffs gemacht wurden, hatte es den Anschein, dafs einige Gase Spektra lieferten, welche aus hellen Linien bestanden, dafs dagegen andere, wie der Stickstoff, schattiert kontinuierliche Spektra lieferten, wenn man sie in derselben Weise zum Glühen bringt. Einige Jahre später zeigten indes Plücker und Hittorf[1]), dafs man auch von dem Stickstoff durch den Induktionsstrom ein Linienspektrum erhalten konnte. Wenn man in der Geisslerschen Röhre dem Stickstoff eine Spannung von 40^{mm} gibt, so erhält man bei Anwendung des einfachen Induktionsstromes das beschriebene Stickstoffspektrum Fig. 3, Tafel I. Schaltet man nun aber gleichzeitig in den Induktionsapparat eine Leydener Flasche ein, so zeigt der Stickstoff ebenso ein Linienspektrum, wie es vorher vom Sauerstoff, Wasserstoff und Jod erwähnt wurde, welches aus einer grofsen Zahl heller Linien auf dunklem Grunde besteht. Fig. 4 auf Tafel I gibt unmittelbar unter dem ersten Spektrum die Linien des zweiten Spektrums an. Plücker bezeichnete diese von ihm bei einem und demselben Gase beobachteten Spektra als solche I. Ordnung, die schattiert kontinuierlichen, und als Spektra II. Ordnung die aus hellen Linien bestehenden. Ich habe die ersteren ihrem Aussehen entsprechend kurzweg Bandenspektra, die letzteren Linienspektra genannt.

Plücker und Hittorf erhielten in ganz derselben Weise noch Doppelspektra anderer Gase, so des Schwefeldampfes und einiger kohlehaltiger Gase, zu denen ich dann später das Bandenspektrum des Wasserstoffs und der gasförmigen Verbindungen der Kohle mit Sauerstoff, Wasserstoff und Stickstoff hinzufügte, von denen ich ebenfalls die Linienspektra darstellte[2]).

Während Plücker und Hittorf bei denjenigen Gasen, welche bei ihren Versuchen mit dem einfachen Induktionsstrom das Bandenspektrum lieferten, das Linienspektrum durch gleichzeitiges Einschalten einer Leydner Flasche erhielten, und deshalb, da dieses Einschalten den momentanen Durchtritt gröfserer Elektricitätsmengen bewirkt, annahmen, dafs das Linienspektrum einer höhern Temperatur entspreche, konnte ich zunächst den Nachweis

[1]) *Plücker* und *Hittorf*, Philosophical Transactions of London R. S. for 1865. Die dieser Abhandlung beigegebenen Tafeln geben die Abbildungen aller von Plücker beobachteten Spektra.

[2]) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXV und CXLIV. Eine Beschreibung der bis jetzt genauer untersuchten Spektra gibt *Schuster* im Report of the British Association 1880.

liefern, dafs das Einschalten einer Leydner Flasche nicht erforderlich ist, sondern dafs der einfache Induktionsstrom je nach dem Drucke des in die Röhren eingeschlossenen Gases das eine oder andere Spektrum liefert. Das Bandenspektrum des Stickstoffes trat bei meinen Versuchen[1]) besonders brillant auf, als ich dem Gase in den Röhren einen Druck von etwa 10^{mm} gab. Bei gesteigerter Dichte des Gases nahm die Helligkeit des Spektrums beträchtlich ab; schon bei einer Spannung des Gases von 60^{mm} konnte man die erste rote Partie des Spektrums kaum mehr erkennen, das gelbe war kaum mehr als schattiert zu sehen; im Grün liefsen sich die Schattierungen nur eben mehr wahrnehmen, nur der blaue und violette Teil des Spektrums war, wenn auch lichtschwächer doch noch vollkommen ausgebildet. In ähnlicher Weise nahm besonders in den weniger brechbaren Teilen des Spektrums die Lichtstärke stetig ab, bis der Druck des Gases 260^{mm} betrug. Bei diesem Drucke ist das Bandenspektrum des Stickstoffs bis zum Blau noch eben sichtbar, aber nicht mehr als schattiert zu erkennen, die Kannelierungen im Blau und Violett sind indes noch deutlich vorhanden, wenn auch lichtschwächer und besonders von der brechbaren Seite her schmaler geworden. In dem schwach hellen grünen Felde blitzt bei diesem Drucke schon zuweilen eine helle zum Linienspektrum des Stickstoffs gehörige Linie auf.

Die Zahl der zum Linienspektrum des Stickstoffs gehörigen hellen Linien vermehrt sich, ohne dafs das Bandenspektrum ganz verschwindet, bis der Druck des Gases 400^{mm} überschreitet, erst bei 500^{mm} Druck tritt das Linienspektrum zuweilen allein auf, zuweilen noch von dem, wenn auch sehr lichtschwachen Bandenspektrum begleitet. Erst bei noch weiterer Steigerung des Druckes verschwindet das Bandenspektrum ganz und das Linienspektrum erscheint allein sich immer vollständiger ausbildend.

Dieses Auftreten der verschiedenen Gasspektra unter scheinbar ganz denselben Umständen, Glühendmachung des Gases in den kapillaren Räumen der Geifslerschen Röhren, scheint auf den ersten Blick unserer vorhin gegebenen Ableitung der Umstände, unter denen die Spektra der Gase in dieser Weise verschieden sein müssen, zu widersprechen, und deshalb haben manche Physiker, wie Angström[2]), Salet[3]), Schuster[4]), annehmen zu müssen geglaubt, dafs wenigstens die einfachen Gase nur Linienspektra haben könnten, dafs die Bandenspektra nur zusammengesetzten Gasen angehören könnten, und dafs deshalb die bei dem Stickstoff und Wasserstoff beobachteten Spektra Verunreinigungen, des Stickstoffs mit Sauerstoff, des Wasserstoffs mit Kohle zuzuschreiben seien. Während Ångström annahm, dafs kein einfaches Gas oder kein einfacher Dampf ein anderes als ein Linienspektrum haben könnte, gaben indes Salet und Schuster zu, dafs Dämpfe, wie Jod und Schwefel, ein Bandenspektrum und ein Linienspektrum hätten.

Diese Einwürfe hatten aber nur so lange eine Bedeutung, und waren nur so lange möglich, als man annahm, dafs die verschiedenen Spektra von derselben leuchtenden Gasschicht, der in dem kapillaren Teile der Geifsler-

---

[1]) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVII.

[2]) *Ångström*, Poggend. Annal. Bd. CXLIV.

[3]) *Salet*, Annales de chim. et de phys. IV. Série. Tome XXVIII.

[4]) *Schuster*, Poggend. Ann. Bd. CXLVII. Schuster hat indes später der Ansicht, dafs alle Gase mehrfache Spektra haben, sich angeschlossen.

schen Röhren glühenden Gasmenge herrühren. So lange konnte man allerdings die verschiedenen Spektra einem und demselben Gase nur zuschreiben unter der Annahme, dafs das Emissionsvermögen mit der Temperatur der Gase, welche nach der Annahme Plückers bei dem Linienspektrum eine wesentlich höhere sein sollte, veränderlich sei, und zwar derartig, dafs es für gewisse Lichtarten mit steigender Temperatur abnahm, für andere dagegen zunahm.

Es ist mir indes gelungen, experimentell den direkten Nachweis zu liefern, dafs auch die durch den elektrischen Strom erzeugten verschiedenen Spektra in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie das in der Flamme erhaltene Spektrum des glühenden Joddampfes zu dem durch den elektrischen Strom erhaltenen Linienspektrum, dafs das Bandenspektrum einer relativ dicken Schicht, das Linienspektrum dagegen einer äufserst dünnen Schicht des leuchtenden Gases entspricht. Ich benutzte dazu[1]) die vorhin erwähnten Röhren ohne kapillares Zwischenstück, von überall gleicher Weite, indem ich den durch die Röhren hindurchgehenden elektrischen Strom mit einem rotierenden Spiegel beobachtete, dessen Rotationsaxe der Axe der Röhre parallel gestellt war. Da die der Zeit nach einander folgenden Phasen der Entladung in dem virtuellen Bilde des rotierenden Spiegels dann neben einander erscheinen, kann man sie deutlich erkennen, was ohne Spiegel wegen der Schnelligkeit, mit welcher die Entladungen verlaufen, nicht möglich ist.

Um die ganze Erscheinung verständlich machen zu können, mufs ich hier einige Bemerkungen über die Entladungen des Induktionsstromes durch Räume, welche mit verdünnten Gasen gefüllt sind, vorausschicken.

Führt man einen elektrischen Induktionsstrom durch Räume, welche mit verdünnten Gasen gefüllt sind, so kann der Übergang der Elektricität je nach der Dichtigkeit der Gase ein sehr verschiedener sein. Gibt man den Gasen in einer 2 Centimeter weiten, 8 Centimeter langen Röhre einen Druck von wenigen Millimetern, so strömt aus dem Ende des Induktionsdrahtes, von welchem die positive Elektricität in die Röhre eintritt, der positiven Elektrode, die Elektricität in einem breiten Strome in die Röhre, so dafs bis zu einer Entfernung von 5 Centimetern von der Spitze der positiven Elektrode die ganze Gasmasse der Röhre glühend wird. Dieses Überströmen dauert so lange, wie der Induktionsstrom andauert, denn im rotierenden Spiegel erscheint die Röhre als ein breites Lichtband. Eine sichtbare die ganze Röhre durchsetzende Entladung, welche also die beiden Elektroden verbindet, ist bei geringem Drucke des Gases nicht vorhanden, die Entladung scheint mehr ein Eindringen der positiven Elektricität bis zu einer gewissen Tiefe zu sein. Diese Art der Entladung bleibt allein vorhanden, bis der Druck des Gases eine gewisse, je nach der Natur des Gases verschiedene Höhe erreicht hat, sie zieht sich indes weiter gegen den Draht hin, durch welchen die positive Elektricität die Röhre verläfst, gegen die negative Elektrode, und füllt die Röhre nicht mehr ihrer ganzen Breite nach aus; das Licht zieht sich zu einem immer dünner werdenden Cylinder um die Axe der Röhre zusammen. Der rotierende Spiegel zeigt gleichzeitig, dafs die Entladung von kürzerer Dauer wird, indem das in demselben er-

[1]) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXLVII und Bd. CXLIX.

scheinende Bild der Entladung schmaler wird. Erst wenn der Druck eine gewisse Grenze erreicbt bat, tritt neben dieser Entladnng der eigentliche elektrische Funke auf, der in einer änfserst feinen Lichtlinie die Spitzen der Elektroden verbindet. Dieser Funke erscheint auch im rotierenden Spiegel als eine helle Linie; der Funke eröffnet die Entladung und auf ihn folgt zunächst noch ein Überströmen der Elektricität in der vorber heschriebenen Weise. Der Funke geht in einer unmefsbar kleinen Zeit über, wie sich darans ergibt, dafs er selbst hei scbnellster Rotation des Spiegels nicbt in die Breite gezogen wird. Der Funke ist zunächst schwach lenchtend, er wird aber immer heller, je höher wiederum bis zn einer gewissen Grenze der Druck der in die Röbren eingeschlossenen Gase zunimmt, bis zu der Grenze nämlich, von welcher an der Funke überhaupt nicht mehr durcb das dichtere Gas hindurcbgehen kann. Dieser so immer heller werdende Funke ist zunächst noch von jener zuerst beschriehenen Entladungsart begleitet; bei wachsendem Drucke verschwindet dieselbe immer mehr, bis sie ganz anfhört, wenn der Funke noch lange die Röhre durchsetzen kann.

Die Bildung des eigentlichen elektrischen Funkens, welcbe erst hei einem ziemlicb hohen Drucke stattfindet, hei Stickstoff unter den angegehenen Verhältnissen, wenn der Druck etwa 180—200^{mm} geworden ist, kann bei viel geringern Drucken bewirkt werden, wenn man gleichzeitig in den Induktionsstrom eine Leydner Flasche einschaltet. Bei Stickstoff, respective Luft, erhielt ich unter den angegebenen Verbältnissen den eigentlichen Funken schon bei einem Drucke von etwa 80^{mm}.

Man kann somit scharf zwei Arten der Entladung des Indnktionsstromes von einander unterscheiden. Die eine, icb habe sie das positive Büschellicbt genannt, verhreitet sich mehr oder weniger durch die ganze Röhre, die Gasmasse derselhen in grofser Ansdehnnng zum Glühen erhitzend, die andere gebt als Funken über und bringt nur die wenigen Gasmoleküle zum Glühen, welcbe anf der Linie des Funkens liegen.

Dem entsprecbend sind anch die Spektra der heiden Entladungen verscbieden. So lange die Röbre nur das positive Büschellicht zeigt, liefert das Licht anch nnr das Bandenspektrum, welches bei Stickstoff das von Plücker, bei Wasserstoff das von mir beschriebene ist, nnd welches hei Sauerstoff wesentlich aus 4 Banden besteht, deren erste im Orange, zweite im Gelben, in der Gegend der dunklen Linien *D*, dritte im Gelb-Grünen und vierte im Grünen etwa bei *E* liegt[1]). Charakteristisch ist für das Sauerstoffspektrum, dafs bei der ersten, dritten und vierten Bande das Maximum der Helligkeit etwa anf der Mitte der Banden liegt, während bei den meisten übrigen Bandenspektris das Maximnm der Helligkeit bei den einzelnen Banden an der weniger hrechbaren Grenze liegt. Das Bandenspektrum ist am hellsten und schönsten ausgebildet, wenn das positive Büschellicht die Röbre am vollständigsten ansfüllt, bei einem Drucke von etwa 5^{mm}. Wenn sicb das Büschellicht zusammenziebt, wird die Entladung zugleicb lichtschwäcber, damit das Spektrum weniger bell, nnd die Schattierungen undentlicber. Ob das Verschwinden der Schattierungen nur dem Schwäcberwerden des Licbtes oder auch dem Dicbterwerden des Gases zuzuschreiben ist, läfst sich nicbt entscheiden. In dem Moment aber, in welchem sicb der eigentliche Funke

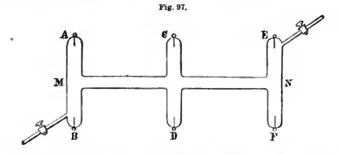
[1]) *Wüllner*, Wiedem. Annal. Bd. VIII.

ausbildet, blitzen auf den Resten des Bandenspektrums Linien des Linienspektrums auf. Ist der Funke noch schwach, so treten nur die hellsten Linien des Spektrums auf; mit wachsender Helligkeit wächst die Anzahl der Linien, bis sich schliefslich das Linienspektrum vollständig ausbildet, während bei dem Ausbleiben des positiven Büschellichtes das Bandenspektrum vollständig verschwindet. Damit ist es gerade für die einfachen Gase experimentell bewiesen, dafs das Bandenspektrum nur dann auftritt, wenn eine relativ dicke Schicht des Gases leuchtet, das Linienspektrum dagegen, wenn die leuchtende Schicht von verschwindender Dicke ist, wie bei dem elektrischen Funken.

Derselbe Unterschied in der Dicke der leuchtenden Schicht ist auch in den Röhren mit kapillarem Zwischenstück vorhanden, wie aus dem gleichen Verlaufe der Erscheinungen bei meinen Versuchen über das Stickstoffspektrum sich ergibt; auch dort ist die Dicke der die kapillare Röhre ausfüllenden Gasschicht immer noch sehr grofs gegen die feine Linie des Funkens. Dafs einige Gase mit dem Induktionsstrome zum Glühen gebracht nur das Linienspektrum geben, liegt daran, dafs der Induktionsstrom dieselben nur im Funken durchsetzen kann. Merkwürdigerweise tritt in engen Röhren auch bei Wasserstoff schon in geringen Drucken neben der Büschelentladung die Funkenentladung auf; schon bei einer Röhre von 1 Centimeter Durchmesser zeigte der rotierende Spiegel fast stets den Funken als Beginn der Entladung, und in Röhren mit kapillarem Zwischenstück tritt diese Funkenentladung in geringen Drucken oft allein ohne jegliches Büschellicht auf. Dieser Umstand erklärt es, dafs man in Geifslerschen Röhren mit kapillarem Zwischenstück zuweilen das Linienspektrum allein, zuweilen, ja in der Regel, vom Bandenspektrum begleitet erhält. Joddampf und Bromdampf kann der Induktionsstrom überhaupt nur im Funken durchsetzen, deshalb geben diese Dämpfe mit dem Induktionsstrom nur das Linienspektrum[1]).

Einen augenfälligen Beweis für den Einflufs der Dicke der strahlenden Schicht auf das ausgesandte Licht erhielt ich durch Anwendung einer Röhre von der Form Fig. 97. Dieselbe besteht aus drei je 2 Centimeter weiten

Fig. 97.



Röhren AB, CD, EF, welche in der Mitte durch ein Rohr MN gleicher Weite und im ganzen etwa 26 Centimeter Länge verbunden sind.

[1]) Eine Anordnung, um auch mit Hülfe des Induktionsstromes das Bandenspektrum des Jod zu erhalten gibt *Salet*, Comptes Rendus Bd. LXXV. p. 76.

Füllt man das Rohr mit Kohlensäure von 2—4 Millimeter Druck und läfst den Strom etwa bei *A* eintreten, bei *F* austreten, so dafs das Gas auf der Strecke *AMNF* leuchtend wird, und bringt das Stück *AM* des Rohres vor den Spalt des Spektrometers, so erhält man als Spektrum der Kohlensäure fast nichts als vier schmale Streifen, deren erster im Gelbgrünen, etwa $\frac{1}{3}$ des Abstandes *D*—*E* hinter *D* liegt, deren zweiter im Grünen sehr nahe hinter *E*, deren dritter im Grünblauen fast bei *F* und deren vierter im Blauvioletten etwa $\frac{1}{3}$ des Abstandes *F*—*G* vor *G* liegt. Bringt man aber die Röhre *MN* vor den Spalt des Spektralapparates, so dafs man durch die 26 Centimeter lange Schicht des leuchtenden Gases hindurchsieht, so bekommt man das sehr schön ausgebildete Bandenspektrum der Kohlensäure, welches schon vor *C* im Roten beginnt, und bis in das Violette hineinreicht, wie es die sehr viel heller leuchtenden Röhren mit kapillarem Zwischenstück zeigen. Man sieht so direkt den Übergang eines fast linienartigen Spektrums in ein schön schattiertes Bandenspektrum lediglich durch Vermehrung der Schichtdicke.

§ 50.

Abhängigkeit der Spektra der Gase von der Temperatur. Vergleicht man die Lage der hellen Linien in dem Linienspektrum der Gase mit dem Bandenspektrum, so erkennt man, dafs die Linien des Linienspektrums keineswegs den hellsten Stellen des Bandenspektrums entsprechen; so zeigt eine Vergleichung der Zeichnungen Fig. 3 und Fig. 4 auf Tafel I der beiden Stickstoffspektra, dafs ganze Partieen des Stickstoffbandenspektrums im Linienspektrum vollständig dunkel erscheinen ohne Linien, und besonders im Grün und Blau, dafs die Linien nicht den hellsten Stellen der grünen und blauen Kannelierungen entsprechen. Ähnliches gilt für die andern Spektra; während im Flammenspektrum des Jod der rote und gelbe Teil des Spektrums ziemlich hell leuchten, zeigt das Linienspektrum dort nur wenige helle Linien. Das Bandenspektrum des Sauerstoffs beginnt im Orange, das Linienspektrum des Sauerstoffs beginnt dagegen mit einer fleischroten Linie, welche zwischen *C* und *D* liegt; das Bandenspektrum des Wasserstoffs beginnt in einiger Entfernung von *C* nach der brechbaren Seite hin, das Linienspektrum zeigt als erste Linie eine helle Linie, welche genau an der Stelle der Fraunhoferschen Linie *C* liegt, und als zweite H_β, welche der Fraunhoferschen Linie *F* entspricht.

Diese Nichtübereinstimmung in der Lage der Helligkeitsmaxima der ausgebildeten Bandenspektra und der Linienspektra war es, welche zunächst Ångström veranlafsten anzunehmen, dafs die Bandenspektra überhaupt nicht den reinen Gasen, sondern irgend welchen Verbindungen angehören[1]). Dann aber, als er den wachsenden Erfahrungen gegenüber es selbst für möglich anerkennen mufste, dafs die Gase mehrere Spektra zeigen könnten, stellte Ångström die Hypothese auf, dafs, wenn ein Gas verschiedene Spektra zeige, dieses daher rühre, dafs die Atome des Gases Verbindungen zu verschiedenen Molekülen eingehen könnten, und dafs diese gewissermafsen allotropen Verbindungen ihre eigenen Spektra haben, wenn sie ohne in die Atome zu zer-

[1]) *Ångström*, Poggend. Annal. Bd. CXLIV.

fallen zum Glühen erhitzt werden können[1]), eine Idee, welche schon Plücker und Hittorf gelegentlich ihrer Entdeckung, dafs der Stickstoff ein Bandenspektrum und ein Linienspektrum habe[2]), ausgesprochen hatten. Später hat Lockyer[3]) diesen Gedanken weiter entwickelt, indem er ausführte, dafs die Gase, so lange ihre Moleküle aus einer gröfsern Zahl von Atomen bestehen, Bandenspektra zeigen sollen, dagegen, wenn mit steigender Temperatur die Moleküle in Atome zerfallen, Linienspektra geben müfsten. Unter andern hat sich auch E. Wiedemann[4]) dieser Hypothese angeschlossen, und dieselbe durch Versuche stützen zu können geglaubt, welche wir im 4. Bande kurz besprechen werden.

Mir scheint indes eine solche Hypothese zur Erklärung der Spektralerscheinungen der Gase in keiner Weise notwendig, da sich auch jene Nichtübereinstimmung der Linien der Linienspektra mit den Helligkeitsmaximis der Bandenspektra auf Grund bekannter Erfahrungen aus meiner Theorie der Spektra als möglich, ja selbst als wahrscheinlich voraussagen läfst. Halten wir fest daran, dafs die Linienspektra durch eine fast lineare Reihe von Molekülen, die Bandenspektra von einer dickern Schicht des leuchtenden Gases geliefert werden, so bedeutet das Nichtübereinstimmen der Linien mit den Helligkeitsmaximis der Banden nichts anders als eine Verschiebung der Intensitätsmaxima des von den Gasen ausgesandten Lichtes, je nachdem sie als dünne Linien im elektrischen Funken das Licht ausstrahlen, oder in dicken Schichten in den Flammen oder im elektrischen Büschellicht leuchten. Diese Verschiebung der Helligkeitsmaxima kann ihren Grund zum Teil in der verschiedenen Dicke der strahlenden Schicht haben, dann aber hauptsächlich darin, dafs die Temperatur der Gase, wenn sie das Linienspektrum geben, eine wesentlich höhere ist, als wenn sie das Bandenspektrum liefern.

Was zunächst das Helligkeitsverhältnis zweier verschiedener Stellen des Spektrums bei verschiedener Dicke oder Dichte der strahlenden Schicht betrifft, so hat Zöllner gezeigt[5]), dafs dasselbe sich bei wachsender Dicke geradezu umkehren kann. Nennen wir E_1 und E_2 die Lichtmengen, welche zweien verschiedenen Wellenlängen entsprechend von einer Schicht, deren Dicke gleich d und Dichte gleich δ ist, ausgesandt werden, so ist das Verhältnis derselben nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{(1-(1-\mathfrak{a}_1)^{d\delta})\,e_1}{(1-(1-\mathfrak{a}_2)^{d\delta})\,e_2},$$

wenn $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ das Absorptionsvermögen derselben Substanz für eine Schicht von der Dicke oder Dichte eins und e_1 und e_2 die Mengen des von einem vollkommen schwarzen Körper ausgesandten Lichtes derselben Wellenlängen bedeutet. Nun sei

$$\mathfrak{a}_1 = 0{,}100$$
$$\mathfrak{a}_2 = 0{,}005.$$

Das heifst die Schicht von der Dicke oder Dichte eins, also für $d = 1$,

---

[1]) *Ångström*, Poggend. Annal. Jubelband.
[2]) *Plücker* und *Hittorf*, Philos. Transactions of London R. S. for 1865.
[3]) *Lockyer*, Proceedings of London Royal Society vol. XXI.
[4]) *E. Wiedemann*, Wiedem. Ann. Bd. X.
[5]) *Zöllner*, Poggend. Annal. Bd. CXLII.

$\delta = 1$, absorbiere von der ersten Lichtart 0,1 des auf die Vorderfläche treffenden Lichtes, von der zweiten 0,005, sei ferner $e_1 = 0{,}25\, e_2$, das heifst, sei bei der vorhandenen Temperatur der Schicht die von dem vollkommen schwarzen Körper ausgesandte Lichtmenge der ersten Art ein Viertel von dem der zweiten Art, so ist das Verhältnis, wenn bei konstantem δ sich d ändert,

$\frac{E_1}{E_2}$ für $d =$	1	gleich	5,00
" " " "	10	"	3,33
" " " "	20	"	2,30
" " " "	40	"	1,33
" " " "	60	"	0,95
" " " "	80	"	0,75
" " " "	100	"	0,63
" " " "	200	"	0,40
" " " "	300	"	0,32
" " " "	400	"	0,30
" " " "	500	"	0,28
" " " "	1000	"	0,25.

So lange also die Dicke oder Dichte der Schicht weniger als das 50fache der als Einheit angenommenen Dicke beträgt, ist die Helligkeit des Lichtes E_1 gröfser; steigt die Dichtigkeit weiter, so werden die beiden Stellen des Spektrums gleich hell, und wenn die Dicke der Schicht die 60fache überschreitet, wird die vorher dunklere Stelle die hellere, bis schliefslich das Helligkeitsverhältnis jenes des im Spektrum eines volkommen schwarzen Körpers zwischen den beiden Lichtmengen vorhandenen Verhältnisses wird.

Es kann somit schon lediglich die verschiedene Dicke der das Banden- und Linienspektrum liefernden Gasschicht eine wesentliche Verschiebung der Maxima der Lichtstärke zur Folge haben, und bewirken, dafs den hellen Linien weniger helle Stellen in dem Bandenspektrum entsprechen. Es würde damit aber niemals eine Stelle im Bandenspektrum wirklich dunkler, sondern nur heller als im Linienspektrum werden können. Wir sahen aber mehrere Beispiele, dafs Stellen im Bandenspektrum nicht sichtbar sind, welche im Linienspektrum helle Linien zeigen, so die rote Wasserstofflinie, die fleischrote Sauerstofflinie. Diese Veränderungen erklären sich dadurch, dafs die Temperaturen der glühenden Gase bei den verschiedenen Entladungsarten wesentlich verschieden sind, und zwar dafs, wie wir später nachweisen werden, die Temperatur der bei der Funkenentladung glühenden Gasmoleküle eine ganz beträchtlich höhere ist als bei der Entladung, welche das positive Büschellicht liefert. Das Linienspektrum wird also von Molekülen sehr erheblich höherer Temperatur ausgesandt.

Dafs das von einer glühenden Schicht eines Körpers gegebene Spektrum von der Temperatur des Körpers abhängig sein mufs, das folgt schon aus dem Ausdrucke für die von demselben ausgesandte Lichtmenge irgend einer Wellenlänge

$$E = (1 - (1 - a)^{d\delta})\, e,$$

denn die Funktion e, die von einem vollkommen schwarzen Körper ausgesandte Lichtmenge derselben Wellenlänge, ist, wie wir sahen, wesentlich von der Temperatur abhängig. Unterhalb einer gewissen Temperatur ist dieselbe gleich 0, und erst von dieser, für die verschiedenen Lichtarten verschiedenen Temperatur an wird e von null verschieden. Der Wert von e ist zunächst von null verschieden für das rote Licht, dann tritt bei einer höhern Temperatur zu dem roten das gelbe, dann das grüne, blaue und so fort, so dafs nach den vorhin erwähnten Versuchen von Draper von einer Temperatur ab, die etwa 1200° beträgt, das von glühenden festen Körpern ausgesandte Licht weifs erscheint. Von da ab nimmt der Wert von e für alle Lichtarten mit steigender Temperatur sehr rasch zu[1]), und zwar für alle so, dafs uns das Licht der glühenden Körper weifs erscheint. Wenn wir auch vollkommen schwarze Körper nicht kennen, so müssen wir diese Veränderung von e doch aus dem Verhalten glühender fester Körper schliefsen, da nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen das Spektrum derselben mit demjenigen schwarzer Körper übereinstimmen mufs.

Aus der Thatsache, dafs das Licht glühender fester Körper uns immer weifs erscheint, sobald die Temperatur 1200° überschritten hat, könnte man zu schliefsen geneigt sein, dafs der Wert von e von da ab für alle Lichtarten im gleichen Verhältnisse zunähme, indem man von der Ansicht ausginge, dafs das Licht, damit es uns weifs erscheint, immer dieselbe Zusammensetzung hätte. Indes würde dieser Schlufs voreilig sein, da zur Empfindung des weifsen Lichtes keineswegs immer das Helligkeitsverhältnis der verschiedenen Lichtarten dasselbe sein mufs. Wir werden vielmehr später nachweisen, dafs jedes Licht uns bei hinreichender Intensität den Eindruck des weifsen macht, und können weiter bei einer spektralen Untersuchung der uns immer weifs erscheinenden elektrischen Funken erkennen, dafs deren Spektrum von demjenigen glühender fester Körper sehr verschieden sein kann. Da wir aufserdem kein Mittel haben, die Helligkeit verschiedenfarbigen Lichtes scharf mit einander zu vergleichen, so können wir auch in den kontinuierlichen Spektren der glühenden festen Körper bei verschiedenen Temperaturen nicht erkennen, ob e für alle Farben gleichmäfsig wächst. Es giebt bisher überhaupt noch kein Mittel, um die Werte der Funktion e in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur und der Wellenlänge zu bestimmen.

Wenn e nicht für alle Wellenlängen gleichmäfsig wächst, so kann natürlich dadurch eine wesentliche Verschiebung der Helligkeitsmaxima bewirkt werden; aber auch wenn es für alle Wellenlängen gleichmäfsig wächst, mufs allein durch dieses Wachsen das Spektrum jedes glühenden Gases mit steigender Temperatur reicher, und da a wohl bei keiner Substanz für irgend eine Lichtart absolut gleich null ist, allmählich mehr und mehr kontinuierlich werden.

Diese Zunahme von e erklärt es sofort, weshalb in kapillaren Röhren die Bandenspektra im allgemeinen viel heller und im einzelnen vollkommener ausgebildet sind als in weiten Röhren. Die Temperatur der Gase in

[1]) *Draper*, Philosophical Magazine XXX. 1847. *E. Becquerel*, La lumière etc. p. 71—97 und p. 122—128. Auf die Intensitätsverhältnisse des ausgestrahlten Lichtes kommen wir in der Wärmelehre noch einmal zurück.

den engen Röhren ist, wie wir im 4. Bande nachweisen werden, eine ganz erheblich höhere als in weiten Röhren, damit ist die Intensität des Lichtes, welches die Gase aussenden, eine gröfsere. Diese gröfsere Intensität des Lichtes macht die Spektra nicht nur im allgemeinen heller, sondern läfst auch, da das Licht der Gase niemals blendend wird, die Unterschiede der Helligkeit an den verschiedenen Stellen, also die Schattierungen des Spektrums vollständiger erkennen.

Das Emissionsvermögen kann sich aber nicht nur durch das Wachsen von e, sondern auch durch eine Änderung der Werte von a mit der Temperatur ändern. Die Änderung scheint zwar zwischen ziemlich weiten Temperaturgrenzen keine wesentliche zu sein, das heifst die Werte von a für die verschiedenen Lichtarten scheinen bei einem und demselben Körper ziemlich dasselbe Verhältnis beizubehalten. Es folgt das einmal aus der von Kirchhoff und Bunsen nachgewiesenen Konstanz der Spektra der Elemente in den verschiedenen von ihnen benutzten Flammen, deren Temperaturen nach Angabe dieser Experimentatoren zwischen 1800° und 8000° C lagen[1]). Es folgt das ebenso aus meinen im vorigen Paragraphen erwähnten Versuchen über das Spektrum des Joddampfes, welches in der Temperatur der Wasserstoffflamme, die nach den Angaben von Kirchhoff und Bunsen etwa 3250° C beträgt, das negative Bild des Absorptionsspektrums war, das der Joddampf bei einer Temperatur von etwa 40° C liefert. Man wird indes doch nicht annehmen können, dafs das Absorptionsvermögen der Körper von der Temperatur unabhängig ist, da mit Steigerung der Temperatur die Moleküle jedenfalls lockerer werden, und so mehr geeignet sind, die Schwingungen des Äthers auf sich übertragen zu lassen. Daraus folgt eben, dafs das Absorptionsvermögen mit der Temperatur wachsen mufs.

Ein solches Wachsen des Absorptionsvermögens ist auch im allgemeinen leicht zu konstatieren; Glas z. B. ist bei gewöhnlicher Temperatur ziemlich vollkommen durchsichtig, erwärmt man es aber bis zur Glühhitze, so wird dasselbe undurchsichtig. Man kann ebenso bei jedem glühenden Gase leicht erkennen, dafs seine Durchsichtigkeit geringer ist, als wenn das Gas nicht glühend ist.

Da das Absorptionsvermögen sich nur einer bestimmten Grenze nähern, der Wert von a im Maximum der Einheit gleich werden kann, so wird man weiter folgern dürfen, dafs im allgemeinen das Absorptionsvermögen für die Wellenlängen, für welche es einen geringern Wert hat, mit steigender Temperatur rascher anwächst, als für diejenigen Wellenlängen, für welche der Wert in niedrigen Temperaturen schon ein grofser ist.

Dieser Schlufs wird auch durch eine Reihe von Erfahrungen bestätigt. Wir haben bereits § 46 die Beobachtungen Brewsters[2]) an den Dämpfen der salpetrigen Säure erwähnt, nach welchen es durch Vermehrung der Dicke der absorbierenden Schicht nur schwierig, dagegen durch Erwärmung des Gases leicht gelang im roten Teile des Spektrums dunkle Streifen zu erhalten, die ferner zeigten, dafs eine etwa 1 Centimeter dicke Schicht des Dampfes bei hinreichender Erwärmung absolut undurchsichtig wurde. Hier wurde somit nicht nur eine Zunahme des Absorptionsvermögens im all-

[1]) *Kirchhoff* und *Bunsen*, Poggend. Annal. Bd. CX.
[2]) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXXVIII.

gemeinen, sondern auch eine ganz verschiedene Zunahme desselben für die verschiedenen Farben beobachtet. Ähnliches fand Brewster bei einem dunkelroten Glase, das durch Erwärmen vollständig undurchsichtig wurde, also auch hier ein stärkeres Wachsen des Absorptionsvermögens für das rote Licht. Auch Glan[1]) fand bei Versuchen mit Gläsern, daſs das Absorptionsvermögen für die verschiedenen Farben in sehr verschiedenem Grade mit der Temperatur sich ändert.

Ich habe schlieſslich die durch diese Änderung des Absorptionsvermögens allmählich eintretende Verschiebung der Helligkeitsmaxima im Stickstoffspektrum direkt beobachtet[2]). Ich benutzte dazu Röhren mit kapillarem Zwischenstück, welches im Lichten nur etwa $0{,}2^{mm}$ — $0{,}3^{mm}$ im Durchmesser hatte. Die durch die elektrischen Entladungen in so engen Röhren erzeugte Temperatur ist eine äuſserst hohe, und dieselbe steigt um so mehr, je geringer die Dichte des in den Röhren vorhandenen Gases ist, sobald man eine gewisse Verdünnung des Gases überschreitet. Durch eine solche fortschreitende Verdünnung des Gases bewirkt man dann, gemäſs dem Einfluſs, welchen die Dichtigkeit der strahlenden Schicht auf das ausgesandte Licht ausübt, daſs das Bandenspektrum sich mehr und mehr auf gewisse Reste beschränkt, und daſs schlieſslich nur eine Anzahl heller Linien übrig bleibt. Wenn das Absorptionsvermögen sich nicht oder für alle Strahlen in annähernd gleichem Verhältnis mit der Temperatur ändert, so müssen die relativen Maxima, welche das voll ausgebildete Bandenspektrum zeigt, stets dieselben bleiben, die bei geringster Dichte übrig bleibenden Reste müssen den Maximis des Bandenspektrums entsprechen. Ändert sich dagegen das Absorptionsvermögen mit der Temperatur, so können im Bandenspektrum dunklere Partieen bei abnehmender Dichte die hellern werden, und das bei der stärksten Verdünnung noch bleibende kann an ganz andern Stellen liegen als die Maxima der Bandenspektra.

Das letztere trat in der That ein, man konnte zunächst an verschiedenen Stellen des Bandenspektrums ganz direkt verfolgen, wie vorher gleichmäſsig oder weniger beleuchtete Stellen bei abnehmender Gasdichte und infolge dessen steigender Temperatur relativ heller wurden, also an Intensität weniger abnahmen als nebenliegende Partieen, so daſs ganz neue Maxima auftraten, während in dem voll ausgebildeten Bandenspektrum vorhandene Maxima verschwanden. Das Bandenspektrum zog sich so mit abnehmender Gasdichte auf etwa 50 Linien zusammen, die vom Gelbgrünen, nahe hinter der Fraunhoferschen Linie *D* bis ins Violette, nahe vor *G* unregelmäſsig im Spektrum verteilt waren. Von diesen 50 Linien sind in dem voll ausgebildeten Bandenspektrum nur etwa 20 schon als Maxima vorhanden, alle übrigen treten an Stellen auf, welche im Bandenspektrum gleichmäſsig beleuchtet sind, indem die nebenliegenden Partieen bei abnehmender Dichte viel rascher an Helligkeit abnehmen, oder auch die betreffenden Stellen infolge der steigenden Temperatur rascher an Helligkeit wachsen.

In demselben Teile des Spektrums zeigt das Plückersche Funkenspektrum etwa 40 helle Linien, von denen etwa 8 auch als Maxima in

[1]) *Glan*, Poggend. Annal. Bd. CXLI.
[2]) *Wüllner*, Wiedem. Annal. Bd. VIII.

dem voll ausgebildeten Bandenspektrum vorhanden sind und 19 in dem als Rest des Bandenspektrums verbleibenden Linienspektrum sich ebenfalls finden. Für die Hälfte der Linien des Linienspektrums, und gerade für die hellsten desselben kann man somit ihr Entwickeln aus den Banden durch allmähliches Verschieben der Helligkeitsmaxima direkt beobachten, man wird daher nicht nötig haben zur Erklärung der verschiedenen Spektra ein Zerreifsen der Moleküle anzunehmen. Wir erhalten als Spektrum eines Gases jedesmal das Licht, welches es je nach der Dicke, Dichte und Temperatur der Schicht aussenden kann. Von einem bestimmten Gasspektrum in dem Sinne, dafs dasselbe immer und unter allen Umständen dasselbe sei, kann man somit gar nicht sprechen. Das Spektrum ist für ein Gas charakteristisch, wenn man bei hinreichend dicken Schichten das voll ausgebildete Bandenspektrum erhält, oder wenn man in der linearen leuchtenden Schicht des Funkens das Linienspektrum beobachtet.

Damit aber das Linienspektrum auftritt, darf die Temperatur nicht zu hoch sein. Aus der vorhin angegebenen Veränderlichkeit von e und a läfst sich nämlich noch eine weitere Folgerung über die Änderung der Gasspektra bei immer weiter gesteigerter Temperatur ziehen, deren experimentelle Bestätigung dann rückwärts unsere Annahmen über diese Veränderlichkeit bestätigt. Wächst nämlich a und e mit der Temperatur, und besonders a für die kleinern Werte rascher als für die gröfsern, so mufs mit steigender Temperatur auch das Spektrum der Gase sich mehr und mehr dem kontinuierlichen Spektrum der festen Körper nähern.

Das ist in der That der Fall. Zunächst zeigte Frankland[1]), dafs eine Wasserstoffflamme, welche in Luft verbrannt kaum leuchtet, in Sauerstoff von 10 Atmosphären Druck verbrannt hell leuchtet und ein ganz kontinuierliches Spektrum liefert. Dann habe ich für alle von mir untersuchten Gase mit dem Induktionsstrome ein solches kontinuierliches Spektrum erhalten, in welchem in den meisten Fällen die Linien des Linienspektrums nicht mehr sichtbar waren[2]). Man erhält diese Spektra, indem man gleichzeitig in den Induktionsstrom eine Leydner Flasche einschaltet, und dann in den Spektralröhren den Gasen einen solchen Druck gibt, dafs der elektrische Funke noch eben hindurchgeht. Da dann momentan eine sehr grofse Elektricitätsmenge im Funken durch das Gas hindurchgeht, so ist, wie im 4. Bande nachgewiesen wird, die Temperatur desselben eine sehr hohe.

Am vollständigsten gelang die Darstellung eines ganz kontinuierlichen Spektrums von den einfachen Gasen bei dem Wasserstoff, durch welchen ich bei den damals gewählten Dimensionen des Spektralrohrs den Funken bis zu einem Drucke des Gases von zwei Atmosphären hindurchsenden konnte. Das Spektrum war bei diesem Gasdrucke blendend hell und zwischen den Grenzen H_α und H_γ, also von der Fraunhoferschen Linie C bis ungefähr G absolut kontinuierlich, mit nur wenig anders verteilter Helligkeit wie in dem Spektrum der festen Körper. Gerade das Wasserstoffspektrum ist sehr geeignet, um das allmähliche Anwachsen von a und das raschere Anwachsen von a für jene Wellenlängen, für welche es in niederen Temperaturen den kleinern Wert hat, zu erkennen. Bei geringern Gas-

[1]) *Frankland*, Liebigs Annalen VI. Supplementband.
[2]) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVII und Bd. CXLIV.

drucken, also schwächeren Funken, besteht das Spektrum aus den früher erwähnten drei Linien H_α, H_β, H_γ; wächst der Druck, nehmen also die Funken an Stärke zu, dann treten zunächst die in der Nähe von H_β und H_γ liegenden Wellen hinzu, indem die hellen Linien sich verbreitern. Dann bildet sich, während die hellen Linien immer breiter werden, ein schwach helles Feld von der roten Grenze des Bandenspektrums bis H_β, auf welchem indes die Schattierungen des Bandenspektrums nicht vorhanden sind, da es immer nur eine äußerst dünne Schicht ist, welche leuchtet, also hier die geringen Unterschiede in den Werten von $\mathfrak{a}$, welche bei dicken Schichten die Schattierungen bewirken, nicht merkbar sein können[1]). Bei weiter zunehmendem Drucke verbreitert sich dann auch H_α nach der brechbarern Seite hin, es treten also nach und nach die zwischen H_α und dem Beginn des Bandenspektrums liegenden Wellenlängen hinzu, und war der Druck des Gases bis auf 560^{mm} gestiegen, so war das Spektrum von H_α bis H_γ kontinuierlich beleuchtet, aber die Maxima der Helligkeit befanden sich noch an der Stelle der drei Linien H_α, H_β, H_γ.

Wächst der Druck von da ab weiter, so nimmt die Helligkeit der zwischen den Maximis liegenden Teile des Spektrums sehr viel stärker zu als jene der Maxima, und gerade dadurch geht das Spektrum in das fast vollkommen kontinuierliche über, welches bei dem Drucke von 1300^{mm} erreicht wird; unter diesem Drucke leuchtet der Wasserstoff im Gelben derartig hell, daſs, wie § 47 erwähnt wurde, das Spektrum die Natriumlinie dunkel zeigt, infolge der Absorption des Lichtes in dem aus dem Glase verdampfenden Natrium.

Ziemlich ähnlich ist der Verlauf der Erscheinungen im Sauerstoff, indes tritt hier bei der bisher von mir erreichten Temperatur das volle Kontinuierlichwerden des Spektrums nur im Roten und Gelben ein, in dem übrigen Teil des kontinuierlichen Spektrums, im Grün, Blau und Violett, bleiben die hellen Linien mit aller Schärfe bestehen.

Bei dem Stickstoff verhielt sich die Erscheinung insofern anders, als die sämtlichen Linien des Stickstoffspektrums auf dem kontinuierlichen Spektrum scharf sichtbar blieben.

In wieder etwas anderer Weise entwickelte sich das kontinuierliche Spektrum bei den kohlehaltigen Gasen, wie Kohlensäure; die Helligkeit entwickelte sich an allen Stellen ziemlich gleichmäſsig, ohne daſs eine Verbreiterung der Linien des Linienspektrums auftrat, so daſs schlieſslich die hellen Linien vor dem Hintergrunde nicht mehr hervorragten, sie versanken gewissermaſsen in dem hellen kontinuierlichen Spektrum.

Die Erfahrung zeigt also ganz der Theorie entsprechend, daſs die

[1]) Ich hebe diesen Umstand besonders hervor, weil er ein Beweis gegen die von *Zöllner* (Poggend. Annal. Bd. CXLVII) ausgesprochene und auch von ihm (Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1873) gegen meine Bemerkung (Poggend. Ann. Bd. CXLVII) aufrecht erhaltene Ansicht ist, daſs der Übergang in das ganz kontinuierliche Spektrum nicht lediglich Folge der gesteigerten Temperatur, sondern zum Teil Folge der zunehmenden Gasdichte sei. Ich kann, gerade wegen dieses Umstandes, der zunehmenden Dichte keinen andern Einfluſs als den zuschreiben, daſs sie die Funken erst dann zustande kommen läſst, wenn die Elektricität in der Leydner Flasche eine groſse Dichtigkeit erhalten hat, somit bewirkt, daſs immer gröſsere Elektricitätsmengen in dem einzelnen Funken übertreten.

Spektralerscheinungen eines und desselben Körpers, je nach der Dichte oder Dicke und Temperatur der strahlenden Schicht, sehr verschieden sein können. Eine ins Einzelne gehende Ableitung der beobachteten Erscheinungen ist nicht eher möglich, als bis man gesondert die Abhängigkeit von *e* und *a* untersuchen kann, was deshalb sehr schwierig ist, weil wir bis jetzt noch kein Mittel haben, um bei konstant erhaltener Temperatur die Dicke oder Dichte der strahlenden Schicht, oder bei konstant erhaltener Dichte die Temperatur derselben willkürlich zu ändern.

Nach den letzten Erfahrungen könnte es zweifelhaft sein, ob die von Kirchhoff gezogenen Schlüsse über die Beschaffenheit der Sonnenatmosphäre aus den hellen Linien der Metallspektra ihre volle Sicherheit bewahren, da wir Temperatur und Dichte der Sonnenatmosphäre nicht kennen. Die Schlüsse bleiben indes vollkommen sicher, denn die Annahme, daſs die dunklen Linien durch den Dampf eines bestimmten Metalles erzeugt werden, basiert auf der vollständigen Koincidenz der Fraunhoferschen mit sämtlichen bekannten für das betreffende Metall charakteristischen Linien. So hat Kirchhoff auf das Vorhandensein von Eisen durch die Übereinstimmung von mehr als 60 Linien geschlossen, eine Übereinstimmung, welche Ångström und Thalén[1]) sogar für 450 Linien nachgewiesen haben. Ähnlich in andern Fällen. Anstatt an der Existenz der betreffenden Metalle in der Sonne zu zweifeln, wird man vielmehr zu der Annahme berechtigt sein, daſs in der Sonnenatmosphäre, dort, wo die Absorptionen stattfinden, die Temperatur und Dichte herrscht, welche die betreffenden Linien erzeugt.

§ 51.

Theorie der Absorption. Schon bei Beginn der Behandlung der Emissionserscheinungen haben wir darauf hingewiesen, daſs die neuern Anschauungen betreffs der Fortpflanzung des Lichtes in den durchsichtigen Körpern und speciell die Helmholtzsche Dispersionstheorie auch eine Theorie der Absorption des Lichtes enthalten. In ihren Grundzügen ist dieselbe Theorie der Absorption des Lichtes schon früher und zwar zuerst wohl von Stokes[2]) ausgesprochen, der gegenüber der frühern von dem Baron von Wrede[3]) durchgeführten Absorptionstheorie, welche wir des historischen Interesses wegen im nächsten Abschnitt kurz besprechen werden, darauf hinwies, daſs die Absorption des Lichtes dadurch zustande käme, daſs die in die Körper eindringende Bewegung an die Moleküle der Körper übergehe, und dadurch als Licht verloren gehe. Stokes hat ebenfalls schon auf Grund dieser Anschauungen den Zusammenhang zwischen der Absorption und der Emission des Lichtes erkannt und sehr bald nachdem Kirchhoff den Satz über das Verhältnis zwischen Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen entwickelt hatte, gezeigt, daſs man im groſsen und ganzen diesen Satz aus dem von ihm vorausgesetzten Mechanismus der Absorption ableiten kann[4]).

Der Gedankengang von Stokes dabei war folgender. Die Aussendung des Lichtes hat jedenfalls in einer periodischen Bewegung der Körpermoleküle

[1]) *Ångström* und *Thalén*, Spectre solaire. Berlin bei Dümmler 1869.
[2]) *Stokes*, Poggend. Annal. Ergänzungsband IV. p. 322 ff.
[3]) *Wrede*, Poggend. Annal. Bd. XXXIII.
[4]) *Stokes*, Annales de chim. et de phys. III. Série T. LXII. p. 191.

ihren Grund, welche sich dem umgehenden Äther mitteilt; die Aussendung einer bestimmten Lichtqualität seitens einer Flamme beweist daher, dafs die Moleküle der Flamme in einer bestimmt periodischen Bewegung schwingen. Glühender Natrinmdampf, welcher gelbes der Linie D entsprechendes Licht aussendet, wird daher eine ebensolche periodisch schwingende Bewegung haben, seine Teilchen werden eine der des Äthers im gelben Licht gleiche Oscillationsdauer haben. Die Teilchen des mit rotem Lichte leuchtenden Lithiumdampfes werden dagegen eine dem roten Licht gleiche Oscillationsdauer haben. Wenn nun in eine solche Flamme Licht eindringt, dessen Schwingungsdauer ganz dieselbe ist, wie die der Moleküle der Flamme, dessen Intensität aber gröfser ist als die des von der Flamme erzeugten, so wird die Bewegung des eindringenden Lichtes sich mit derjenigen des in der Flamme enthaltenen Äthers zusammensetzen. Die Bewegung des Äthers wird dann, da derselbe in der Flamme jedenfalls in allen Phasen der Bewegung ist, durch Interferenz teils geschwächt, teils an den Stellen, wo die in der Flamme vorhandene und die ankommende Bewegung gleicher Phase ist, verstärkt. Es wird daher infolge dieser Interferenz in der Flamme weder eine Verstärkung noch eine Schwächung des Lichtes eintreten, es würde, wenn keine andern Umstände hinzuträten, die Summe des in die Flamme eindringenden und des von der Flamme erzeugten Lichtes die Flamme verlassen. Nun aber wird an den Stellen, wo die Bewegung des Äthers verstärkt wird, diese Bewegung auch ganz gleicher Phase mit dem an der Stelle vorhandenen Körpermoleküle sein, dessen Bewegung an dieser Stelle Ursache der in der Flamme erregten Lichtbewegung war. Da nun die neben einander liegenden Äther- und Körpermoleküle sich zugleich und nach gleicher Richtung bewegen, das Äthermolekül infolge seiner der gröfsern Intensität des eindringenden Lichtes entsprechenden Bewegung aber rascher, so werden die Moleküle an einander stofsen und dadurch das Äthermolekül an Bewegung verlieren. Da die Perioden der Bewegung ganz gleich sind, so wird sich bei jeder Schwingung der Stofs wiederholen und so das Ätherteilchen von seiner Geschwindigkeit immer mehr verlieren. Dieser Verlust geht an das Körpermolekül über, und erhöht, wie in der Wärmelehre gezeigt wird, die Temperatur der Flamme; indes wird diese Temperaturerhöhung je nach dem Verhältnis der Massen des Äthers und der Körpermoleküle nicht gerade bedeutend sein müssen. Der Erfolg mufs daher sein, dafs das in die Flamme eindringende Licht, welches mit dem der Flamme die gleiche Oscillationsdauer hat, in der Flamme geschwächt, dafs es dort absorbiert wird.

Anderes in die Flamme eindringendes Licht wird dagegen nicht merklich geschwächt werden; denn sind die Schwingungsperioden nicht gleich, so werden die Stöfse bald in dem einen, bald in dem andern Sinne erfolgen, die Wirkung wird daher bald beschleunigend, bald verzögernd sein und der Erfolg ist, dafs die eindringende Bewegung keine merkliche Störung erfährt. Solches Licht kann daher in der Flamme nicht merklich absorbiert werden.

Schärfer noch als aus diesen Entwicklungen von Stokes folgen die Erscheinungen der Absorption und der Beziehung zwischen dem Absorptionsvermögen und der Emission aus der Theorie der Absorption von Helmholtz, die in der Dispersionstheorie desselben enthalten ist. Wir erhielten im § 23 für den Absorptionskoefficienten k die Gleichung



$$k = \varkappa \frac{2\pi}{\lambda},$$

für $\varkappa$, den Absorptionskoefficienten für die Strecke einer Wellenlänge dividiert durch 2π, die Gleichungen

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = -\Sigma P \lambda^2 + \Sigma Q \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2 \lambda^2}$$

$$2 n \varkappa = \Sigma Q \frac{\alpha \lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2 \lambda^2},$$

worin n den Brechungsexponenten des absorhierenden Körpers, P und Q Konstanten, λ_m die Wellenlänge der Schwingungen bedeutet, welche die Körpermoleküle infolge ihrer eigenen Elasticität und der durch die Wechselwirkung der Äthermoleküle und der Körpermoleküle bedingten elastischen Kraft vollführen würden, wenn sie ohne Widerstand sich bewegten, und die Gröfse α dem Reibungskoefficienten der Schwingungen der Körpermoleküle proportional ist. Das Zeichen Σ bedeutet, dafs die Ausdrücke soviel Glieder gleicher Form mit den entsprechenden Konstanten haben, als der Körper verschiedenartige, das heifst mit verschiedenen Schwingungsdauern begabte Moleküle enthält.

Die aus den Differentialgleichungen sich ergebenden Gleichungen für die Bewegung des Lichtes in den Körpern wurden im § 23 sofort unter der Annahme gebildet, dafs auf gleichen Strecken des durchstrahlten Körpers auf die körperlichen Moleküle immer der gleiche Bruchteil der ankommenden Bewegung übergehe, oder dafs stets die Absorption der Intensität des Lichtes proportional sei, indem wir für die Amplitude a, welche die Bewegung des Äthers hat, nachdem das Licht die Strecke x des Körpers durchstrahlt hat, schrieben

$$a = A e^{-kx}.$$

Da die Intensität des Lichtes proportional dem Quadrate der Amplitude ist, so folgt, wenn wir die Intensität des ankommenden Lichtes mit J_0, die des Lichtes nach Durchstrahlung der Strecke x gleich J setzen,

$$J = J_0 e^{-2k \cdot x}.$$

Da wir aus unsern Entwicklungen für die Gröfse k einen reellen Wert erhielten, so ergibt sich zunächst, dafs das experimentell bestätigte Absorptionsgesetz eine unmittelbare Folge der Helmholtzschen Theorie ist, nach welcher die Absorption Folge der Abgabe der Bewegung von den Molekülen des Äthers an die Moleküle des Körpers ist. Nennen wir den Absorptionskoefficienten nach der Definition des § 45, also den Bruchteil des in einer Schicht von der Dicke eins zurückgehaltenen Lichtes $\mathfrak{a}$, so wird die Intensität J, wenn eine Schicht von der Dicke x durchstrahlt ist,

$$J = J_0 (1 - \mathfrak{a})^x,$$

somit ist

$$1 - \mathfrak{a} = e^{-2k}$$

$$\mathfrak{a} = 1 - e^{-2k}.$$

Der Absorptionskoefficient $\mathfrak{a}$ wird somit gleich null, wenn $k = 0$ ist, er wird gleich 1, alles Licht wird schon in einer Schicht von der Dicke eins

absorbiert, wie dünn wir auch die Einheit setzen, wenn $k = \infty$ wird. Während also k von 0 bis unendlich zunimmt, wächst der Absorptionskoefficient $\mathfrak{a}$ von 0 bis 1.

Unsere Gleichung für k, welche sich aus den beiden für n und k entwickelten Ausdrücken ergibt, läfst sofort erkennen, dafs der Absorptionskoefficient für ein und dieselbe Substanz von der Wellenlänge des Lichtes abhängt, und weiter, dafs er wesentlich von den zwischen den Molekülen des Körpers und des Äthers thätigen Kräften bedingt ist. Wir bekommen eine hinreichende Übersicht über die aus der Theorie sich ergebenden Folgerungen für den Wert des Absorptionskoefficienten, wenn wir den Ausdruck

$$k = \frac{\pi}{n} \Sigma Q \frac{\alpha \lambda^4}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \alpha^2 \lambda^2}$$

untersuchen, und dabei den Wert von n als konstant betrachten. Infolge der erfahrungsgemäfs nicht sehr grofsen Variabilität von n ist der Gang der Werte von k, der sich bei vorausgesetzter Konstanz von n ergibt, nur wenig von dem wirklichen Gange von k verschieden.

Zunächst zeigt uns der Ausdruck, dafs überhaupt nur eine Absorption eintritt, wenn Q von null verschieden ist. Da Q dem Quadrate von β (§ 23), also dem Quadrate der Gröfse, die das Mafs für die Wechselwirkung zwischen den Äthermolekülen und den Körpermolekülen darstellt, proportional ist, so folgt, dafs überhaupt in den Körpern nur eine Absorption stattfinden kann, wenn eine Wechselwirkung zwischen den Atomen der Körper und denen des Äthers vorhanden ist.

Weiter erkennt man, dafs im allgemeinen nur eine Absorption vorhanden sein kann, wenn die dem Reibungswiderstande δ der Gleichungen des § 23 proportionale Gröfse α von null verschieden ist, denn für $\alpha = 0$ wird auch der Wert von k im allgemeinen gleich null. Nur für alle die Wellenlängen λ ist das nicht der Fall, welche den überhaupt in dem Körper vorkommenden Werten von λ_m gleich sind, welche also den verschiedenen Schwingungsdauern der körperlichen Atome entsprechen. Denn für jedes $\lambda = \lambda_m$ wird der Ausdruck für k

$$k = \frac{\pi}{n} Q \frac{\lambda_m^2}{\alpha},$$

derselbe erhält somit für $\alpha = 0$ einen unendlich grofsen Wert. Im Falle also die Moleküle ohne Widerstand schwingen, ist das Absorptionsvermögen für die Wellen, deren Schwingungsdauer gleich ist der Schwingungsdauer der körperlichen Moleküle, gleich eins, für alle übrigen Wellen gleich null. Derartige Medien können somit nur scharfe dunkle Linien zeigen, wenn man das durch sie hindurchgehende Licht mit dem Prisma analysiert, und zwar so viele dunkle Linien, als in denselben Moleküle mit besondern Schwingungsdauern vorhanden sind.

Für solche Medien erhalten wir daher unmittelbar den Kirchhoffschen Satz, dafs ein Medium gerade jene Wellen absorbiert, welche es selbst aussendet, und nur diese, denn das glühende Medium kann nur Wellen aussenden, die den Schwingungen der Moleküle entsprechen.

Dafs in dem Falle die eindringende Bewegung ganz vollständig an die körperlichen Moleküle übergeht, ergibt auch der im § 23 entwickelte Aus-



druck für das Verhältnis der Amplituden der Körpermoleküle B und der Äthermoleküle A an der Eintrittsstelle des Lichtes. Derselbe war

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\lambda_m^2\lambda}{\alpha}\,\sin\psi = \frac{\beta}{4\pi^2\zeta^2 m}\,\frac{\lambda_m^2\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2}},$$

ein Ausdruck, der ebenso für $\lambda = \lambda_m$ und $\alpha = 0$ unendlich grofs wird.

Insoweit im Spektrum des Lichtes, welches durch Gase hindurchgeht, sich nur einzelne dunkle Linien zeigen, würde man dieselben für Medien halten müssen, in denen die Moleküle ohne Widerstand schwingen.

Ist α nicht gleich null, so erstreckt sich die Absorption stets auf breitere Streifen des Spektrums. Für jede einzelne Molekülart erhält der Ausdruck

$$k = \frac{\pi}{n}\,Q\,\frac{\alpha\lambda^4}{(\lambda^2-\lambda_m^2)^2+\alpha^2\lambda^2}$$

seinen Maximalwert, wie wir bereits im § 29 ableiteten für

$$\lambda_1^2 = \frac{\lambda_m^4}{\lambda_m^2 - \frac{\alpha^2}{2}}.$$

Die Wellenlänge entspricht einer etwas gröfsern Schwingungsdauer, als wenn die Moleküle ohne jeden Widerstand schwingen, indes entspricht die Schwingungsdauer fast genau jener, welche die Körpermoleküle bei dem vorhandenen Widerstande der Reibung besitzen. Wir können die Gleichung für λ_1 zunächst schreiben

$$\lambda_1^2 = \frac{\lambda_m^2}{1 - \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{1}{\lambda_m^2}}$$

$$\frac{\lambda_m^2}{\lambda_1^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{1}{\lambda_m^2}.$$

Ersetzen wir α durch seinen im § 23 definierten Wert,

$$\alpha = \frac{\delta}{2\pi m\zeta}\cdot\lambda_m^2,$$

worin δ den Widerstand der Reibung bedeutet, und setzen gleichzeitig

$$\frac{\lambda_m^2}{\zeta^2} = T_m^2 \qquad \frac{\lambda_1^2}{\zeta^2} = T_1^2,$$

worin T_m und T_1 die Schwingungsdauer der Wellen λ_m und λ_1 bedeuten, so wird

$$\frac{T_m^2}{T_1^2} = 1 - \frac{\delta^2}{2m^2}\cdot\frac{T_m^2}{4\pi^2}.$$

Wie wir bereits § 23 hervorhoben, ist

$$\frac{4\pi^2}{T_m^2} = \frac{\beta+\gamma}{m},$$

somit

$$\frac{T_m^2}{T_1^2} = \frac{\beta+\gamma-\frac{\delta^2}{2m}}{\beta+\gamma}.$$

Für die Schwingungen der körperlichen Moleküle, im Falle der Äther nicht durch eindringendes Licht in Schwingungen versetzt wird, also die Verschiebung der Ätherteilchen gleich null ist, erhielten wir im § 22 als Bewegungsgleichung der körperlichen Moleküle

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{(\beta+\gamma)}{m}\,y - \frac{\delta}{m}\,\frac{dy}{dt},$$

eine Gleichung, die wir bereits im § 60 des ersten Bandes behandelt haben unter der Form

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f^2\varphi - 2e\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Für die Schwingungsdauer T', da wir jetzt Hin- und Hergang als Schwingungsdauer bezeichnen, erhielten wir damals

$$\sqrt{f^2 - e^2} = \frac{2\pi}{T'};$$

oder in unseren jetzigen Zeichen, da

$$\frac{\beta+\gamma}{m} = f^2 \quad \frac{\delta}{m} = 2e,$$

wird die Schwingungsdauer der mit dem Widerstande δ schwingenden Moleküle gegeben durch .

$$\frac{4\pi^2}{T'^2} = \frac{\beta+\gamma-\frac{\delta^2}{4m}}{m}.$$

Es wird also

$$\frac{T_m^2}{T'^2} = \frac{\beta+\gamma-\frac{\delta^2}{4m}}{\beta+\gamma}.$$

Wie man sieht unterscheidet sich die Schwingungsdauer der stärkst absorbierten von der Dauer der unter Widerstand schwingenden Moleküle nur dadurch, dafs im letzten Gliede anstatt der 4 eine 2 im Nenner steht. Auch in dem Falle stimmen somit die Schwingungsdauern der am stärksten absorbierten Strahlen fast genau mit den Eigenschwingungen der Körpermoleküle überein, oder der Kirchhoffsche Satz gilt nicht nur für die Medien, in welchen die Moleküle ohne Widerstand schwingen, sondern derselbe gilt allgemein.

Sobald aber α nicht gleich null ist, erstreckt sich die Absorption von dem Maximum aus nach beiden Seiten, und zwar um so weiter, je gröfser α ist, gleichzeitig wird aber die Absorption an den Stellen der stärksten Absorption eine geringere. Nach dem Durchtritt des Lichtes durch solche Medien müssen somit im Spektrum breitere und weniger dunkle Absorptionsstreifen entstehen.

In den festen und flüssigen Körpern ist der Widerstand, den die Moleküle bei ihrer Bewegung finden, ohne Zweifel erheblich gröfser als bei den Gasen, und bei letztern mufs mit der gröfsern Dichtigkeit der Widerstand wachsen. Deshalb liefern feste und flüssige Körper stets breitere Absorptionsbänder, die Gase dagegen nur schmale Streifen oder Linien, die mit zu-

nehmender Dichte des Gases sich verbreitern müssen, wie es die Erfahrung ergeben hat.

Die Beziehung zwischen den Brechungsexponenten und der anomalen Dispersion, welche die Theorie gibt, haben wir bereits im § 29 besprochen, wir fügen hier nur hinzu, dafs Ketteler für die von ihm untersuchten Flüssigkeiten auch die Werte der Absorptionskoefficienten bestimmt hat[1]) und dafs er so die Theorie der Absorption und Dispersion in ihrem Zusammenhang bestätigt hat. Sehr interessant würde es sein, auch die Brechungsexponenten schwach absorbierender Flüssigkeiten zu bestimmen, in denen α einen erheblich höhern Wert haben mufs als in den stark absorbierenden anomal dispergierenden Substanzen. Da in den schwächer absorbierenden Substanzen sich Absorptionsstreifen in Mitten des sichtbaren Spektrums zeigen, mufs in diesen auch λ_m dem sichtbaren Spektrum angehören, da eine Absorption aufserhalb des Spektrums, das heifst ein Wert von λ_m, der einer kleinern Schwingungsdauer entspricht als den sichtbaren Wellen, nur eine von dem violetten Ende nach dem roten allmählich abnehmende Absorption liefern könnte. Damit mufs dann auch in schwach absorbierenden Flüssigkeiten ein eigentümlicher Gang der Brechungsexponenten vorhanden sein, der von dem der farblos durchsichtigen Medien verschieden ist.

Die Änderung der Absorption mit der Temperatur, wie sie sich aus den Versuchen Brewsters ergab, und wie ich sie zur Erklärung der Doppelspektra benutzte, widerspricht der Theorie ebenfalls nicht, da wir in der Wärmelehre sehen werden, dafs Steigerung der Temperatur eine Lockerung der Moleküle zur Folge hat, wodurch sowohl die Elasticität derselben, als auch die Reibung sich ändern müssen, also die Werte von λ_m und α andere werden.

Lommel[2]) hat die Helmholtzsche Theorie der Absorption noch weiter geführt, indem er die vereinfachende Voraussetzung fallen liefs, dafs die durch die Verschiebung der Atome innerhalb der Moleküle geweckte Elasticität einfach der Verschiebung proportional sei. Da indes die Resultate Lommels sich nicht wesentlich von den vorgeführten unterscheiden, so genügt es, hier auf die Arbeit Lommels hingewiesen zu haben, um so mehr, da wir im § 54 doch noch auf dieselbe zurückkommen müssen.

§ 52.

Fluorescenz. Die an die Körpermoleküle übergehende Bewegung gibt, abgesehen von der im nächsten Bande zu besprechenden Erwärmung der Körper, zu einer Reihe von Erscheinungen Anlafs, es sind die Fluorescenz, die Phosphorescenz und die chemischen Wirkungen des Lichtes. Die Fluorescenz wurde von Brewster[3]) und Herschel[4]) entdeckt und von dem ersteren innere, von dem letztern epipolische Dispersion genannt.

---

[1]) *Ketteler,* Wiedem. Annal. Bd. XII.

[2]) *Lommel,* Wiedem. Annal. Bd. III.

[3]) *Brewster,* Edinburgh Transactions vol. XII. p. 542. Report on the eight Meeting etc. of the British Association 1838 p. 10. On the decomposition and dispersion of light. Edinb. Transact. 1846. Poggend. Annal. Bd. LXXIII. p. 531.

[4]) *Herschel,* Philosophical Transactions. 1845 p. 143. On the epipolic dispersion of light. a. a. O. p. 147.

Wenn man eine Lösung von schwefelsaurem Chinin in mit wenig Schwefelsäure angesäuertem Wasser im durchgelassenen Lichte betrachtet, so zeigt sie, obwohl vollkommen durchsichtig und farblos wie Wasser, an der Oberfläche, durch welche das Licht in die Flüssigkeit eintritt, eine sehr schöne himmelblaue Farbe.

Am besten dient zur Betrachtung dieser und der demnächst mitzuteilenden Erscheinungen ein parallelepipedisches Glasgefäfs, das man sich selbst aus Glasplatten, die man mit Schellack oder Hansenblase zusammenkittet, herstellt. In einem solchen hat das Licht zu der Flüssigkeit von allen Seiten Zutritt, und will man es etwa von einer oder mehreren Seiten abhalten, so kann man das leicht durch Bedecken der Glaswand mit schwarzem nicht glänzenden Papier.

Der blaue Schein dringt nicht tief in die Flüssigkeit ein, nach dem Durchgange durch die oberflächliche Schicht hat das Licht, obwohl nicht merklich geschwächt und gefärbt, das Vermögen zur Hervorbringung desselben Effekts verloren.

In einem Versuche, bei dem Sonnenlicht auf die Flüssigkeit fiel, drang der blaue Schein bis etwa ein Centimeter weit in die Flüssigkeit ein. Wurde das „epipolisch dispergierte Licht" mittels eines Prisma untersucht, so zeigte es sich zusammengesetzt aus Licht sehr verschiedener Brechbarkeit; das weniger brechbare Ende des Spektrums fehlte indes.

Bei Brewsters Versuchen wurde Sonnenlicht angewandt, und der mit einer Linse kurzer Brennweite erzeugte Lichtkegel in die zu untersuchende Flüssigkeit hineingeleitet, so dafs der Brennpunkt der Linse sich im Innern der Flüssigkeit befand. Es zeigte sich bei diesen Versuchen, dafs bei einer Chininlösung das Licht sich nicht nur an der Oberfläche der Flüssigkeit bemerkbar machte, dort, wo der Lichtkegel in dieselbe eintritt; es leuchtet vielmehr der ganze Lichtkegel in diesem eigentümlichen schwach blauen Lichte, jedoch mit abnehmender Intensität, je tiefer er in die Flüssigkeit eindringt.

Nach Brewsters Versuchen zeigen eine ganze Anzahl von flüssigen und auch festen Körpern ganz ähnliche Erscheinungen. Wenn man von der gereinigten und dann zerkleinerten Rinde der Rofskastanie (Aesculus hippocastanum) einen wäfsrigen oder alkoholigen Aufgufs macht, so zeigt dieser in gleicher Weise durch einen Lichtkegel beleuchtet einen ähnlichen schön blau leuchtenden Kegel. Das Wasser oder der Alkohol extrahiert aus der Rinde das Aesculin, und dieses ist es, was die Färbung des Lichtkegels veranlafst, wie gleiche Behandlung einer Aesculinlösung, welche wie die Chininlösung wasserklar ist, beweist.

Lösungen von Chlorophyll sind frisch bereitet in nicht zu dicken Schichten grün; im Tages- oder Sonnenlicht betrachtet, erscheinen sie jedoch rotbraun, und bringt man nach Brewsters Methode einen Lichtkegel hinein, so ist derselbe blutrot.

Curcumatinktur, im durchgehenden Lichte hellbraun, erscheint an der Oberfläche grün und der Lichtkegel ist ebenfalls grün mit einem Stich ins Gelbe.

Ein Würfel von Flufsspath ist im gewöhnlichen Tageslichte ganz klar, wirft man einen Lichtkegel hinein, so erscheint derselbe sanft violettblau.

Uranglas erscheint im durchgehenden Lichte gelb, an der Oberfläche

mit grünem Schiller und mit einem Lichtkegel untersucht, erscheint derselbe hellgrün.

Bei den Herschelschen Versuchen zeigte nur die Oberfläche jenen blauen Schein, er glaubte daher die Erscheinung so erklären zu können, dafs die Flüssigkeit für die blauen Strahlen weniger durchgängig wäre als für die übrigen, und dafs also die blauen Strahlen eine Zerstreuung an der Vorderfläche der Flüssigkeit erführen, während Brewster, der mit dem Sonnenlichte jenen Kegel erhielt, die Erscheinung als einen besondern Fall der Farbenzerstreuung im Innern der Flüssigkeit auffafste.

Durch diesen Widerspruch zwischen den beiden ausgezeichneten Physikern veranlafst, nahm Stokes[1]) die Frage wieder auf und brachte in einer umfangreichen und gründlichen Untersuchung dieselbe zu einem ersten Abschlufs, indem er den Nachweis lieferte, dafs wir in dieser Erscheinung eine eigentümliche Wirkung des von den betreffenden Körpern absorbierten Lichtes wahrnehmen. Er schlug für dieselbe den Namen der Fluorescenz des Lichtes vor, da die Erscheinung zuerst im Flufsspath (Fluorcalcium) beobachtet ist. Dieser Name ist jetzt allgemein angenommen.

Stokes wurde sofort auf einen merkwürdigen Umstand bei dieser Erscheinung aufmerksam, dafs nämlich im gewönlichen Tages- und auch Sonnenlicht die bei der Chininlösung blau gefärbte Schicht nur eine sehr geringe Dicke hat, dafs also das Licht sehr bald beim Eindringen in die Flüssigkeit die Fähigkeit verliert, den blauen Schein hervorzurufen, während man andererseits den blauen Schein durch eine Flüssigkeitsschicht von mehreren Zollen wahrnehmen kann. Noch auffallender zeigt sich die Erscheinung, wenn man mit einer Linse Sonnenstrahlen, welche bereits durch eine Chininlösung hindurchgegangen sind, und welche sich dem äufsern Ansehen nach gar nicht geändert haben, in Form eines Lichtkegels in eine zweite Chininlösung hineinleitet. Es tritt dann weder der blaue Schein an der Oberfläche auf, noch auch zeigt der Lichtkegel jene blaue Färbung. Wenn man aber Sonnenstrahlen direkt in eine Chininlösung leitet, und so den blauen Schein und Lichtkegel erzeugt, und dann die Erscheinung durch eine mehrere Centimeter dicke Schicht von Chininlösung betrachtet, so sieht man den eigentümlichen Schein und die blaue Färbung des Kegels gerade so, wie beim direkten Anblick.

Bei den sonstigen Licht- und Farbenerscheinungen zeigt sich bei derartiger Beobachtungsweise ein solcher Unterschied nicht, bei der Untersuchung eines Körpers im farbigen Lichte ist es einerlei, ob wir den Körper mit dem farbigen Lichte beleuchten, oder ob wir den beleuchteten Körper durch ein farbiges Mittel betrachten. Denn ein jedes derartiges Zwischenmittel hält nur Strahlen einer bestimmten Wellenlänge auf, und deshalb sehen wir den Körper immer nur mit den nicht von dem Zwischenmittel fortgenommenen Strahlen beleuchtet, ob wir dieselben fortnehmen, ehe das Licht den Körper trifft, oder aus dem von dem Körper wieder ausgesandten Lichte. Da sich nun aber bei der Chininlösung in dieser Beziehung ein Unterschied zeigt, so folgt, dafs das bei der Fluorescenz erscheinende Licht verschieden ist von dem, welches die Fluorescenz hervorrief.

---

[1]) *Stokes*, On the change of refrangibility of light. Philosoph. Transactions for 1852. p. 463. Poggend. Annal. Ergänzungsband IV.

Ein ähnlicher Unterschied zeigte sich bei der Betrachtung der Chininlösung und anderer fluorescierender Substanzen, wenn man dieselben durch Licht beleuchtete, welches durch farbige Gläser oder Flüssigkeiten hindurchgegangen war, und wenn man die direkt beleuchteten Substanzen durch solche Gläser oder Flüssigkeiten betrachtete.

So sah Stokes, wenn er in einem dunklen Zimmer, in welches nur durch einen Spalt im Fensterladen Licht eintrat, ein zur Hälfte mit Chininlösung gefülltes Reagenzglas, das bis auf ein kleines Loch rings mit schwarzem Papier umgeben war, so gegen den Spalt hielt, dafs das Licht durch die Öffnung in die Flüssigkeit fiel, nahe der Öffnung den blafsblauen Bogen. Brachte er nun vor den Spalt ein rauchfarbenes Glas, so dafs das Licht, ehe es in die Chininlösung eintrat, das Glas durchsetzen mufste, so verschwand der Bogen vollständig.

Betrachtete er aber die Chininlösung durch dieses Glas, so war der Bogen sichtbar, wenn auch in der Farbe etwas modificiert, mehr weifslich.

Ein blafsbraunes (flohfarbenes) Glas hatte die entgegengesetzte Wirkung, in der ersten Stellung liefs es den Bogen entstehen, in der zweiten jedoch verhinderte es die Wahrnehmung desselben. Ein gelbes Glas und ebenso ein gelblich grünes liefs den Bogen in beiden Stellungen sehen, jedoch war die Farbe desselben entschieden anders, wenn das Glas vor dem Loche, als wenn es vor dem Auge war.

Ähnliches fand Stokes, als er nach der Brewsterschen Methode mittels einer Linse einen Lichtkegel in die Flüssigkeit sandte. Derselbe verhielt sich verschieden, je nachdem die farbigen Gläser in der einen oder andern Stellung waren.

Pisko stellte in einer übersichtlichen Tabelle die Wirkungen von Gläsern und Flüssigkeiten auf fluorescierende Substanzen je nachdem sie in der ersten Stellung, vor der Flüssigkeit, oder in der zweiten, vor dem Auge, sich befinden, zusammen[1]). Folgende Angaben sind daher entnommen. Seine Methode war einfach die angegebene, das durch einen Spalt in ein dunkles Zimmer eintretende Sonnenlicht wurde mit einer Linse in die Flüssigkeit geleitet und dann das farbige Mittel entweder vor die Linse oder vor das Auge gehalten. Ersteres ist als erste, letzteres als zweite Stellung bezeichnet.

---

[1]) *Pisko,* Die Fluorescenz des Lichtes. Wien 1861.

Fluorescierende Flüssigkeit	Zwischenmittel	I. Stellung	II. Stellung
Schwefels. Chinin wasserklar, fluoresciert blau.	Tiefrotes Glas.	Verschwunden.	Verschwunden.
	Dunkelgelb. Glas.	Verschwunden.	Schwach grün.
	Tiefblaues Glas.	Zartblau wie selbstleuchtend.	Tiefblau wie das Glas.
	Einf. chroms. Kali.	Verschwunden.	Grün.
Wässerige Lösung von Aesculin. Lösung wasserklar, fluoresciert blau.	Tiefrotes Glas.	Verschwunden.	Fast verschw.
	Dunkelgelbes Glas.	Verschwunden.	Schwach grüngelb.
	Violettes Glas.	Blau, stärker als ohne Glas.	Veilchenblau.
	Einf. chroms. Kali.	Verschwunden.	Grasgrün.
Chlorophyll in Alkohol. Dunkel od. hellgrün klar, fluoresciert rot.	Tiefrotes Glas.	Schwach blutrot.	Stärker blutrot.
	Grünes Glas.	Rotbraun.	Lichtgrün.
	Kupferchlorid.	Schwach rot.	Hellgrün.
	Schwefelsaures Kupferoxyd-Ammoniak.	Rot nur wenig geschwächt.	Verschwunden.
Lakmus in Alkohol klar violett-gefärbt, fluoresciert hellbraun, Lichtkegel hellgelb.	Tiefrotes Glas.	Schwach braun.	Hellrot.
	Violettes Glas.	Schwach violett.	Rotgelb.
	Einf. chroms. Kali.	Orange.	Lichtgelb.
	Kupferchlorid.	Gelb.	Grün bis gelb.
Curcumatinktur hellbraun u. klar, fluoresciert grün.	Tiefrotes Glas.	Verschwunden.	Rot.
	Tiefblaues Glas.	Grün.	Blaugrün.
	Violettes Glas.	Grün.	Gelb.
	Dopp. chroms. Kali.	Verschwunden.	Grüngelb.
	Schwefelsaures Kupferoxyd-Ammoniak.	Grün.	Verschwunden.
Uranglas durchsichtig gelb, fluoresciert grün.	Tiefrotes Glas.	Verschwunden.	Graugrün.
	Tiefblaues Glas.	Wie ohne Glas.	Olivengrün.
	Doppelt chroms. Kali.	Verschwunden.	Gelbgrün.
	Schwefelsaures Kupferoxyd-Ammoniak.	Wie ohne Glas.	Fast verschwunden.

Durch diese Versuche ist bewiesen, dafs das bei der Fluorescenz erscheinende Licht verschieden ist von demjenigen, welches es hervorgerufen hat, und zwar, dafs der fluorescierende Körper Licht von geringerer Brechbarkeit aussendet, als er in dem auffallenden Lichte erhält.

Die dritte Kolumne unserer kleinen Tabelle zeigt, dafs fast immer die Farbe des Fluorescenzlichtes verschieden ist von der Farbe der auf die fluorescierenden Körper fallenden Strahlen; ja, dafs fast immer, welches auch die Farbe der Zwischenmittel in der ersten Stellung ist, die Fluorescenzerscheinung, wenn sie nicht verschwunden ist, fast dieselbe Farbe besitzt, als wenn das Licht ohne Zwischenmittel die Substanzen trifft. Das Chlorophyll fluoresciert rot sowohl bei direkter Bestrahlung als auch bei Anwendung des roten und grünen Glases oder des grünen Kupferchlorids oder der tiefblauen Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak. Gleiches gilt von der Curcumatinktur, welche im direkten Sonnenlichte wie nach Zwischensetzung des blauen und violetten Glases sowie der blauen Kupferlösung in grünem Lichte fluoresciert. Überall ist zugleich die Farbe des fluorescierenden Lichtes weniger brechbar als diejenige des einfallenden Lichtes.

Durch ein farbiges Mittel angesehen dagegen erscheint das Fluorescenzlicht nahezu in der Farbe des Mittels. Die Curcumatinktur z. B. erscheint rot im roten, blaugrün im blauen Glase, grüngelb in der gelben Lösung von einfach chromsaurem Kali; das durch eine blaue Lösung von Kupferoxydammoniak gegangene Licht erzeugt grünes Licht, welches aber durch eine solche Lösung nicht hindurchzugehen vermag.

Man kann diese Eigenschaft des fluorescierenden Lichtes nach der Angabe von Stokes[1]) sehr gut benutzen, um sehr schwache Spuren von Fluorescenz sichtbar zu machen. Stellt man vor den Spalt im Fensterladen eines dunklen Zimmers ein tiefblaues Glas oder eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak, so dringt in das Zimmer nur dunkelblaues Licht, sieht man dann nach der Öffnung durch ein gelbes Glas, so erscheint diese sowie das Zimmer fast ganz dunkel, da das blaue Licht durch das gelbe Glas nicht hindurch zu dringen vermag. In diesem blauen Lichte fluorescieren die meisten Substanzen, und das Fluorescenzlicht geht meist durch das gelbe Glas hindurch. Bringt man daher hinter das blaue Glas oder die blaue Lösung eine auf ihre Fluorescenz zu untersuchende Substanz und blickt auf dieselbe durch das gelbe Glas, so sieht man in dem sonst fast ganz dunklen Raume auch die schwächsten Spuren des fluorescierenden Lichtes. Meist bedarf es nicht einmal des gelben Glases zur Abhaltung des blauen Lichtes, da auch ohnedem der Raum so dunkel beleuchtet ist, dafs man das Fluorescenzlicht wahrnehmen kann.

§ 53.

Prismatische Untersuchung der Fluorescenz. Einen genauern Aufschlufs über die Frage, welches Licht die Fluorescenz erzeugt und wie die Brechbarkeit des Lichtes in der Fluorescenz geändert wird, erhielt Stokes, indem er die fluorescierenden Körper mit dem homogenen Licht des Spektrums beleuchtete und das erzeugte Fluorescenzlicht mit dem Prisma untersuchte.

[1]) *Stokes*, Poggend. Annal. Bd. XCVI. p. 523.

Stokes wandte bei dieser Untersuchung besonders drei Methoden an[1]). Bei der ersten erzeugte er mittels dreier hinter einander gestellter Prismen, die dicht hinter einander standen, ein Spektrum. Unmittelbar hinter dem letzten Prisma stand eine Linse, welche die dispergierten Strahlen auffing.

In dem Brennpunkte der Linse, in dem sich alle Strahlen kreuzen, erscheint dann ein kleines weifses Sonnenbildchen, und von ihm aus divergieren die farbigen Strahlen nach verschiedenen Richtungen als ebenso viele farbige Strahlenkegel, deren Axen in einer horizontalen Ebene liegen, und welche sich im Brennpunkt der Linse schneiden. Die zu untersuchende Flüssigkeit in einem parallelepipedischen Glasgefäfs wurde so gehalten, dafs der Brennpunkt auf die vordere Fläche der Flüssigkeit fiel.

Bei der zweiten Methode wurde in der § 26 angegebenen Weise mit Prisma und Linse ein scharfes Spektrum erzeugt, und auf die Vorderfläche der zu untersuchenden Substanz geworfen, so dafs diese die Stelle des § 26 erwähnten Papierschirmes vertrat.

Bei der dritten Methode schliefslich wurde eine kleine Linse von kurzer Brennweite in die einzelnen Teile des Spektrums gehalten, um anstatt des weifsen Lichtkegels bei Anwendung des direkten Sonnenlichtes einen homogen einfarbigen Lichtkegel auf die Substanz wirken zu lassen.

Bei der Untersuchung einer Chininlösung nach der ersten Methode sah man in derselben zwei Lichtbündel, die bei ihrem Eintritte in die Flüssigkeit von einander getrennt waren, und weiterhin noch mehr aus einander gingen.

Jedes Bündel bestand aus einer Reihe von Kegeln, deren Axen vom Brennpunkt der Linse aus divergierten. Das erste oder das durch Licht geringerer Brechbarkeit erzeugte Bündel bestand aus den hellern Farben des Spektrums in der natürlichen Ordnung; es hatte ein funkelndes diskontinuierliches Ansehen, und rührte offenbar daher, dafs das durch die Flüssigkeit dringende Licht von Staubteilchen, welche in derselben schwebten, zurückgeworfen wurde.

Das zweite Bündel war viel heller, seine Farbe, ein schönes Himmelblau, war überall gleich; allein dicht an dem dem andern Bündel zugewandten Rande, wo es aus den am schwächsten brechbaren Strahlen bestand, die es zu bilden vermochten, war die Farbe weniger rein.

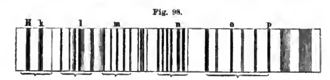
Ähnliches zeigten alle nach dieser Methode untersuchten Substanzen, bei allen trat neben dem nicht durch Fluorescenz erregten Lichtbündel das an der brechbaren Seite des Spektrums liegende fluorescierende Lichtbündel auf. Nur ein Würfel aus Flufsspath von Alston Moor liefs das erste Bündel gar nicht sehen, sondern nur das fluorescierende, jedoch trat von diesem ganz getrennt im Rot ein schwacher fluorescierender Streifen roten Lichtes auf. Untersuchte man das Licht einer Kerzenflamme, nachdem es durch einen solchen Würfel hindurchgegangen war, so zeigte es gerade an der Stelle des Spektrums, wo die rote Fluorescenz auftrat, einen dunklen Absorptionsstreifen.

Dieser Versuch zeigt, dafs es hauptsächlich die brechbarern Strahlen des Spektrums sind, welche Fluorescenz erzeugen. Noch deutlicher zeigt sich das bei einer Untersuchung nach der zweiten Methode. Wirft man

[1]) *Stokes*, Poggend. Annal. Ergänzungsband IV. p. 188–285.

das Spektrum auf ein ziemlich breites Gefäfs, das eine klare Lösung von Chinin enthält, so sieht man, dafs die minder brechbaren Farben etwa bis zur Fraunhoferschen Linie *G* ungehindert durch die Flüssigkeit hindurchgehen und nur hier und da durch Reflexion an schwebenden Staubteilchen zu sogenannter falscher innerer Dispersion Anlafs geben. Bei *G* beginnt die Fluorescenz eben merklich zu werden und die dunkle Linie *G* erscheint in der Flüssigkeit als eine dunkle Ebene, die eine Masse stetigen aber ungemein schwachen Lichtes unterbricht. In der Mitte zwischen *G* und *H* dagegen wurde das Licht heller und mehr gegen die Linie *H* hin nahm es eine blafs himmelblaue Farbe an. Das Licht begrenzt sich jedoch nicht auf den sichtbaren Teil des Spektrums, sondern geht noch weit über das violette Ende des Spektrums hinaus. In diesem Teile lassen sich eine ganze Reihe von Fraunhoferschen Linien erkennen, die das in blaugrauem Lichte leuchtende verlängerte Spektrum durchsetzen. Stokes liefert von dem Spektrum beistehende Zeichnung (Fig. 98), in der die Linie *H* mit der

Fig. 98.



Fraunhoferschen im Violetten (Fig. 67) identisch ist. Stokes teilte die Linien in Gruppen, die er mit den kleinen Buchstaben *l*, *m*, *n*, *o*, *p* bezeichnete. Die deutlichsten Linien dieser Gruppen fallen mit den schon anderweitig durch die chemische Aktion der Strahlen bekannten und mit den grofsen Buchstaben *L*, *M*, *N*, *O*, *P* bezeichneten Linien im sogenannten ultravioletten Lichte zusammen.

Aus diesem Versuche geht demnach einmal hervor, dafs in dem Sonnenlicht noch eine ganze Reihe von Strahlen gröfserer Brechbarkeit als die sichtbaren violetten Strahlen enthalten sind, und dafs es gerade diese ultravioletten Strahlen sind, welche hauptsächlich fluorescierend wirken.

Aesculinlösung, Flufsspath von Alston Moor etc. verhielten sich gerade wie Chininlösung.

Die dritte Methode diente weiter dazu, noch genauer die Wirkung der einzelnen Teile des Spektrums zu untersuchen, indem die Strahlen koncentrierter in die Flüssigkeit hineingeleitet und zugleich die übrigen Strahlen abgehalten wurden.

So zeigte sich mit dieser Methode beim schwefelsauren Chinin die Fluorescenz schon im Blau und das fluorescierende Licht gab sich als eine kleine Menge Rot zu erkennen; beim Flufsspath von Alston Moor zeigte sich die Fluorescenz hauptsächlich im brechbarern Teile des Spektrums, nur an einer bestimmten Stelle des Roten trat ein schwacher roter fluorescierender Schein auf.

Ein sehr eigentümliches Verhalten bot die frisch bereitete Lösung von Chlorophyll dar. Nach der zweiten Methode untersucht, erschienen die Fraunhoferschen Linien in dem ganzen brechbarern Teile des Spektrums als Unterbrechungen eines hellroten ins Karmoisin fallenden Grundes; bei *H*

etwa begann die Farbe ins Braune zu neigen, und die festen Linien *l*, *m*, *n*, *o* erschienen auf bräunlich rotem Grunde.

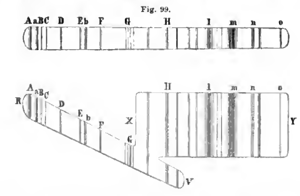
Bei der Untersuchung nach der dritten Methode trat die Fluorescenz zuerst auf in dem brechbarsten Teile des äufsersten roten Streifens, den die Flüssigkeit bei mäfsiger Dicke hindurchläfst, daneben kam ein heller roter, nur auf die Oberfläche der Flüssigkeit beschränkter Streifen. Wenn auch hier das erzeugende wie das Fluorescenzlicht rot war, so zeigte sich doch deutlich, dafs das Fluorescenzlicht dem roten Ende des Spektrums näher lag. In den orange gefärbten und gelben Teilen des Spektrums wurde die Fluorescenz schwach und erst weiterhin im Grün wurde sie stark und blieb stark über das violette Ende des Spektrums hinaus.

Es würde zu weit führen, hier alle von Stokes untersuchten Substanzen einzeln zu betrachten; es genüge, das allgemeine Resultat anzuführen, zu dem er gelangte und welches er in dem Satz ausspricht: „Stets ist im Fluorescenzlicht die Brechbarkeit kleiner als in dem die Fluorescenz erzeugenden Lichte.“

Eine prismatische Untersuchung des Fluorescenzlichtes zeigt dasselbe und zugleich, dafs, wenn auch das erregende Licht homogen war, das erregte doch stets zusammengesetzt ist. Wenn man bei der zweiten der erwähnten Untersuchungsmethoden anstatt einer Lösung von Chinin oder Aesculin ein stark mit der Lösung getränktes Papier nimmt, so erscheint auf demselben das ganze Spektrum, also auch der durch die Lösung hindurchgehende sichtbare Teil desselben. Wenn man den Spalt sehr kurz nimmt und das Spektrum durch ein Prisma mit vertikaler brechender Kante erzeugt, so erhält man ein sehr schmales Spektrum. Wenn man dann das so erzeugte Spektrum *AC* (Fig. 99) durch ein Prisma mit horizontaler brechender Kante betrachtet, so wird das Spektrum in zwei Teile zerlegt (Fig. 99).

Zunächst sieht man das abgelenkte Spektrum, welches herrührt von dem in gewöhnlicher Weise von dem Papier zerstreuten Lichte, in der

Fig. 99.



§ 18 (Fig. 50) angegebenen Weise; aufserdem sieht man aber noch ein zweites Spektrum *xy*, als Spektrum des fluorescierenden Lichtes. In diesem laufen die einzelnen Farben horizontal, und zwar in der Reihenfolge des gewöhnlichen Spektrums, oben rot, darunter gelb u. s. w., so dafs die ein-

zelnen Fraunhoferschen Linien die sämtlichen Farben durchsetzen. Das Spektrum der fluorescierenden Strahlen, von Stokes als deriviertes bezeichnet, liegt stets an der obern Seite des abgelenkten und ist somit weniger gebrochen, die roten, gelben u. s. w. Strahlen liegen in gleicher Höhe mit den Farben im abgelenkten Spektrum.

Es folgt also daraus auf das überzeugendste, dafs durch Fluorescenz die Brechbarkeit der Strahlen vermindert, und dafs durch homogenes die fluorescierende Substanz treffendes Licht zusammengesetztes Licht von kleinerer Brechbarkeit erzeugt wird.

An welcher der Fraunhoferschen Linien das derivierte Spektrum seinen Anfangt nimmt, hängt von der fluorescierenden Substanz ab, welche man wählt. Beim Chlorophyll fängt es schon beim Rot an, beim Curcumapapier bei der Linie *F*, beim Chinin und Aesculinpapier erst bei *G*, beim Uranglas schon bei der Linie *E*. Ebenso hängt davon ab, welche Farbe im derivierten Spektrum vorherrscht; beim Chlorophyll rot, beim Chinin blau, beim Uranglas grün. Das violette Ende fehlt jedoch immer, deshalb reicht das abgelenkte Spektrum stets tiefer hinab.

Wendet man anstatt der Papiere eine Lösung an, welche nur wenig zerstreutes Licht zurückwirft, so verschwindet das abgelenkte Spektrum fast ganz und man sieht nur das derivierte Spektrum.

Die Untersuchung nach der zweiten Methode macht noch auf einen wichtigen, vorhin schon erwähnten Umstand aufmerksam, der für die Theorie der Erscheinung von hoher Bedeutung ist.

Die Fluorescenz wird dort meist nur von den brechbarsten Strahlen erzeugt; untersucht man nun ein Lichtbündel prismatisch, nachdem es durch eine fluorescierende Flüssigkeit hindurchgegangen ist, so findet man, dafs die brechbarsten Strahlen von dieser ganz absorbiert sind, eine Erscheinung, welche den engen Zusammenhang zwischen Absorption und Fluorescenz zeigt, die beweist, dafs es das absorbierte Licht ist, welches die Fluorescenz hervorruft. Sehr auffallend ist dieser Satz bewiesen durch die Fluorescenz im Flufsspath von Alston Moor, in den Lösungen von Chlorophyll und im Uranglas. Nach der dritten Methode untersucht erscheinen helle Fluorescenzstreifen in den beiden ersten Substanzen an gewissen Stellen des Spektrums geringerer Brechbarkeit beim Flufsspath im Rot, beim Chlorophyll im Rot und Grün; das durchgelassene Licht mit dem Prisma untersucht, zeigt an denselben Stellen dunkle Absorptionsstreifen. Es folgt somit, dafs überall dort, wo in dem die Fluorescenz erregenden Spektrum helle Fluorescenz auftritt, im durchgelassenen Lichte ein Absorptionsstreifen sich zeigt.

Seit der für die Fluorescenzerscheinungen bahnbrechenden Arbeit von Stokes ist unsere Kenntnis der Fluorescenzerscheinungen durch eine Reihe von Untersuchungen, zunächst durch diejenigen von V. Pierre[1]) und Hagenbach[2]) erweitert, von denen der letztere 36 verschiedene Substanzen auf das genaueste untersuchte. Diese Experimentatoren benutzten zu ihren Versuchen wesentlich die prismatische Methode, d. h. sie warfen auf die

[1]) *V. Pierre*, Wiener Berichte Bd. LIII. 1866.

[2]) *Hagenbach*, Poggend. Annal. Bd. CXLI und Bd. CXLVI. Bei *Hagenbach* findet man auch eine ziemlich vollständige Litteratur, besonders der vielfachen Untersuchungen über die interessante Fluorescenz des Chlorophylls.

fluorescierende Substanz ein möglichst lineares Spektrum und untersuchten dann die entstandene Fluorescenz mit einem Prisma. Das Spektrum des Fluorescenzlichtes, in der vorhin angegebenen Weise von dem erregenden Spektrum getrennt, läfst den Ort der Fluorescenz und die Zusammensetzung des Fluorescenzlichtes auf das genaueste erkennen. Um dann stets nur die Fluorescenz der zu untersuchenden Substanz rein zu erhalten, haben sie, nach dem Vorgange Pierres, das erregende Spektrum stets direkt auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit oder auch der festen fluorescierenden Körper fallen lassen.

Von den mannigfachen Resultaten erwähnen wir zunächst die von Hagenbach gelieferte vollständige Bestätigung des wichtigsten von Stokes gegebenen allgemeinen Satzes, dafs jeder Fluorescenz eine Absorption des Lichtes entspricht.

Der innige Zusammenhang zwischen Absorption des Lichtes in fluorescierenden Substanzen und Fluorescenz tritt am deutlichsten dort hervor, wo das durch ein auf die fluorescierende Substanz geworfenes Spektrum erzeugte Fluorescenzlicht mehrere Helligkeitsmaxima hat, wie das beim Chlorophyll, dem Naphtalinrot und andern Substanzen der Fall ist. Bei einer frisch bereiteten Chlorophylllösung z. B. unterschied Hagenbach innerhalb des die Fluorescenz erregenden Spektrums deutlich 7 Maxima, deren Lage und Breite er an einer der Skala eines Spektralapparates entsprechenden Skala genau bestimmte. Er bestimmte dann mit einem Spektralapparate genau die Lage und Breite der Minima in einem durch eine ebensolche Lösung von Chlorophyll hindurchgegangenen Spektrum, und konstatierte so, dafs jedem Maximum des Fluorescenzlichts ein Maximum der Absorption genau entsprach. Dasselbe zeigte sich bei dem Naphtalinrot, welches drei Maxima der Fluorescenz zeigt, wenn man ein Spektrum auf die Oberfläche einer alkoholischen Lösung derselben wirft. Das erste liegt an der brechbarern Seite unmittelbar neben D, das zweite zwischen den Fraunhoferschen Linien E und b, und das dritte im Violetten bei H. Die Untersuchung des durch eine ebensolche Lösung hindurchgegangenen Spektrums zeigte genau an den Stellen der Maxima des Fluorescenzlichtes auch Maxima der Absorption.

Der zweite der Stokesschen Sätze, dafs die Wellenlänge des Fluorescenzlichtes nie kleiner sei als jene des erregenden Lichtes, sondern immer gröfser oder mindestens ebenso grofs, ist für die meisten fluorescierenden Substanzen leicht als richtig zu erkennen, da bei den meisten, wie es schon Stokes fand, die brechbarern Strahlen des Spektrums es sind, welche die Fluorescenz erregen, während in dem Spektrum des Fluorescenzlichtes meist die weniger brechbaren Strahlen bis etwas über G auftreten. Für diejenigen Substanzen indes, welche auch durch die weniger brechbaren Strahlen erregt werden, wie Chlorophyll und Naphtalinrot ist der Satz nicht so unmittelbar als richtig zu erkennen, und gerade für das Naphtalinrot glaubte zuerst Lommel[1]) in dem Fluorescenzlicht kleinere Wellenlängen nachweisen zu können.

Entwirft man nämlich ein Spektrum von dem Fluorescenzlicht des Naphtalinrot, so erhält man ein kontinuierliches Lichtband, welches eben

[1]) *Lommel*, Poggend. Annal. Bd. CXLIII.

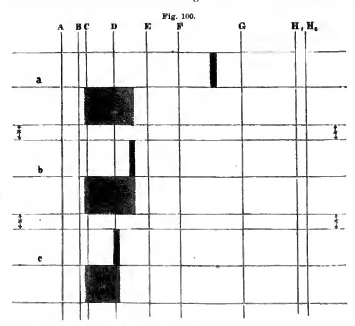
vor der Fraunhoferschen Linie *B* beginnt und bis nahe vor *E* reicht, so dafs etwa $\frac{1}{3}$ des Zwischenraumes zwischen *D* und *E* noch hell erscheinen. Wie vorhin erwähnt wurde, zeigt die durch ein Spektrum auf Naphtalinrot (oder, wie es Lommel nach der in England gebräuchlichen Bezeichnung nennt, Magdalarot) erregte Flnorescenz ein erstes Maximum nahe hei *D*, die Flnorescenz tritt aher schon auf im Orange zwischen *D* und *E*. Bei der äufserst starken Flnorescenz der alkoholischen Lösung dieses Farhstoffes kann man dieselbe schon mit künstlichem Lichte erhalten, so schon mit Natriumlicht, wie man es durch die nichtleuchtende Flamme des Bunsenschen Brenners erhält, wenn man in dieselhe eine Kochsalzperle hringt. Trotzdem dieses Licht nur Wellenlängen der Fraunhoferschen Linie *D* entsprechend aussendet, glaubte Lommel für das Spektrum des Flnorescenzlichtes genan dieselhen Grenzen zu erkennen, also eine deutliche Ausdehnung des Lichtes üher *D* hinans zu erhalten. Zu demselhen Resnltate gelangte Lommel, als er Sonnenlicht durch ein mit Kupferoxydul gefärhtes rotes Glas, welches nach seiner Angahe nur Rot nnd Orange bis nahe vor der dunklen Linie *D* durchliefs, auf die alkoholische Lösung des Naphtalinrotes wirken liefs; anch dort erhielt er dieselbe Ausdehnung des Spektrums, also eine ganze Reihe kleinerer Wellenlängen, wie sie in dem erregenden Licht vorhanden waren.

Wegen dieses Widerspruchs gegen das Stokessche Gesetz hat Hagenhach die Flnorescenz des Naphtalinrotes in dieser Richtung sorgfältig untersucht[1]). Das in das dunkle Zimmer eintretende Sonnenlicht wurde in ein reines Spektrum dispergiert, und das Spektrum durch einen schwarzen Schirm aufgefangen, der parallel der Breitenansdehnung des Spektrums einen schmalen Spalt hatte, so dafs durch diesen Spalt fast nur homogenes Licht hindurchtrat. Durch eine kleine Drehung des Prismas konnte man nach und nach bewirken, dafs die verschiedenen Lichtarten durch den Spalt hindurchtraten. Die durch den Spalt hindurchgehenden Strahlen wurden von einer Linse aufgenommen, die so gestellt war, dafs auf der freien Oherfläche der Flüssigkeit ein scharfes Bild des Spaltes entworfen wurde. Die Flüssigkeitsoherfläche war dann mit einem Streifen von weifsem gebrannten Thon teilweise hedeckt, so dafs das scharfe Bild des Spaltes zur Hälfte auf der Thonplatte, zur Hälfte auf der Flüssigkeit erschien. Betrachtete man dann das Bild des Spaltes durch ein Prisma, dessen hrechende Kante demselben parallel gestellt war, so sah man gleichzeitig das verschohene Bild des Spaltes und das Spektrum des Fluorescenzlichtes, und konnte so scharf erkennen, oh in dem Spektrum Licht vorhanden war, welches stärker ahgelenkt wurde als das Bild des Spaltes, welches also kleinere Wellenlängen hesafs als das erregende Licht. Fig. 100 *a*, *b*, *c* stellt die Erscheinung dar, wie sie beohachtet wurde. Der in jeder der Figuren ohere schwarze Streif stellt die Lage des erregenden Streifens in dem Spektrum, das jedesmal darunter angegehene dunkle Feld das Spektrum des von demselhen erregten Fluorescenzlichtes dar. So lange wie in Fig. *a* der Streifen des erregenden Lichtes ans Teilen des Spektrums genommen wurde, welche brechbarer sind als das Fluorescenzlicht, behielt das Spektrum desselben seine ganze Ausdehnung, der einzige Unterschied war nur, dafs der Zwischen-

[1]) *Hagenbach*, Poggend. Annal. Bd. CXLVI. p. 78.

raum zwischen dem erregenden Streifen und dem Spektrum des Fluorescenzlichtes um so kleiner wurde, je weniger die Brechbarkeit des erregenden Lichtes von der des Fluorescenzlichtes verschieden war. So wie aber das erregende Licht, wie in Fig. 100 *b*, den brechbarern Teil des Fluorescenzlichtes erreicht, bildet es auch die Grenze des Fluorescenzlichtes, so dafs die brechbarere Grenze in beiden eine gerade Linie bildet. Rückte man

Fig. 100.



mit dem erregenden Lichte noch weiter nach dem roten Ende des Spektrums vor, so wurde das Fluorescenzspektrum verkürzt, und sein Ende ging gleichzeitig mit dem erregenden Lichte zurück. Es sah gerade so aus, wie Hagenbach sich ausdrückt, wie wenn das Fluorescenzlicht von dem erregenden Lichte zurückgewischt wurde. Fig. 100 *c* zeigt die Erscheinung, wenn das erregende Licht innerhalb der Grenzen des Spektrums des Fluorescenzlichtes fällt.

Zu dem gleichen Resultate wie Hagenbach gelangte Lubarsch[1]) in seiner ersten Arbeit über Fluorescenz; Lubarsch fand in dieser Untersuchung folgenden interessanten Satz über die Ausdehnung des Fluorescenzspektrums, zunächst für solche Substanzen, welche ein kontinuierliches keine hervorragenden Maxima zeigendes mehr oder weniger ausgedehntes Spektrum des Fluorescenzlichtes zeigen. Das Spektrum des Fluorescenzlichtes kann nie Strahlen enthalten, deren Brechbarkeit gröfser, deren Wellenlänge also kleiner ist als jene, für welche die fluorescierende Substanz ein Maximum der Absorption zeigt. Lubarsch erkannte dieses Absorptionsmaximum dadurch, dafs er diejenige Stelle des Spektrums aufsuchte, an welcher sich in

[1]) *Lubarsch*, Poggend. Annal. Bd. CLVI.

dünnen Schichten und möglichst verdünnten Lösungen zuerst Absorption bemerkbar machte. Zeigte sich also in dieser Weise ein Absorptionsmaximum im Grün, etwa bei der Fraunhoferschen Linie E, so enthielt das Spektrum des Fluorescenzlichtes nur rot und gelb und das beginnende Grün.

Weiter kam Lubarsch zu dem Satze, dafs, wenn das erregende Licht stärker brechbar ist als die Stelle des Absorptionsmaximums, die brechbarste Grenze des Spektrums des Fluorescenzlichtes mit diesem Absorptionsmaximum zusammenfällt, nimmt man aber erregendes Licht, welches weniger brechbar ist als das Absorptionsmaximum, so fällt die brechbarste Grenze mit dem erregenden Lichte zusammen, es tritt also mit abnehmender Brechbarkeit des Lichtes das Zurückwischen des Spektrums ein.

Gegenüber den Versuchen von Hagenbach und Lubarsch hielt Lommel[1]) nach erneuerter sorgfältiger Untersuchung, indem er die Fluorescenz mit dem Lichte der Natriumflamme und mit homogenem Lichte des Spektrums hervorrief, nicht nur für das Naphtalinrot, sondern noch für eine Reihe anderer Substanzen den Satz aufrecht, dafs das Fluorescenzlicht auch Licht gröfserer Brechbarkeit haben könne als das erregende Licht, er findet, dafs jeder homogene Lichtstrahl, der überhaupt Fluorescenz erregen kann, bei dem Naphtalinrot sämtliche Strahlenarten des Fluorescenzlichtes hervorruft, sowohl diejenigen, welche eine gröfsere oder gleiche, als diejenigen, welche eine kleinere Wellenlänge besitzen.

Lommel unterscheidet infolge dessen zwei Arten von Fluorescenz[2]). Bei der von ihm als Fluorescenz erster Art bezeichneten ruft jeder erregungsfähige homogene Lichtstrahl, der vermöge seiner Brechbarkeit innerhalb der Grenzen des Fluorescenzspektrums oder eines gewissen Gebietes desselben fällt, nicht blos Strahlen von gröfserer oder gleich grofser, sondern auch solche von kürzerer Wellenlänge hervor, und zwar letztere, soweit sie dem betreffenden Gebiete angehören.

Die Körper, welche diese Fluorescenz erster Art zeigen, sind solche mit sehr starken Absorptionsstreifen, von welchen einer selbst bei grofser Verdünnung, wenn die Absorption in den übrigen Teilen des Spektrums nicht mehr wahrnehmbar ist, noch sichtbar bleibt. Diese Substanzen sind stets lebhaft und intensiv gefärbt, zeigen anomale Dispersion und im festen Zustande Oberflächenfarben.

Dem absoluten Maximum der Absorption entspricht im fluorescierenden Spektrum das absolute Maximum der Fluorescenz.

Bei der von Lommel als Fluorescenz zweiter Art bezeichneten ruft jeder erregungsfähige homogene Lichtstrahl nur diejenigen Strahlen des Fluorescenzspektrums hervor, welche eine gröfsere oder mindestens gleich grofse Wellenlänge besitzen als er selbst. Die Mehrzahl der bisher als fluorescierend bekannten Körper zeigt nur diese Art von Fluorescenz. Dieselben sind dadurch charakterisiert, dafs sie nur eine einseitige Absorption des brechbaren Endes des Spektrums zeigen. Sie erscheinen daher gelb, braun oder farblos, letzteres dann, wenn nur das äufserste Violett und das Ultraviolett der Absorption unterliegen.

Zu dieser Klasse von Körpern gehören indes auch solche, welche

[1]) *Lommel*, Poggend. Annal. Bd. CLIX.
[2]) *Lommel*, Wiedem. Annal. Bd. III und Poggend. Annal. Bd. CLIX.

Absorptionsstreifen besitzen, denen zugleich Maxima der Fluorescenz entsprechen, z. B. die Auszüge von Kienrufs. Diese Absorptionsstreifen erscheinen aber nach Lommel als breite verwaschene Bänder und sind keine absoluten Maxima der Absorption. Sie verschwinden nämlich bei wachsender Verdünnung sehr bald, noch ehe die Absorption des Violett aufhört wahrnehmbar zu sein. Andere Körper, wie z. B. das salpetersaure Uran zeigen scharfe Absorptionsstreifen, welche indes zur Fluorescenz in keiner Beziehung stehen.

Als fluorescierende Körper dritter Klasse bezeichnet schliefslich Lommel solche, welche beide Arten von Fluorescenz zusammen zeigen, auch dieses sind Körper mit starken Absorptionsstreifen und infolge dessen intensiver Färbung. Es gehören unter andern zur

I. Klasse	II. Klasse	III. Klasse
Chlorophyll	Thiomelansäure	Chamäleingrün
Naphtalinrot	Kienrufsauszüge	Chamäleinblau
Brasilein mit Soda	Malzzucker	Orseille
Purpurin mit Alaun	Curcumatinktur	Chamäleinrot
Eosin	Salpeters. Uran	Lacmus
Fluorescein	Schwefels. Chinin	Fluoranilin
Uranglas	Aesculin	Brasilein.
	Flufsspath	

Den von Lommel erhaltenen Resultaten stimmte Lubarsch in seinen spätern Versuchen[1]) bei, auch er nimmt an, dafs man verschiedene Arten der Fluorescenz unterscheiden müsse. Ebenso fand Brauner[2]), dafs bei Eosin- und Naphtalinlösung die grüne Fluorescenz durch Strahlen erregt werden könne, welche eine geringere Brechbarkeit besitzen. Um das Licht gröfserer Brechbarkeit anszuschliefsen benutzte Brauner die totale Reflexion; er liefs das Sonnenlicht durch ein Prisma gehen, und regulierte den Einfallswinkel so, dafs alles Licht, welches brechbarer war als das gelbe der Linie D entsprechende, total reflektiert wurde; es liefs sich dann die grüne Fluorescenz des Eosins deutlich beobachten.

Hagenbach[3]) dagegen und Lamanski[4]) haben auch gegen die neueren Versuche von Lommel, Lubarsch und Brauner die allgemeine Gültigkeit des Stokesschen Satzes aufrecht erhalten, indem sie das Auftreten von Strahlen, die scheinbar brechbarer sind als das erregende Licht, der Anwesenheit fremden Lichtes zuschreiben, welches brechbarer ist als das Fluorescenzlicht. Zwar hat später Lommel[5]) die Versuche Hagenbachs und die ersten Versuche Lamanskis als nicht beweisend darzustellen versucht, indes sind die Einwürfe Lommels doch nicht so schlagend, dafs man die Frage als abgeschlossen bezeichnen kann. Man wird nach den Versuchen Lommels die allgemeine Gültigkeit des Stokesschen Satzes als zweifelhaft bezeichnen müssen, als definitiv widerlegt kann man den Satz noch nicht ansehen.

1) *Lubarsch*, Wiedem. Annal. Bd. VI, Bd. IX, Bd. XI.
2) *Brauner*, Beiblätter zu den Annalen der Physik Bd. II. p. 152.
3) *Hagenbach*, Wiedem. Annal. Bd. VIII.
4) *Lamanski*, Wiedem. Annal. Bd. VIII. Bd. XI.
5) *Lommel*, Wiedem. Annal. Bd. VIII. Bd. X.

§ 54.

Versuche einer Theorie der Fluorescenz. Im grofsen und ganzen ist die Theorie der Fluorescenz schon durch die bahnbrechenden Arheiten von Stokes in dem Satze gegeben, dafs keine Fluorescenz ohne Absorption des Lichtes stattfindet. Das von den Körpern durch Fluorescenz ausgesandte Licht rührt demnach von der Bewegung der Körpermoleküle her, welche durch Übergang der Bewegung des Äthers auf die körperlichen Moleküle erregt wird. Eine vollständige Theorie der Fluorescenz mufs eine doppelte Aufgabe lösen. Sie mufs erstens den Unterschied zwischen Absorption ohne Fluorescenz und Absorption mit Fluorescenz darlegen. Denn wenn auch alle Körper, welche fluorescieren, solche sind, die das Licht absorbieren, so sind doch keineswegs alle Körper, welche absorbieren, gleichzeitig fluorescierende; im Gegenteil, die Zahl der fluorescierenden Körper ist eine sehr beschränkte, während wie wir wissen die Absorption eine allgemeine Eigenschaft der Körper und die Zahl der Körper, welche Teile des sichtbaren Spektrums stark absorbieren, sehr grofs ist.

Zweitens mufs eine Theorie der Fluorescenz uns eine Erklärung dafür geben, wie es möglich ist, dafs jede die Fluorescenz erregende Welle ein mehr oder weniger ausgedehntes Spektrum gibt, dafs also Schwingungen einer bestimmten Periode solche anderer Perioden erregen können.

Nach beiden Richtungen unterscheidet sich die Fluorescenz von der ihr sonst so ähnlichen Resonanz[1]). Jeder Körper in passende Form gebracht, so dafs er Eigenschwingungen vollführen kann, gerät durch die ankommenden Schallwellen in Schwingungen, vollführt dann aber entweder nur seine Eigenschwingungen oder nur Schwingungen der gleichen Periode mit derjenigen der ankommenden Wellen. Körper mit langdauerndem Eigentönen werden nur durch den gleichen Ton erregt, die kleinste Verstimmung der ankommenden Welle läfst den Körper in Ruhe. Körper mit kurzdauerndem Eigenton werden auch durch Schwingungen anderer Periode erregt, geben aber, solange sie einen ausgeprägten Eigenton haben, nur diesen. Nur Körper, welche keinen Eigenton haben, wie dünne wenig gespannte Membranen, werden durch jede ankommende Welle erregt, geben dann aber stets nur die ankommenden Schwingungen wieder, keine andere. Deshalb können eben die Königschen Membranen zur Analyse des Klanges verwandt werden, und deshalb können Resonanzböden zur Verstärkung des Klanges dienen; hieran beruht ebenso die Möglichkeit des Phonographen.

Stokes[2]) hat sich in seiner Arbeit über Fluorescenz mit theoretischen Andeutungen begnügt, er glaubte, dafs die fluorescierenden Körper solche seien, deren Molekülen eine besondere Beweglichkeit zugeschrieben werden müsse. Stokes äufsert sich darüber[3]) folgendermafsen: „Bei dem Phänomen der innern Dispersion, wie er die Fluorescenz anfangs nannte, verhält sich nun der empfindliche Körper, so lange er unter dem Einflusse des thätigen Lichtes steht, wie ein selbstleuchtender. Nichts scheint also natürlicher, als vorauszusetzen, dafs die einfallenden Schwingungen des Lichtäthers

[1]) Man sehe Band I. § 173.
[2]) *Stokes*, Poggend. Annal. Ergänzungsband IV. p. 322 ff.
[3]) *Stokes*, Poggend. Annal. Ergänzungsband IV. p. 323.

schwingende Bewegungen unter den letzten Molekülen der empfindlichen Substanzen hervorrufen, und dafs umgekehrt die für sich schwingenden Moleküle wiederum Vibrationen im Lichtäther erzeugen und dadurch die Lichtempfindung veranlassen." Wie man sieht, legt Stokes den fluorescierenden Substanzen eine besondere Empfindlichkeit bei.

Die Perioden der von den körperlichen Molekülen, resp. von den Atomen derselben ausgeführten Schwingungen können dann andere sein als die der ankommenden Wellen, sobald man annimmt, dafs die Verschiebungen der Atome gegen die Dimensionen der Moleküle erheblich sind, so dafs die durch die Verschiebungen geweckten elastischen Kräfte nicht mehr den Verschiebungen selbst, sondern höhern Potenzen derselben proportional gesetzt werden müssen. In dem Falle mufs eine eindringende Welle, wie es schon die Helmholtzsche Theorie der Kombinationstöne[1]) zeigt, auch Schwingungen anderer Periode erzeugen als die ihr eigentümlichen. Stokes entwickelte dann weiter, dafs die in den Körpern erregten Schwingungen, entsprechend seinen Beobachtungen, nur von gröfserer Dauer sein könnten als die ankommenden, indem eine etwa durch den ersten Anstofs erregte Bewegung von kleinerer Dauer durch die ankommende Bewegung gestört werde und nicht bestehen könne. Diese Entwicklungen bezeichnet Stokes als Mutmafsungen, eine Berechnung der Schwingungen der Moleküle hat er nicht versucht.

Gegen die Annahme von Stokes, dafs die fluorescierenden Substanzen „empfindliche" Substanzen seien, mufs indes eingewandt werden, dafs die neuere, seit den Arbeiten von Stokes entwickelte, Absorptionstheorie eine solche besondere Empfindlichkeit nicht annehmen kann, denn jede Absorption ist nach dieser Theorie die Folge der in den körperlichen Molekülen durch die eindringenden Wellen erregten Schwingungen. Wie wir weiter bei Entwicklung jener Theorie sahen ist die Absorption gerade jener Wellen ein Maximum, denen auch ein Maximum der Bewegung der körperlichen Atome entspricht, überhaupt die schwingende Bewegung der Moleküle um so gröfser, je stärker die Absorption ist. Allerdings lag unsern Rechnungen die Annahme zu Grunde, dafs die Elasticität der Moleküle den Verschiebungen proportional sei, indes bleibt die Beziehung zwischen Absorption und Stärke der Bewegung der Atome wesentlich dieselbe, wenn wir diese einfache Annahme fallen lassen. Wenn demnach die Fluorescenz einfach die Bewegung des Äthers ist, welche durch die Bewegung der Atome erzeugt wird, die selbst durch das absorbierte Licht erregt war, so müfste jeder absorbierende Körper fluorescieren und zwar in dem Mafse stärker, als er stärker absorbiert, was erfahrungsgemäfs nicht der Fall ist.

Später hat Lommel[2]) eine vollständigere Theorie der Fluorescenz zu geben versucht. Auch Lommel geht selbstverständlich davon aus, dafs die Fluorescenz eine Wiederausgabe des absorbierten Lichtes ist. Er entwickelt deshalb zunächst die Theorie der Absorption ganz ähnlich wie Helmholtz, wie wir schon § 51 erwähnten, mit dem Unterschiede, dafs er die Vereinfachung der Annahme fallen läfst, dafs die durch die Verschiebungen der Atome in den Molekülen geweckten elastischen Kräfte den Verschiebungen

[1]) *Helmholtz*, Poggend. Annal. Bd. XCIX. Man sehe Bd. I. § 178.
[2]) *Lommel*, Poggend. Annal. Bd. CXLIII; neue Folge Bd. III.

selbst proportional seien. Lommel berechnet dann die durch die eintretenden Lichtschwingungen entstehenden Schwingungen der Moleküle und betrachtet diese Schwingungen als jene, welche das Fluorescenzlicht erregen. Wodurch die lediglich absorbierenden Körper sich von den infolge der Absorption fluorescierenden unterscheiden, das gibt Lommel nicht an. Den Übergang von der Theorie der Absorption zu der der Fluorescenz bildet in seiner Abhandlung folgender Satz: „Werden die Atome eines Körpers durch den periodischen Impuls einer einfallenden Welle zum Selbstleuchten gebracht, so nennen wir diesen Leuchtprozeſs Fluorescenz"[1]). Deshalb gilt von der Theorie Lommels zunächst dasselbe, was vorher gegen die Andeutungen von Stokes eingewandt wurde; nach derselben müſsten alle absorbierenden Körper, welche im sichtbaren Spektrum Absorptionsstreifen zeigen, auch fluorescierende sein. Es müſste das um so mehr der Fall sein, da Lommel für seine Fluorescenz erster Art zu dem Satze gelangt, daſs die Intensität des durch irgend einen homogenen Strahl hervorgerufenen Fluorescenzlichtes proportional sei der Energie, mit welcher derselbe absorbiert wird.

Lommel versucht dann aus den Gleichungen, die er für die Schwingungen der Atome erhält, die Beschaffenheit des Fluorescenzspektrums abzuleiten; ich kann indes diesen Versuch nicht als geglückt ansehen, kann somit in der Lommelschen Theorie der Fluorescenz auch in ihrer neuesten Form[2]) keinen Fortschritt unseres Verständnisses der Fluorescenzerscheinungen erblicken. Da die Lommelsche Theorie von einigen Seiten als eine Lösung der Fluorescenzfrage angesehen ist, wird es nötig sein, diese meine Ansicht etwas näher zu begründen.

Lommel stellt, wie gesagt, zunächst die Bewegungsgleichungen der Atome infolge der Absorption des Lichtes auf. Er nimmt an, daſs die Atome durch die eindringenden Lichtschwingungen aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht werden, somit daſs eine Wechselwirkung zwischen den Atomen des Äthers und denen der körperlichen Moleküle stattfindet. Die verschobenen Atome werden gegen ihre Gleichgewichtslage getrieben durch die infolge der Verschiebung der Atome im Molekül geweckte elastische Kraft, welche er der ersten und zweiten Potenz der Verschiebung proportional setzt, und durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen des Äthers und denen der körperlichen Moleküle. Letztere betrachtet er als einen periodischen Impuls, dessen Periode dieselbe ist wie die Schwingungsperiode des eindringenden Lichtes. Schlieſslich nimmt er einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand der Reibung an.

Ist y die Verschiebung des körperlichen Atomes in irgend einer Schicht des Körpers, etwa in der Grenzschicht, welche vom eindringenden Licht getroffen wird, zur Zeit t, und m die Masse des bewegten Atomes, so wird die Gleichung für die bewegende Kraft

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = - \gamma y - \gamma_1 y^2 - F. \ \sin 2\pi \frac{t}{T} - \delta \frac{d y}{d t},$$

worin F eine der Amplitude des eindringenden Lichtes proportionale Gröſse

[1]) *Lommel*, Wiedem. Annal. Bd. III. p. 268. Man sehe auch p. 283.
[2]) *Lommel*, Wiedem. Annal. Bd. III.

und T die Schwingungsdauer dieses Lichtes ist. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit demjenigen von Helmholtz (§ 22)

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\gamma y + \beta (\eta - y) - \delta \frac{dy}{dt},$$

so ist das zweite Glied der Lommelschen Gleichung die Verallgemeinerung der Helmholtzschen Annahme, dafs die elastischen durch die Verschiebung der Atome geweckten Kräfte nicht einfach der Verschiebung proportional seien. Das dritte Glied der Lommelschen Gleichung entspricht dem zweiten der Helmholtzschen, wie man deutlicher noch erkennt, wenn wir die letztere Gleichung schreiben

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -(\gamma + \beta) y + \beta \eta - \delta \frac{dy}{dt}.$$

Lommel nimmt dann an, dafs γ_1 klein gegen γ sei, und schreibt dasselbe $b\varepsilon$, setzt weiter

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 \ldots$$

und berechnet, indem er in den sich ergebenden Gleichungen alle Glieder, die als Faktor eine höhere Potenz als ε^2 haben, fortläfst, gesondert y_0 und y_1.

Es genügt für uns die Gleichung zu betrachten, die Lommel für y_0 erhält, dieselbe lautet

$$y_0 = M \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \alpha\right) + Ne^{-kt} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_m} - \psi\right),$$

worin M eine zu bestimmende Konstante,

$$2k = \frac{\delta}{m}; \quad \frac{2\pi}{T_m} = \sqrt{\frac{\gamma - \frac{\delta}{4m}}{m}},$$

also T_m die Schwingungsdauer der Moleküle ist, wenn dieselben für sich schwingen würden, und die durch die Verschiebungen geweckten elastischen Kräfte den Verschiebungen proportional wären. In dieser Gleichung sieht Lommel das Glied

$$Ne^{-kt} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_m} - \psi\right)$$

als dasjenige an, welches die von ihm als Fluorescenz erster Art bezeichnete Fluorescenz liefert. Dasselbe repräsentiert die durch die eindringenden Wellen erregten Eigenschwingungen der Moleküle. „Vermöge des Faktors e^{-kt}, bemerkt Lommel[1]), wird diese Bewegung mit der Zeit immer schwächer und verklingt um so rascher, je gröfser k ist. Dieser Umstand berechtigt aber keineswegs zu der Annahme, dafs diese Schwingung überhaupt nicht in die Erscheinung tritt, und deshalb aufser Acht gelassen werden dürfe.

Halten wir nun an dem Grundsatze fest, dafs homogenes Licht nur durch einfache pendelartige Schwingungen hervorgebracht werde, so kann diese Schwingung mit veränderlicher Amplitude kein homogenes Licht darstellen."

---

[1]) *Lommel,* Wiedem. Annal. Bd. III. p. 263.

Mit Benutzung eines von Fourier aufgestellten Lehrsatzes, nach welchem man jede Funktion durch eine Sinusreihe darstellen kann, deren Bögen nach Vielfachen der Variabeln, hier also nach Vielfachen von $\pi \frac{t}{T}$ fortschreiten, kommt Lommel dann zu dem Satze: „Das von einem Körperatom, welches unter dem Einflusse eines Widerstandes schwingt, ausgestrahlte Licht ist demnach nicht homogen, sondern wird durch das Prisma in ein kontinuierliches Spektrum ausgebreitet, welches sich von der der Hauptschwingungsdauer T_m entsprechenden Stelle des Spektrums nach beiden Seiten um so weiter ausbreitet, je gröfser der Widerstandskoefficient k ist."

Gegen diese Schlufsfolgerung Lommels ist ein Doppeltes einzuwenden. Zunächst ist die Intensität des Fluorescenzlichtes, so lange jene des erregenden Lichtes konstant ist, selbst konstant Die Fluorescenz mufs deshalb einen stationären, das heifst mit der Zeit sich nicht ändernden Bewegungszustand der Moleküle zur Ursache haben, sie kann somit nicht durch einen Ausdruck dargestellt werden, der eine mit wachsender Zeit stets kleinere Schwingung liefert. Ein solcher Ausdruck kann immer nur eine mit wachsender Zeit verschwindende Bewegung, also auch ein verschwindendes Licht darstellen, was die Fluorescenz, so lange sie dauert, nicht ist.

Zweitens aber ist es durchaus unzulässig, eine verklingende Welle homogenen Lichtes als aus allen möglichen Wellen zusammengesetzt zu betrachten. Wenn sich die Funktion e^{-kt} auch mathematisch in eine solche Sinusreihe zerlegen läfst, so ist es doch verkehrt, dieser Zerlegung eine physikalische Bedeutung beizulegen. Man könnte in dem Falle überhaupt kein künstliches homogenes Licht darstellen, da wir keine Lichtquelle von absolut konstanter Intensität besitzen; jede Schwankung in der Lichtintensität müfste sich dann in ähnlicher Weise kenntlich machen. Denn während der Änderung der Lichtstärke ist die Amplitude eine Funktion der Zeit, welche sich nach dem Fourierschen Satze in eine Sinusreihe entwickeln läfst. Es müfste daher, wenn man dieser Zerlegung eine physikalische Bedeutung beilegen dürfte, jede Lichtquelle uns ein mehr oder weniger zusammengesetztes, und zwar, da das Gesetz der Schwankung der Lichtstärke nicht immer dasselbe ist, ein sehr variables Spektrum liefern.

Die Unzulässigkeit dieser Deutung einer verklingenden Welle tritt noch klarer hervor, wenn wir die analogen Erscheinungen des Schalles betrachten. Jeder Ton einer Stimmgabel, jeder Ton einer geschlagenen Saite, ja jeder durch einen Resonanzboden verstärkte Klang nimmt nach einem ähnlichen Gesetze ab. Unser Ohr nimmt nun in der That die einfachen Teiltöne eines Klanges wahr. Würde demnach der mathematischen Zerlegung einer verschwindenden Welle in eine Sinusreihe auch physikalisch Wirklichkeit zuzuschreiben sein, so könnte es keinen reinen Stimmgabelton geben; die Stimmgabel, jede schwingende Saite, jedes mit einem Resonanzboden versehene Instrument müfste bei jeder Erregung das wirreste Tongemisch geben. Wir wissen dagegen, dafs der Stimmgabelton bis zum vollen Verschwinden derselbe und ganz rein bleibt, ebenso bleibt die Farbe eines verschwindenden Klanges gleich derjenigen, welche der Klang bei konstanter Stärke besafs.

Aus alle dem folgt unzweifelhaft, dafs ein homogenes Licht nicht zu einem zusammengesetzten wird, wenn seine Intensität stetig abnimmt, somit dafs

der Versuch Lommels das mehr oder weniger kontinuierliche Spektrum des Fluorescenzlichtes in dieser Weise abzuleiten als unzulässig zu bezeichnen ist.

Auf ganz derselben Basis beruht Lommels Ableitung der Fluorescenz zweiter Art, der nach Hagenbach und Lamanski allein vorkommenden, es gilt daher für diese dasselbe, was wir soeben gegen die Ableitung der Fluorescenz erster Art gesagt haben.

Nach alle dem müssen wir betreffs der Theorie der Fluorescenz noch genau dasselbe sagen, was Stokes betreffs derselben am Beginn des § 229 seiner Abhandlung sagt: „Wir sind gegenwärtig, glaube ich, noch weit davon entfernt die Phänomene der innern Dispersion in allen ihren Details erklären zu können."

§ 55.

Phosphorescenz. Mit der Fluorescenz sehr nahe verwandt ist eine andere Wirkung des Lichtes auf eine grofse Zahl von Körpern, welche mit dem Namen der Phosphorescenz bezeichnet wird. Unter dem Einflusse des Lichtes der Sonne oder irdischer Lichtquellen beginnt eine grofse Zahl von Körpern, wie es die fluorescierenden thun, ein sanftes Licht auszustrahlen, ohne dafs sich in den Körpern die geringste chemische Änderung zeigt. Von den fluorescierenden Körpern unterscheiden sich die phosphorescierenden aber dadurch, dafs sie Licht auch noch eine merkliche, ja oft längere Zeit nach der Bestrahlung aussenden, während die fluorescierenden sehr bald oder gar unmittelbar nach der Bestrahlung erlöschen.

Es gibt eine ziemliche Anzahl natürlicher und künstlicher Minerale, die diese Eigenschaft der Phosphorescenz in ganz ausgezeichnetem Grade besitzen, und welche daher den Namen Leuchtsteine oder Lichtsauger erhalten haben. Zu den natürlichen Phosphoren gehören besonders der Diamant, der Kalkspath, gewisse Varietäten von Flufsspath, unter diesen besonders der unter dem Namen Chlorophan bekannte Flufsspath von Nertschinsk[1]). Unter den künstlichen Phosphoren sind besonders hervorzuheben die Schwefelverbindungen der alkalischen Erden, welche man durch Glühen von Schwefel mit Kalk, Baryt oder Strontian oder mit deren Karbonaten oder schliefslich durch Reduktion der Sulfate dieser alkalischen Erden mit Kohle erhält[2]).

Um die Phosphorescenzerscheinung bei diesen Körpern hervorzurufen, genügt es, dieselben eine kurze Zeit dem Sonnenlichte oder auch dem diffusen Tageslichte auszusetzen und dann in einen dunklen Raum zu bringen, in welchem der Beobachter sich bereits eine Zeitlang vorher aufgehalten hat, um sein Auge auch für ganz schwache Lichtwirkungen empfindlich zu machen. Ein anderes Mittel, um die Phosphorescenz sichtbar zu machen, ist die Beleuchtung der Phosphore mit elektrischem Lichte. Zu dem Ende werden die Phosphore am besten in gepulverter Form in eine weite Röhre

---

[1]) *E. Becquerel* zählt Annales de chim. et de phys. III. Série. T. LV und noch vollständiger in seinem Werke: La lumière, sa cause et ses effets. Paris 1867, dessen erster Band zur Hälfte von der Phosphorescenz handelt, die sämtlichen bekannten phosphorescierenden Substanzen auf.

[2]) *E. Becquerel*, a. a. O. und La lumière etc. p. 207 ff. *Forster*, Poggend. Annal. Bd. CXXXIII.

gebracht, in deren Enden ähnlich wie bei den Geisslerschen Röhren Drähte eingeschmolzen sind, und die Luft in der Röhre sehr stark verdünnt. Man verbindet dann die Drähte der Röhre mit den Polen des Induktionsapparates und läfst eine Zeitlang den elektrischen Strom durch die Röhren hindurchgehen.

Erregt man die Phosphorescenz auf die eine oder andere Weise, so sieht man die Phosphore im Dunkeln jeden mit einer bestimmten ihm eigentümlichen Farbe leuchten, welche nicht nur von der Zusammensetzung des Phosphors, sondern auch wesentlich von seiner physikalischen Beschaffenheit abhängt. Dabei ist zunächst die Temperatur, bis zu welcher der Phosphor bei der Darstellung erwärmt wurde, von wesentlichem Einflufs. So gab bei den Versuchen Becquerels[1]) ein Phosphor, der aus Glühen von Arragonit und nachherigem Zusammenbringen des so erhaltenen Kalkes mit Schwefel erhalten war, ein bläuliches Licht, als seine Temperatur nicht über 500° gesteigert war, dagegen ein sehr lebhaftes grünes Licht, als er während 30 Minuten einer Temperatur von etwa 900° ausgesetzt war.

Einen ganz merkwürdigen Unterschied zeigte das Schwefelcalcium in Bezug auf die Farbe des Phosphorescenzlichtes je nach der Form, in welcher der Kalk mit dem Schwefel zusammen erhitzt wurde. Die Farbe des Phosphorescenzlichtes wurde, als mit Schwefel zusammen geglüht war

Reiner isländischer Doppelspath....	orangegelb
Kalk aus Doppelspath	desgl. weniger hell
Weifser Marmor...............	gelb, sehr schwach
Kalk aus Marmor...............	desgl. desgl.
Kalk aus Austernschalen	gelb
Kalk aus Kalkstein	gelb, sehr schwach
Kalk aus Kreide oder Kreide......	gelb, kaum sichtbar
Arragonit von Vertaison	grün, ziemlich hell
Kalk aus Arragonit	grün, schwach
Faseriger Arragonit.............	violett
Kalk aus faserigem Arragonit	grün, sehr hell.

Wurden die Kalksalze vorher in Säure, Salpetersäure oder Salzsäure aufgelöst, dann mit kohlensaurem Ammoniak gefällt, und der so erhaltene kohlensaure Kalk mit Schwefel geglüht, so wurden die Farben wieder andere. Ein so aus weifsem Marmor dargestellter Phosphor leuchtete violett, ein aus Austernschalen erhaltener grün[2]). Ähnlich verhielten sich die andern phosphorescierenden Substanzen.

Auf die Farbe des Phosphorescenzlichtes ist ebenfalls von Einflufs die Temperatur, bei welcher der Körper der Wirkung der Lichtstrahlen ausgesetzt wird. Für ein Schwefelstrontium gibt Becquerel folgende Farben an:

Temper.	Farbe	Temper.	Farbe
— 20°	Violett, sehr hell	+ 90	Gelbgrünlich
+ 20	Blauviolett	100	Gelb
40	Hellblau	200 ungef.	Orange
70	Grünlich		

[1]) *E. Becquerel*, La lumière etc. p. 218.
[2]) *E. Becquerel*, a. a. O. p. 219 ff.

Für verschiedenes Schwefelcalcium ist die Farbenfolge umgekehrt, mit steigender Temperatur nähert sich die Farbe mehr dem brechbarern Ende des Spektrums[1]).

Die Dauer des Phosphorescenzlichtes nach der Insolation ist für die verschiedenen Körper eine sehr verschiedene[2]). Die Mehrzahl der Mineralien und Salze besitzt die Fähigkeit zu leuchten nur wenige Sekunden oder höchstens einige Minuten, und vielfach bedurfte es eines längern Verweilens im dunkeln Zimmer, um nach ganz kurzer Zeit überhaupt noch ein Leuchten wahrzunehmen.

Zwischen der Intensität des Phosphorescenzlichtes und der Dauer des Leuchtens existiert keine Beziehung; gewisse Mineralien, wie der Arragonit, leuchten ziemlich hell, aber nur etwa 20 Sekunden nach der Insolation, der Chlorophan dagegen und gewisse Diamanten, welche nach der Belichtung viel weniger hell leuchten, erlöschen erst nach mehr als einer Stunde. Dasselbe zeigt sich bei den Schwefelverbindungen der Erden, deren mehrere länger als 30 Stunden leuchten.

Nachdem Becquerel erkannt hatte, dafs die Dauer der Phosphorescenz eine sehr verschiedene sein konnte, vermutete er, dafs das Phänomen ein sehr viel allgemeineres sei, als man bisher angenommen, und dafs man nur deshalb in vielen Fällen die Phosphorescenz nicht wahrgenommen, weil sie zu rasch nach der Belichtung erlischt. Er konstruierte deshalb einen eigenen Apparat, das Phosphoroskop, mit welchem er die Körper wenige tausendstel Sekunden nach der Belichtung beobachten konnte[3]). Das Phosphoroskop in der von Becquerel angewandten Form zeigt Fig. 101, die innere Einrichtung Fig. 102.

In einer innen geschwärzten Blechbüchse M, welche in ihrer vordern und hintern Wand zwei genau entsprechend liegende sektorenförmige Einschnitte hat, sind auf einer Axe S zwei Scheiben angebracht, deren Einrichtung Fig. 102 zeigt.

Auf jeder der Scheiben sind sektorenartige Einschnitte, in der Zeichnung vier, deren Breite etwa $\frac{1}{3}$ des Zwischenraumes zwischen je zwei Öffnungen beträgt, so angebracht, dafs die in der einen Scheibe befindlichen Öffnungen sich gerade vor der Mitte des undurchsichtigen Teiles der andern Scheibe befinden. Die Scheiben selbst befinden sich möglichst nahe an dem vordern und hintern Boden der Büchse. Auf der Axe der Scheiben, aufserhalb der Büchse ist ein Trieb eingeschnitten, in welchen die Zähne des letzten zu dem Räderwerk gehörigen Zahnrades eingreifen. Das Räderwerk wird durch die Kurbel P gedreht, und damit das Scheibenpaar je nach der Schnelligkeit, mit der man dreht, in eine mehr oder weniger rasche Rotation versetzt. Das Phosphoroskop wird nun so aufgestellt, dafs die von einem Heliostaten reflektierten Sonnenstrahlen auf die Öffnung des vordern Bodens über S fallen, während das Auge des Beobachters sich auf der entgegengesetzten Seite der Büchse vor der dort befindlichen Öffnung befindet. Der Körper, dessen Phosphorescenz untersucht werden soll, wird,

[1]) *E. Becquerel*, a. a. O. p. 386 ff.
[2]) *E. Becquerel*, a. a. O. p. 244 ff.
[3]) *E. Becquerel*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. LV. La lumière p. 249. Etwas einfachere Formen des Apparates fertigt *Duboscq* in Paris (Rue de l'Odéon) an.

wie es die Figur zeigt, mit Hülfe eines an dem Knopfe N befindlichen Rähmchens zwischen die beiden rotierenden Scheiben gehängt. Werden nun die Scheiben in Rotation versetzt, so erhält der Körper jedesmal dann Licht, wenn eine der Öffnungen der vordern Scheibe vor der Öffnung des vordern Bodens ist; da aber dann die Öffnung des hintern Bodens durch den undurchsichtigen Teil der hintern Scheibe bedeckt ist, so kann jetzt keine Spur von Licht zu dem Auge des Beobachters gelangen. Wenn dann aber bei der Drehung der Scheiben eine Öffnung der hintern Scheibe vor die Beobachtungsöffnung tritt, so wird nur das von dem Körper ausgesandte Phosphorescenzlicht sichtbar, da dann die andere Öffnung des Apparates verdeckt ist. Dreht sich das Scheibenpaar in der Sekunde einmal, so wird

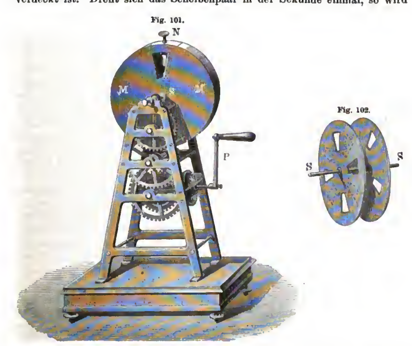


Fig. 101.

Fig. 102.

bei der angenommenen Teilung der Scheiben, vier Öffnungen auf jeder, deren jede $\frac{1}{16}$ des Kreisumfanges umfaſst, und von denen die zugewandten Seiten der Öffnungen der vordern und hintern Scheibe $\frac{1}{16}$ Kreisumfang von einander entfernt sind, die Zeit zwischen Belichtung und Beobachtung $\frac{1}{16}$ Sekunde. Wird das Scheibenpaar etwa 100 mal gedreht, so beobachtet man den phosphorescierenden Körper 0,0006 Sekunden nach der Belichtung. Ebenso lange ist dann der Körper jedesmal sichtbar, und ebenso lange dauert die Belichtung.

Mit Hülfe des Phosphoroskopes fand nun E. Becquerel in der That, daſs die Phosphorescenz eine viel allgemeinere Eigenschaft sei, als man früher geglaubt hatte. Die Alkalien, die alkalischen Erden und Erden, sowie deren sämtliche Salze, insbesondere die Aluminiumverbindungen zeigten

bei hinreichend rascher Drehung lebhaftes Phosphorescenzlicht; so ebenfalls fast alle organischen Substanzen.

Nur die Verbindungen der Schwermetalle zeigten im allgemeinen keine Phosphorescenz, jedoch auch hier lieferten einige ein helles Licht, aber von kurzer Dauer. Es sind das gerade jene Metallverbindungen, welche nach Stokes vorzüglich fluorescieren, wie die Uransalze und einige Platinsalze. Überhaupt gelang es Becquerel den Nachweis zu liefern, dafs alle festen fluorescierenden Körper auch Phosphorescenzlicht geben, wenn dieses Licht auch nur sehr kurze Zeit dauert. Nur für die fluorescierenden Flüssigkeiten liefs sich auch bei der schnellsten Bewegung des Phosphoroskopes keine Phosphorescenz erkennen. Nichts destoweniger glaubt Becquerel, dafs man nicht zu der Annahme berechtigt sei, dafs diese Körper überhaupt keine Phosphorescenz zeigen, und nimmt dann weiter an, dafs Fluorescenz und Phosphorescenz ihrem Wesen nach nicht verschieden seien, dafs die Fluorescenz nur eine Phosphorescenz von sehr kurzer Dauer sei[1]).

Darnach würde also die Phosphorescenz ebenfalls nur die Wiederausgabe einer gewissen Quantität von bei der Belichtung absorbiertem Lichte sein, eine Folgerung, welche Becquerel durch eine Reihe von Versuchen bestätigte. Zunächst folgt aus dieser Annahme, dafs bei den Versuchen mit dem Phosphoroskop die Intensität des ausgestrahlten Phosphorescenzlichtes abhängig sein kann von der Geschwindigkeit der Rotation, wenigstens dann, wenn die Phosphorescenz nicht von zu kurzer Dauer ist. Dieses Maximum wird dann erreicht sein, wenn während der jedesmaligen Belichtung der Verlust an Licht innerhalb des zwischen je zwei Belichtungen verstrichenen Zeitraums wieder ersetzt wird. Die von dem Körper ausgegebene Lichtmenge ist aber um so gröfser, je länger, um so kleiner, je kürzer der Zwischenraum zwischen je zwei Belichtungen ist, und ist der Zeitraum kurz genug, so kann durch die folgende Belichtung der ganze Verlust wieder ersetzt werden. In der That fand Becquerel für eine Reihe von Substanzen, dafs die Helligkeit zunahm, bis die Geschwindigkeit der Rotation eine gewisse Gröfse erreichte, so bei gewöhnlichem Glase, bis die Zwischenzeit zwischen Belichtung und Beobachtung 0″,0033 betrug[2]).

Ferner wies Becquerel nach, dafs die Intensität des Phosphorescenzlichts jener des einfallenden Lichtes proportional war[3]). Zur Führung dieses Nachweises wurde die Öffnung in der dem Lichte zugewandten Seite des Phosphoroskopes dadurch veränderlich gemacht, dafs ein Schieber mit einer Mikrometerschraube vor derselben verschoben und so die Breite der Öffnung zwischen $0^{mm},5$ und 24^{mm} variiert werden konnte. Indem die Geschwindigkeit der Rotation konstant erhalten wurde, wurde dann mit einem später zu beschreibenden Photometer die Intensität des Phosphorescenzlichtes gemessen. Es ergab sich, dafs die Intensität desselben der Gröfse der vordern Öffnung, somit der Menge des den phosphorescierenden Körper treffenden Lichtes proportional war. So erhielt Becquerel z. B. für die Intensität des Phosphorescenzlichtes bei einem kohlensauren Kalk folgende Werte:

1) *E. Becquerel*, La lumière etc. p. 316 ff.
2) *E. Becquerel* a. a. O. p. 260 ff.
3) *E. Becquerel* a. a. O. p. 265.

Breite der vordern Öffnung = B	Intensität des Phosphoresc. = J	$\frac{J}{B}$
1^{mm}	0,002 031 6	0,002 031 6
2^{mm}	0,003 551 9	0,001 775 9
4^{mm}	0,007 596 2	0,001 899 0
8^{mm}	0,015 564 0	0,001 945 5
16^{mm}	0,033 733 0	0,002 108 3
24^{mm}	0,050 603 0	0,002 108 3

Die letzte Kolumne läfst erkennen, dafs die Intensität des Phosphorescenzlichtes in der That der Gröfse der Öffnung proportional gesetzt werden kann, da die Abweichnng der Zahlen von einander innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fällt.

Für die Anschauung Becquerels, dafs wir in dem Phosphorescenzlicht die Wiederausgabe einer gewissen Quantität des absorbierten Lichtes vor uns haben, spricht ebenfalls das Gesetz, nach welchem die Intensität des Phosphorescenzlichtes abnimmt, wenn es während des allmählichen Verlöschens immer dieselbe Farbe beibehält. Unter der Voraussetzung, dafs durch das Ausstrahlen ein Verlnst von Licht eintritt, und dafs dieser Verlust der in jedem Moment vorhandenen Intensität proportional ist, ergibt sich für die Abnahme der Intensität folgendes Gesetz.

Ist in einem gegebenen Momente die Intensität des Lichtes gleich i, so ist unter der gemachten Voraussetzung in dem Zeitelement dt der Verlust

$$di = -\, a i dt,$$

wo wir rechts das negative Vorzeichen setzen, um auszudrücken, dafs di einen Verlust bedeutet, und wo a eine Konstante ist, welche die Lichtausgabe in einer Sekunde darstellt, wenn die Intensität des Lichtes während derselben konstant und gleich eins wäre.

Nennen wir die Intensität zur Zeit $t = o$ jetzt i_0, so erhalten wir die Intensität i zur Zeit t in dem Integral

$$-\int_{i_0}^{i} \frac{di}{i} = \int_{o}^{t} a\, dt$$

somit

$$\log \frac{i_0}{i} = at$$

oder, da der Logarithmus ein natürlicher ist

$$i = i_0 e^{-at}.$$

Die Intensität mufs somit nach einer geometrischen Reihe abnehmen, wenn die Zeit nach einer arithmetischen wächst.

Um das Gesetz zu prüfen bestimmte Becquerel unter andern die Intensität eines grün leuchtenden Uranglases[1]) bei sehr verschiedener Geschwindigkkit der Scheiben des Phosphoroskops, also zu sehr verschiedenen Zeiten nach der Insolation. Ist die Intensität nach der Zeit t_1 dann i_1, nach der Zeit t_2 dann i_2, so gibt obiges Gesetz:

[1]) *E. Becquerel*, La lumière etc. p. 278.

$$\log i_1 - \log i_0 = - a t_1;\ \log i_2 - \log i_0 = - a t_2$$

$$a = \frac{\log i_1 - \log i_2}{t_2 - t_1}.$$

Wenn das Gesetz richtig ist, so mufs, welche je zwei beobachteten Werte man auch kombiniert, der Wert von a immer derselbe sein.

Für das Uranglas erhielt Becquerel so, wenn die Zeit t in tausendstel Sekunden ausgedrückt wurde, als Wert von $a = 0{,}5546$ als Mittel aus vielen wenig abweichenden Bestimmungen.

Wir haben vorhin bei Angabe dieses Gesetzes die Beschränkung gemacht, dafs das Licht des phosphorescierenden Körpers einfarbig sei, oder doch seine Farbe nicht ändere. Ändert das Licht seine Farbe, so kann dieses Gesetz nicht in der einfachen Form bestehen, da dann die Werte von a für die verschiedenen Farben verschieden sind.

Das Gesetz ist überhaupt nur ein angenähertes, es gilt nach den Versuchen Becquerels nicht mehr, wenn die Phosphorescenz eine beträchtliche Dauer hat. Etwas ganz Ähnliches werden wir im dritten Teil in Betreff der Abkühlung der Körper finden, wo ganz dasselbe Gesetz gilt, wenn ein Körper nur wenig wärmer ist als seine Umgebung, und wo das Gesetz der Abkühlung ebenfalls komplicierter ist, wenn der Körper eine beträchtlich höhere Temperatur hat als seine Umgebung.

Einen weitern Beleg für die Auffassung von Becquerel liefert der Einflufs der Wärme auf die Phosphorescenzerscheinungen. Es ist schon eine alte Erfahrung, dafs gewisse Körper, wie Flufsspath, Diamant u. a. durch Erwärmen zum Phosphorescieren kommen[1]), diese Phosphorescenz ist aber, wenn der Körper konstant auf höherer Temperatur erhalten wird, nur vorübergehend; der Körper kann aber wieder phosphorescierend gemacht werden, wenn man ihn vor einer zweiten Erwärmung dem Licht aussetzt. Die in der Wärme phosphorescierenden Körper würden also ebenfalls nur das früher aufgenommene Licht wieder ausstrahlen. Für diese letztere Anschauung spricht ebenfalls der Umstand, dafs ein schon ohne Erwärmung phosphorescierender Körper durch Erwärmung zu einem lebhaftern Leuchten gebracht wird, dafs er dann aber viel rascher die Fähigkeit zu leuchten verliert. Alles das spricht dafür, dafs durch die Phosphorescenz eine gewisse Quantität von dem phosphorescierenden Körper vorher aufgenommenen Lichtes wieder ausgegeben wird.

Bei der Phosphorescenz sind es wie bei der Fluorescenz vorwiegend die brechbarern Strahlen, die blauen, violetten und ultravioletten, welche das Leuchten hervorrufen. Bei den vorzüglichsten Phosphoren, den Sulfüren des Bariums, Strontium und Calcium erstreckte sich nach den Versuchen von Becquerel die erregende Wirkung nach der Seite der weniger brechbaren Strahlen nicht über F hinaus[2]). Ja es hat sogar den Anschein, als wenn die weniger brechbaren Strahlen die von den brechbarern erregte Phosphorescenz auslöschen. Das scheinbare Auslöschen hat aber seinen Grund darin, dafs die weniger brechbaren Strahlen auf die phosphorescierenden Körper denselben Einflufs haben wie die Wärme, sie bewirken

[1]) Man sehe die ältere Litteratur: *E. Becquerel*, La lumière etc. livre I. p. 9—34. *E. Becquerels* Versuche a. a. O. livre III. chapitre I.

[2]) *E. Becquerel* a. a. O. p. 298 ff.

ein lebhafteres und deshalb kürzer dauerndes Phosphorescieren. Erregt man nämlich durch weifses oder blaues Licht die Phosphorescenz und läfst dann nur ganz kurze Zeit rotes oder gelbes Licht auf die phosphorescierenden Körper wirken, so leuchten dieselben beträchtlich lebhafter, als wenn man die Strahlen nicht hat wirken lassen. Wenn deshalb diese Strahlen längere Zeit wirken, so ist während ihrer Wirkung der gröfste Teil oder das gesamte Licht ausgegeben und deshalb erscheinen die Körper nach der Wirkung des Lichtes dunkel[1]).

Die Strahlen des Phosphorescenzlichtes sind stets weniger brechbar als jene des erregenden, und im allgemeinen liefern dieselben ein kontinuierliches bis in das Blaue reichendes Spektrum. In einzelnen Fällen treten indes in dem Phosphorescenzspektrum einzelne helle Linien auf. Besonders interessant ist dabei das salpetersaure Uranoxyd, dessen Phosphorescenzspektrum aus acht hellen Linien zwischen B und F besteht, welche nach Hagenbach[2]) genau den Streifen des Fluorescenzspektrums entsprechen.

Nach alledem scheint somit die Phosphorescenz als eine auch nach der Belichtung fortdauernde Fluorescenz betrachtet werden zu können, welche im allgemeinen während der Belichtung zu schwach ist, um wahrgenommen zu werden. Indes läfst sich nicht leugnen, dafs diese Anschauung immerhin noch einigen Schwierigkeiten begegnet, zu denen besonders die Phosphorescenzerscheinungen bei Krystallisation gehören, wie sie H. Rose[3]) bei der Krystallisation der arsenigen Säure aus einer sehr langsam sich abkühlenden Lösung, oder auch bei der Krystallisation eines vorher geschmolzenen und dann gelösten Gemenges von schwefelsaurem Kali und Natron beobachtet hat. Jeder sich absetzende Krystall gibt zu einem kurzdauernden Leuchten Anlafs. Es ist schwer, hier anzunehmen, dafs dieses Leuchten Wiedergabe des im gelösten Zustande absorbierten Lichtes sei.

§ 56.

Chemische Wirkung des Lichtes. Bei den in den vorigen Paragraphen betrachteten Wechselwirkungen zwischen dem Licht und den Körpern, auf welche es bei der gestörten Ausbreitung trifft, und in welche es eindringt, wird die Beschaffenheit der Körper nicht bleibend geändert; es gibt jedoch eine Reihe von Körpern, welche durch die Einwirkung des Lichts eine bleibende Änderung erfahren, deren chemische Zusammensetzung dadurch geändert wird. Wir müssen uns hier damit begnügen, eine kurze Übersicht über die hierher gehörigen Wirkungen zu geben und wegen des Genauern auf die Lehrbücher der Chemie[4]) und der Pflanzenphysiologie[5]) zu verweisen.

Die ausgedehnteste und grofsartigste chemische Wirkung des Lichtes ist die Einwirkung desselben auf die Vegetation; nur unter dem Einflusse des Lichtes können die Pflanzen gedeihen. Durch die Blätter absorbieren

[1]) *E. Becquerel* a. a. O. p. 301.
[2]) *Hagenbach*, Poggend. Annal. CXLVI.
[3]) *H. Rose*, Poggend. Annal. Bd. XXXV.
[4]) *Gmelin*, Handbuch der Chemie. T. I. *E. Becquerel*, La lumière, sa cause et ses effets. T. II.
[5]) *J. Sachs*, Handbuch der Pflanzenphysiologie. Leipzig, Engelmann. 1865.

die Pflanzen aus der Atmosphäre Kohlensäure, durch die Einwirkung des Lichtes wird diese zersetzt und der Sauerstoff von den Pflanzen ausgehaucht, während der Kohlenstoff fähig zu neuen andern Verbindungen in der Pflanze angesammelt bleibt.

Dafs es das Licht ist, welches in der Pflanze diese Zersetzung erzeugt, geht unmittelbar daraus hervor, dafs bei Nacht, oder auch bei Tage in dunklen Räumen, der chemische Procefs bei den Pflanzen gerade umgekehrt ist; die aus der Luft absorbierte Kohlensäure wird dann nicht zersetzt, sondern durch den absorbierten Sauerstoff wird in der Pflanze Kohlenstoff verbrannt und Kohlensäure ausgehaucht.

Aufserdem hat aber die Chemie eine ganze Reihe von chemischen Wirkungen des Lichtes kennen gelehrt, indem sie gezeigt hat, dafs unter Einwirkung des Lichtes teils chemische Verbindungen, teils Zersetzungen stattfinden können.

Eines der ausgezeichnetsten Beispiele der durch Licht bewirkten Verbindung zweier Elemente ist die Bildung von Salzsäure aus einem Gemische von gleichen Volumen Chlor und Wasserstoff. Bringt man ein solches Gemisch im Dunkeln zusammen, so verändert sich dasselbe nicht; wenn man dagegen auf dasselbe Licht wirken läfst, so tritt sofort die Bildung von Salzsäure ein, bei Anwendung direkten Sonnenlichtes mit einer solchen Heftigkeit, dafs das Gemisch explodiert gerade wie Knallgas, wenn man den elektrischen Funken durch dasselbe hindurchschlagen läfst. Das Chlor hat bei Einwirkung des Lichtes ein solches Bestreben sich mit dem Wasserstoff zu verbinden, dafs es denselben sogar aus andern Verbindungen ausscheidet. So hält sich Chlorwasser im Dunkeln unter Abschlufs der Luft aufbewahrt vollständig ungeändert, dagegen unter Einflufs des Lichtes wird das Wasser zersetzt, es bildet sich Chlorwasserstoffsäure, während Sauerstoff abgeschieden wird. Ebenso wie sich das Chlor mit dem Wasserstoff verbindet, kann es in einer Reihe von andern Körpern unter Einwirkung des Lichtes Chlorsubstitutionsprodukte bilden; indem für eine bestimmte Anzahl Wasserstoffatome, welche austreten und Chlorwasserstoff liefern, ebenso viele Atome Chlor eintreten. So tritt es unter Einwirkung des Lichtes in verschiedene Kohlenwasserstoffe, indem es einen Teil des Wasserstoffs deplaciert. Mit Sumpfgas CH_4 zusammengebracht, bleibt es im Dunkeln ungeändert, unter Wirkung des diffusen Lichtes entwickeln sich nach und nach die Körper CH_3Cl, CH_2Cl_2, $CHCl_3$, das Chloroform und schliefslich der Chlorkohlenstoff CCl_4. Mit Essigsäure bildet es unter Einwirkung des Sonnenlichtes Trichloressigsäure.

Ein weiteres Beispiel von Verbindung durch den Einflufs des Lichtes ist das Chlorkohlenoxyd, welches durch direkte Verbindung des Chlors mit dem Kohlenoxyd im Lichte entsteht, während im Dunkeln die beiden Gase sich nicht verbinden.

Ähnlich wie das Chlor verhalten sich Brom und Jod gegen Wasserstoff unter Einwirkung des Lichtes. Auch der Sauerstoff tritt unter Wirkung des Lichtes in vielen Fällen aktiver auf als ohne dasselbe, so besonders bei der Oxydation organischer Körper.

Während so einerseits das Licht die Verbindung verschiedener Elemente erleichtert, wirkt es andererseits direkt zersetzend auf chemische Verbindungen ein, letzteres ganz besonders auf die Verbindungen der edlen

Metalle. So werden fast alle Silberverbindungen unter Wirkung des Lichtes mehr oder weniger zerlegt und geschwärzt. So werden Chlorsilber, Jodsilber etc. am Lichte sehr bald gefärbt, erst violett, dann schwarz. Ähnlich verhält es sich mit den Verbindungen von Gold, Platin und Quecksilber.

Die zersetzende Wirkung des Lichtes auf Metallverbindungen wird in vielen Fällen durch die Gegenwart organischer Körper befördert; so geschieht selbst die Zersetzung der Silbersalze viel rascher, wenn sie mit organischen Körpern, wie mit Papier in Berührung sind. Andere Körper, wie Eisensalze, Uransalze, chromsaure Salze zersetzen sich nur bei Gegenwart organischer Körper, welche die bei diesen Zersetzungen frei werdenden Salzbildner oder den Sauerstoff absorbieren. Dieser Einfluſs der organischen Substanzen ist nach dem Vorigen leicht verständlich, denn es wirken hier beide Arten von Einflüssen des Lichtes zusammen. Unter Einfluſs des Lichtes verbindet sich Chlor oder Sauerstoff mit dem Wasserstoff der organischen Körper, es wirkt deshalb die Gegenwart eines solchen Körpers bei Chloriden oder Oxyden anziehend auf Chlor und Sauerstoff und unterstützt die zerlegende Wirkung des Lichtes. Ähnlich wie die organischen Körper wirken alle Reduktionsmittel oder solche Substanzen, welche den vom Metall abgeschiedenen Sauerstoff oder Salzbildner aufzunehmen imstande sind.

Ja es ist im allgemeinen nicht einmal erforderlich, die im Licht zersetzbaren Salze gleichzeitig mit diesen Mitteln, den sogenannten Sensibilatoren, der Wirkung des Lichtes auszusetzen, sondern es genügt, die zersetzbaren Salze allein dem Lichte auszusetzen und dann mit den Reduktionsmitteln zusammenzubringen, um die Zersetzung hervorzurufen. Ganz besonders gilt das von den zersetzbaren Silbersalzen. Läſst man dieselben der Wirkung des Lichtes nur kurze Zeit ausgesetzt, so werden sie vom Lichte noch nicht zersetzt, bringt man aber ein insoliertes Silbersalz dann mit einem Reduktionsmittel in Berührung, so tritt die Zersetzung nachträglich ein.

Letztere Erscheinung hat in neuester Zeit die ausgedehnteste Anwendung gefunden in der Herstellung von Lichtbildern. Man überzieht ein Papier oder eine Glasplatte mit einer Schicht eines empfindlichen Silberpräparates, indem man das Papier mit einer Lösung von Kochsalz oder Jodkalium imprägniert und es dann auf einer Lösung von salpetersaurem Silberoxyd schwimmen läſst, oder die Glasplatte mit einer Kollodiumschicht überzieht, welche etwas Jodkalium enthält und dann in eine ebensolche Lösung von salpetersaurem Silberoxyd eintaucht. Durch doppelte Zersetzung bildet sich dann an der Oberfläche dieser Präparate Jod- oder Chlorsilber, und salpetersaures Kali oder Natron. Letztere Salze werden in der Flüssigkeit gelöst, während die unlöslichen Silbersalze in dem Papier oder der Platte zurückbleiben.

Unter Abschluſs des Lichtes bringt man eine so präparierte Fläche in einer Camera obscura in die Brennebene einer achromatischen Sammellinse und läſst das dort befindliche reelle Bild des abzubildenden Gegenstandes kurze Zeit auf die präparierte Fläche wirken. Ehe die Wirkung sichtbar ist, nimmt man dieselbe wieder heraus und übergieſst sie unter Abschluſs des Lichtes mit einer reducierenden Flüssigkeit, etwa mit einer koncentrierten Lösung von Gallussäure. An den Stellen, wo das Licht gewirkt hat, am meisten dort, wo es am hellsten war und immer weniger, je



weniger hell das Licht war, wird dann das Silber reduciert; während dort, wo das Licht gar nicht wirkte, das Chlor- oder Jodsilber ungeändert zurückbleibt. Um das Bild der weitern Einwirkung des Lichtes zu entziehen, wird die zurückgebliebene empfindliche Schicht des Silbersalzes durch ein Lösungsmittel, eine Lösung von Cyankalium etwa, oder von unterschwefligsaurem Natron fortgenommen. Das auf diese Weise erzeugte Bild ist ein sogenanntes negatives, das heifst, die Lichter sind dunkel und die Schatten hell. Von diesem werden daher positive Kopieen genommen, indem man mit dem negativen Bilde ein präpariertes Papier bedeckt und durch das Bild hindurch Licht auf das Papier wirken läfst. Die Stellen, wo das Silber reduciert war, sind auf den negativen Bildern undurchsichtig, die übrigen sind durchscheinend. Auf dem empfindlichen Papier werden daher die mit den Partieen, wo das Licht gewirkt hat, bedeckten Stellen der Wirkung des Lichtes entzogen, und nicht oder nur wenig gefärbt, während die andern Teile geschwärzt werden. Man löst dann wieder das nicht zersetzte Silbersalz auf und erhält ein positives Bild, indem die im abzubildenden Gegenstande hellen Stellen in der weifsen Farbe des Papieres hell auf dem dunklen, durch das Silbersalz gefärbten Grunde erscheinen[1]).

Etwas anders ist die Benutzung der Lichtwirkung zur Herstellung von Bildern bei dem von Daguerre zuerst entdeckten und anfangs allgemein angewandten Verfahren. Man benutzt dort den im ersten Teil besprochenen Einflufs der Oberflächenbeschaffenheit auf die Kondensation der Dämpfe. Eine mit Silber plattierte Kupferplatte wird durch Einwirkung von Joddämpfen mit einer empfindlichen Schicht bedeckt und diese Platte der Einwirkung des Lichtes in der Camera obscura ausgesetzt. Hält man dann die Platte, ehe man die Einwirkung des Lichtes auf derselben sieht, über schwach erwärmtes Quecksilber, so schlagen sich die Dämpfe an den Stellen nieder und amalgamieren das Silber, wo das Licht gewirkt hat, und zwar um so mehr, je stärker die Einwirkung des Lichtes war. Übergiefst man nun die Platte mit einer das Jodsilber auflösenden Flüssigkeit, so bleiben die amalgamierten Stellen wie mit einem weifsen Überzug bedeckt auf der glänzenden und deshalb im diffusen Licht dunklern Silberplatte zurück. Man erhält so ein positives Bild, welches gegen das Licht nicht weiter empfindlich ist, da die empfindliche Schicht fortgenommen ist.

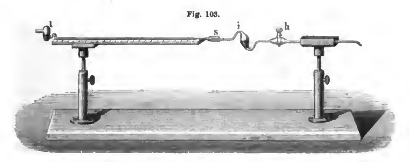
Die Gesetze der chemischen Lichtwirkung sind am ausführlichsten untersucht worden von Bunsen und Roscoe[2]) an der Einwirkung des Lichtes auf das Gemisch aus Chlor und Wasserstoff, mittels dessen es diesen Experimentatoren gelang, einen photochemischen Mefsapparat herzustellen, an welchem die in gegebener Zeit durch die Einwirkung des Lichtes erzeugte

[1]) Über Photographie sind in neuester Zeit eine Anzahl von Handbüchern erschienen. Eine kurze Darstellung des Verfahrens nebst Litteratur bis 1849 siehe Handwörterbuch der Chemie von *Liebig*, *Poggendorff* und *Wöhler*, Artikel Lichtbilder, spätere Litteratur in den Fortschritten der Physik von der Berliner physik. Gesellschaft. Das ausführlichste neuere Werk ist wohl das Lehrbuch der Photographie von Dr. *H. Vogel*. Berlin 1867—1868. Dasselbe gibt auch eine ziemlich vollständige Übersicht aller chemischen Lichtwirkungen. Die Photographie ist ebenfalls ausführlich behandelt in dem schon erwähnten Werk von *E. Becquerel*, La lumière etc. T. II.

[2]) *Bunsen* und *Roscoe*, Photochemische Untersuchungen. Poggend. Annal. Bd. C, CI, CVIII.

Menge von Salzsäure gemessen werden konnte. Die Einrichtung des Apparates zeigt Fig. 103. An eine mit einem Glashahne *h* versehene Glasröhre ist das Gefäfs *i* angeblasen, welches als Insolationsgefäfs dient; dasselbe wird vor der Lampe so geblasen, dafs eine zu der richtigen Gröfse ausgeblasene Kugel zwischen nassen Brettern zu einem Gefäfs von wenigen Millimetern Dicke zusammengedrückt wird. Das an der andern Seite des Gefäfses befindliche erst aufwärts, dann abwärts und schliefslich horizontal weiter geführte Rohr ist in das bei *s* erweiterte auf einer Skala liegende kapillare Rohr luftdicht eingeschliffen. Das kapillare Rohr ist andrerseits an das ziemlich weite Gefäfs *l* angeschmolzen, welches ebenso wie das Insolationsgefäfs ungefähr zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist. Von dem Gefäfse *l* geht ein zweites Rohr in ein mit Holzkohle und zwischengestreutem Kalihydrat gefülltes Kondensationsgefäfs.

Fig. 103.



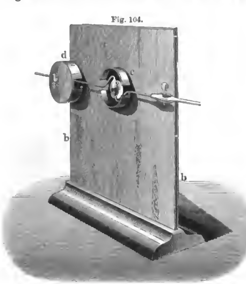
Um das Insolationsgefäfs und den ganzen Apparat mit dem Gemische aus gleichen Volumen Chlor und Wasserstoff, dem von Bunsen sogenannten Chlorknallgas zu füllen, ist das mit dem Hahne *h* versehene Rohr durch eine luftdichte Röhrenverbindung mit einem Gefäfse in Verbindung, in welchem durch einen galvanischen Strom Salzsäure von dem specifischen Gewichte 1,148 zersetzt wird. Bei dieser Zersetzung bildet sich, wie Bunsen durch eigene Versuche nachwies, immer das Gemische aus genau gleichen Volumteilen Chlor und Wasserstoffgas. Damit aber der ganze Apparat mit diesem Gemische gefüllt sei, ist es nötig, 6—8 Tage unausgesetzt dasselbe durch den ganzen Apparat strömen zu lassen, da nicht eher alle Luft vertrieben und das in den Gefäfsen *i* und *l* vorhandene Wasser mit diesen Gasen ihren Absorptionskoefficienten entsprechend gesättigt ist. Nur wenn das ganz reine Chlorknallgas in dem Apparate ist, bekommt man konstante und unzweifelhafte Resultate. Bei der Abhängigkeit der Absorption von Druck und Temperatur ist es deshalb wesentlich, dafs Druck und Temperatur stets ganz konstant erhalten werden.

Das Insolationsgefäfs befindet sich, im übrigen durch eine Kapsel vor allem übrigen Licht geschützt, vor der Öffnung eines Schirmes aufgestellt, wie Fig. 104 zeigt, durch welche das Licht auf das Chlorknallgas wirkt. Durch dieses Licht wird das Chlorknallgas in Salzsäure verwandelt und diese wird sofort von dem Wasser des Gefäfses *i* absorbiert, da das Wasser über 500 Volumen Salzsäure absorbiert. Infolge der Absorption vermindert sich, wenn der Hahn *h* geschlossen gehalten wird, der Druck in *i*, und

infolge dessen rückt das Wasser in dem auf der Skala liegenden engen Rohre vor, bis der Druck wieder der frühere geworden ist. Da das Gefäfs l sehr weit ist, wird durch das Vorrücken des Wassers das Niveau in l und somit auch der Druck, unter welchem das Gas steht, nicht geändert. Das Volumen, um welches das Wasser in dem Rohre vordringt, ist deshalb gleich dem Volumen der gebildeten und absorbierten Salzsäure. Ist das Rohr kalibriert, so kann man somit an der Skala das Volumen der gebildeten Salzsäure und damit die chemische Wirkung des Lichtes direkt messen.

In Bezug auf den Zweck, diesen Apparat zu Messungen zu benutzen, ist jedoch ein Umstand zu beachten, der Bunsen und Roscoe sofort auf eine Eigentümlichkeit der chemischen Aktion des Lichtes aufmerksam machte. Läfst man nämlich eine bestimmte Lichtquelle, etwa eine konstant brennende Flamme, auf das Insolationsgefäfs wirken, so ist die Menge der gebildeten Salzsäure nicht sofort in gleichen Zeiten dieselbe, sondern sie nimmt eine Zeit lang zu bis zu einem Maximum, welches dann gleich bleibt, solange dieselbe Lichtquelle auf das Insolationsgefäfs einwirkt. Eine genauere Untersuchung dieses Verhaltens zeigte, dafs dasselbe in einer Eigentümlichkeit der Lichtwirkung begründet ist, welche Bunsen mit dem Namen der photochemischen Induktion bezeichnete. Dieselbe besteht darin, dafs die Wirkung des Lichtes auf vorher im Dunklen gehaltenes Chlorknallgas bei Beginn der Belichtung nicht mit seiner ganzen Stärke auftritt, sondern allmählich bis zu einem Maximum wächst; ja häufig tritt in der ersten Minute der Belichtung überhaupt keine Bildung von Salzsäure ein, sondern erst nach einiger Zeit, welche abhängig ist von der Masse des belichteten Gases und von der Intensität des wirksamen Lichtes. Je gröfser die Masse des isolierten Gases ist, um so länger dauert es, ehe die Maximumwirkung erreicht wird, und um so kleiner ist die Maximumwirkung überhaupt, eine Erscheinung, die in der Absorption des Lichtes ihre Erklärung findet. Mit steigender Lichtstärke nimmt die Zeit, bis zu welcher die erste merkbare Wirkung oder das Maximum der Wirkung eintritt, sehr rasch ab.

Fig. 104.



Diese Zunahme der Wirkung zeigt sich nicht nur bei der ersten Belichtung des Chlorknallgases, sondern auch dann, wenn belichtetes Gas wieder verdunkelt wird, ja eine Verdunkelung von einer halben Stunde genügt, um die Zeitdauer der Induktion gleich derjenigen des nicht belich-

teten Gases zu machen. Diese Induktion tritt überdies nur ein, wenn das Licht direkt auf das Gasgemisch wirkt, denn wenn man die einzelnen Gase für sich insoliert, und dann zusammenbringt, so dauert es gerade so lange bis die Maximumwirkung eintritt, als wenn die Gase nicht belichtet waren.

Bunsen und Roscoe nehmen an, dafs diese Erscheinung in einem gewissen Widerstande der getrennten Gase gegen die Verbindung ihren Grund habe, der durch die Einwirkung des Lichtes erst überwunden sein müsse, ehe die Verbindung stattfinden könne; ist das der Fall, ist das Gemische induciert, so bewirkt das Licht die Verbindung selbst und bei konstanter Lichtstärke ist die Menge der gebildeten Salzsäure einfach der Dauer der Wirkung proportional. Für Messungen mufs man daher stets die Zeit des erreichten Maximums abwarten[1]).

Mit Hülfe dieser Messungen wurde zunächst der Nachweis geliefert, dafs die chemische Lichtwirkung der Intensität des wirkenden Lichtes bei gleicher Zusammensetzung desselben proportional ist. Es wurde zu dem Ende eine konstant brennende Gasflamme in verschiedenen Entfernungen von dem Insolationsgefäfs aufgestellt. Ist das angegebene Gesetz richtig, so mufs die Menge der in der Zeit einer Minute nach jedesmal erreichtem Maximum gebildeten Salzsäure dem Quadrate des Flammenabstandes umgekehrt proportional sein. Wie genau das der Fall ist, zeigt folgende Beobachtungsreihe, bei welcher nur das mittelste helle Stück einer in einem Kasten brennenden Flamme auf das Insolationsgefäfs einwirkte. Bezeichnen wir die Wirkung im Abstande 1 mit $m \, . \, J$, die in der Entfernung r mit $m \, . \, w$, so ist

$$\frac{J}{r^2} = w, \quad J = w \, . \, r^2,$$

I. Reihe.			II. Reihe.		
r	w	J	r	w	J
$0,^{m}3900$	4,43	0,673	$0,^{m}3900$	3,98	0,605
$0,^{m}3315$	6,07	0,666	$0,^{m}3310$	5,56	0,609
$0,^{m}2150$	14,07	0,650	$0,^{m}2495$	10,33	0,643

Die den Werten von w zu Grunde liegenden Einheiten sind die der willkürlich gewählten Skala. Die Zahlen für J weichen in jeder Reihe so wenig von einander ab, dafs die Unterschiede vollständig innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen[2]).

Bei verschiedenen Flammen oder Lichtquellen ist die chemische Wirkung der optisch gemessenen Intensität indes nicht proportional, da die chemische Wirkung ebenso sehr von der Wellenlänge der Strahlen wie von der Intensität derselben bedingt ist.

Um die Abhängigkeit der chemischen Wirkung des Lichts von seiner Farbe zu untersuchen, erzeugten Bunsen und Roscoe[3]) an einem wolkenlosen Tage mit Hülfe von Quarzlinsen und Quarzprismen, welche die Eigenschaft haben, die brechbarsten Strahlen des Spektrums in vorzüglichem

[1]) *Bunsen* und *Roscoe*, Photochem. Unters. III. Abhandl. Poggend. Annal. Bd. C.
[2]) *Bunsen* und *Roscoe*, Photochem. Unters. II. Abhandl. Poggend. Annal. Bd. C.
[3]) *Bunsen* und *Roscoe*, Photochem. Unters. V. Abhandl. Poggend. Annal. Bd. CVIII.

Masse durchzulassen, auf einem Schirme ein Spektrum. Der Schirm war mit einer Lösung von schwefelsaurem Chinin bestrichen, um so auch den ultravioletten Teil des Spektrums mit seinen Fraunhoferschen Linien sichtbar zu machen; derselbe war ferner mit einer Millimeterskala versehen, um an derselben die einzelnen Teile des Spektrums in ihrer Lage zu den Fraunhoferschen Linien zu orientieren. Durch einen im Schirme vorhandenen Spalt, an welchem das Spektrum vorüber geführt werden konnte, liefs man die Strahlen einer bestimmten Farbe auf das etwa 1,5 Meter hinter dem Schirme aufgestellte Insolationsgefäfs fallen. Der Spalt hatte eine solche Breite, dafs jedesmal etwa 0,08 des ganzen Spektrums das Insolationsgefäfs bestrahlte. Die beobachtete Wirkung wurde als die der mittlern dieses Bündels betrachtet.

Die Beobachtungen wurden von etwa 11 Uhr Vormittags bis $\frac{1}{2}$ nach Mittag angestellt, also während einer Zeit, während der die Höhe der Sonne sich nur sehr wenig änderte. Folgende kleine Tabelle gibt die beobachtete Wirkung der Strahlen an. Zum Verständnis derselben bemerken wir, dafs das ganze beobachtete Spektrum in 160 gleiche Teile geteilt wurde, wie es Fig. 105 zeigt, und dafs die Breite der Büschel auf der Skala bestimmt wurde. So bedeutet C bis $\frac{1}{2}DE$, dafs ein Büschel durch den Spalt ging, welches von C bis in die Mitte von D und E reichte, $\frac{1}{5}DE - E$, dafs das Bündel von $\frac{1}{5}$ des Abstandes DE hinter D bis E reichte u. s. f.

C bis $\frac{1}{2}DE$	0,5	$H_1 - \frac{3}{4}JM_1$	55,1
$\frac{1}{5}DE - E$	1,3	$\frac{1}{5}JM_1 - N_4$	38,6
$\frac{3}{4}DE - F$	1,4	$N_1 - \frac{3}{4}QR$	18,9
$\frac{1}{5}FG - G$	28,4	$\frac{1}{2}N_4Q - \frac{1}{3}RS$	12,5
$G - \frac{4}{5}GH$	54,5	$\frac{1}{2}RS - \frac{2}{3}ST$	2,1
$\frac{1}{5}GH - H$	60,5	$\frac{3}{4}ST - \frac{2}{3}UV$	1,2
$\frac{3}{5}GH - J$	52,7		

Fig. 105 gibt diese Verteilung der Lichtwirkung im Spektrum graphisch wieder, indem die in das Koordinatennetz eingetragenen zur Längsausdehnung des Spektrums senkrechten Linien an jeder Stelle der jedesmaligen Mitte der oben angegebenen Teile des Spektrums proportional aufgetragen, und dann deren Enden durch die Linie *aaaa* verbunden sind. Man sieht, wie in den roten und gelben Teilen des Spektrums bis zum Grün hin die Wirkung sehr schwach ist, wie sie im Blau sehr rasch bis zu einem ersten Maximum zwischen G und H ansteigt, dann wieder bis zu einem Minimum bei H abnimmt, zu einem zweiten aber kleinern Maximum im Ultravioletten bei J ansteigt und dann gegen die brechbarere Seite des Spektrums hin rasch abfällt, bis sie zwischen T und U unmerkbar wird.

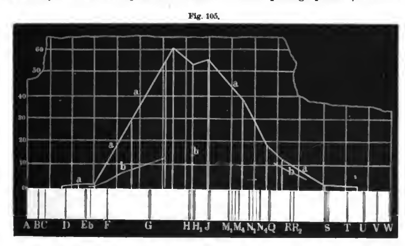
Ganz ebenso wie bei der Wirkung auf Chlorknallgas zeigt sich die Verschiedenheit der chemischen Aktion der verschieden gefärbten Strahlen bei der Wirkung auf die empfindlichen Silberpräparate. Man kann das am bequemsten nachweisen, indem man direkt das Sonnenspektrum photographiert, dabei aber, um nach der ultravioletten Seite die Strahlen möglichst wirksam zu erhalten, Quarzlinsen und Quarzprismen anwendet. Schon nach wenigen Sekunden erhielt Müller in Freiburg[1]) ein Spektrum, welches

[1]) *Müller*, Lehrbuch der Physik. Bd. I. p. 664.

etwa bei G beginnt und bis in den Raum zwischen R und S hineinreichte, während die Partieen zwischen B und F selbst nach zweistündiger Einwirkung kaum merklich geschwärzt waren. Die Dauer der Schwärzung ist aber auch in den wirksamen Teilen verschieden, so dafs man zur Herstellung schöner Photographieen des Spektrums dasselbe stückweise photographieren mufs. Thut man das, so zeigt das so photographierte Spektrum genau dieselben dunklen Linien, welche das Fluorescenzspektrum zeigt.

Mascart[1]) hat deshalb die Photographie benutzt, um die Brechungsexponenten der hauptsächlichsten dunklen Linien im Ultravioletten zu bestimmen und zugleich ein möglichst vollständiges Bild dieses Teiles des Spektrums zu entwerfen. Mascart verfuhr zu dem Ende so, dafs er in einem Spektrometer, dessen Linsen aus Quarz hergestellt waren, das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs durch eine kleine photographische Platte ersetzte, und so das Spektrum Stück für Stück photographierte, welches

Fig. 105.



durch ein Quarz- oder Kalkspathprisma erzeugt war. Um für die Hauptlinien jedesmal das Minimum der Ablenkung zu erhalten, wurde zunächst mit dem Auge für die sichtbare Linie H das Minimum hergestellt, und von hier aus dann das Okularrohr um einen bestimmten Winkel φ und gleichzeitig das Prisma in demselben Sinne um den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ gedreht. War dann der Einfallswinkel für $h = i$, so war er jetzt gleich $i + \frac{1}{2}\varphi$; um ebendenselben Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ hatte aber auch der Austrittswinkel zugenommen, oder Eintritts- und Austrittswinkel waren wieder gleich, somit die Bedingung des Minimums wieder erfüllt.

Folgende Tabelle enthält die von Mascart beobachteten Brechungsexponenten der ordentlichen Strahlen im Kalkspath und Quarz, ferner die von Mascart nach später zu besprechender Methode bestimmten Wellenlängen und für den Kalkspath gleichzeitig die von Christoffel nach seiner Formel berechneten Brechungsexponenten[2]). Die Übereinstimmung zwischen

[1]) *Mascart,* Comptes Rendus, LVII p. 789, LVIII p. 1111.
[2]) *Christoffel,* Poggend. Annal. Bd. CXXIV. Auf diese Messungen Mascarts

Beobachtung und Rechnung zeigt sich auch hier wieder bis auf drei Einheiten der 4. Decimale.

Bezeichnung der Linien	Wellenlängen	Brechungsexponenten		
		Kalkspath		Quarz
		beobachtet	berechnet	
A		1,650 13		1,539 02
B	6,866 7	1,652 96	1,653 31	1,540 99
C	6,560 7	1,654 46	1,654 66	1,541 88
D	5,888	1,658 46	1,658 43	1,544 23
E	5,267 8	1,663 54	1,663 36	1,547 18
b	5,165 5	1,664 46	1,664 36	1,549 66
F	4,859 6	1,667 93	1,667 76	1,554 29
G	4,307 5	1,676 20	1,676 05	1,558 16
H	3,967 2	1,683 30	1,683 21	1,560 19
L	3,819 0	1,687 06	1,687 02	1,561 50
M	3,728 8	1,689 66	1,689 61	1,564 00
N	3,580 2	1,694 41	1,694 38	1,566 68
O	3,440 1	1,699 55	1,699 56	1,568 42
P	3,360 2	1,702 76	1,702 87	—
Q	3,285 6	1,706 13	1,706 23	—
R	3,177 5	1,711 55	1,711 62	—
S	—	1,715 80	—	—
T	—	1,719 39	—	—

Die Bezeichnung der Strahlen stimmt mit der von Stokes und Bunsen überein, nur hat Bunsen die Gruppe *L* mit *J* bezeichnet, und die Gruppen *M* und *N* in je vier Linien resp. Gruppen aufgelöst.

Fig. 2 auf Tafel I gibt zur Orientierung die von Mascart entworfene Zeichnung, wie sie Jamin im 3. Bande seines Cours de physique mitteilt.

Wenn nach den Versuchen Bunsens auch die chemischen Wirkungen der roten, gelben und grünen Strahlen nur sehr gering sind, so können sie unter Umständen doch sehr merklich sein. So fand Becquerel[1]), dafs, wenn man eine Daguerre'sche Platte nur kurze Zeit belichtet und auf dieselbe ein Spektrum wirft, dann nicht nur die blauen und ultravioletten Partieen, sondern auch die roten und gelben deutlich abgebildet werden. Becquerel nimmt deshalb an, dafs diese Strahlen zwar nicht direkt chemische Wirkung ausüben können, dafs sie aber imstande seien, eine angefangene chemische Aktion fortzuführen, er nennt deshalb diese Strahlen rayons continuateurs. Bunsen ist zwar geneigt, hierin einen Fall der photochemischen Induktion zu sehen, indes unterscheidet sich diese von der von Bunsen beobachteten darin, dafs das Silberpräparat von wirksamen Strahlen induciert werden mufs, wenn die roten und gelben Strahlen wirken sollen, dafs die letzteren Strahlen selbst das Silberpräparat nicht inducieren können.

habe ich bereits § 28 hingewiesen, die dort mitgeteilten Konstanten sind aus den Brechungsexponenten für *B*, *G*, *P* berechnet.

1) *E. Becquerel*, La lumière etc. T. II. p. 75 ff., p. 90.

In einem Falle mufs man indes den roten und gelben Strahlen direkt chemische Wirkung zuschreiben, nämlich bei den Pflanzen. Es ist von Sachs[1]) und andern der Nachweis geliefert worden, dafs das Ergrünen des Chlorophylls ganz ebenso stark unter Wirkung des roten und gelben Lichtes erfolgt, als unter derjenigen des blauen, und dafs die von den Pflanzen absorbierte Kohlensäure vorzugsweise unter Wirkung der Strahlen gröfserer, kaum unter derjenigen kleinerer Brechbarkeit zersetzt wird.

Die chemische Wirkung ebenso wie die Fluorescenz und Phosphorescenz kommt durch eine gewisse Menge absorbierten Lichtes zustande, wie Bunsen und Roscoe durch direkte Versuche nachgewiesen haben[2]). Zu dem Ende wurde zunächst die Absorption in trocknem Chlorgase untersucht. Nach dem § 45 angeführten Absorptionsgesetze ist für ein gegebenes Medium die Absorption des Lichtes der Intensität desselben proportional. Wie wir dort erwähnten, haben Bunsen und Roscoe dieses Gesetz neuerdings geprüft. Es wurde das Licht einer Lampenflamme aus verschiedener Entfernung auf das Insolationsgefäfs geleitet und dessen Intensität J_0 gemessen. Dann wurde vor das Insolationsgefäfs ein mit Chlor gefüllter Cylinder gehalten und die Intensität J des Lichtes gemessen, nachdem es denselben durchstrahlt hatte. Folgende Zahlen beweisen, wie genau das Gesetz erfüllt ist:

Nr. der Versuche	1	2	3	4	5	6	7	8
J_0	13,52	13,20	12,85	13,51	7,21	8,34	12,39	12,84
J	3,63	3,63	3,79	3,79	2,11	2,44	3,69	3,69
$\frac{J}{J_0}$	0,267	0,275	0,295	0,281	0,293	0,293	0,298	0,287
		Mittel 0,286.						

Die Lichtstärken liegen zwischen 1 und 1,9, und die Verhältnisse $\frac{J}{J_0}$ weichen so wenig vom Mittel derselben ab, dafs die Zahlen das oben aufgestellte Gesetz auf das schönste bestätigen.

Bezeichnen wir nun den Schwächungskoefficienten des Lichts in der § 45 gegebenen Bedeutung, für Chlorgas unter dem Drucke einer Atmosphäre mit a, so wird die Intensität J nach Durchstrahlung einer Schicht von h^{mm} gegeben durch

$$J = J_0 \cdot a^h.$$

Nennen wir die Dicke der Schicht, in welcher das Licht auf 0,1 geschwächt wird, $\frac{1}{\alpha}$, so ist weiter

$$0{,}1\, J_0 = J_0 a^{\frac{1}{\alpha}}; \quad 10^{-1} = a^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$10^{-\alpha} = a$$

oder

$$J = J_0\, 10^{-\alpha h}.$$

Den Koefficienten α bezeichnet Bunsen als den Exstinktionskoefficienten des betreffenden Mittels. Zur Bestimmung desselben hat man nur Licht von der Intensität J_0 durch eine Schicht von der Dicke h_1 des Mediums gehen

[1]) *Sachs*, Lehrbuch der Pflanzenphysiologie. Leipzig 1865.

[2]) *Bunsen* und *Roscoe*, Photochem. Unters. Vierte Abhandl. Poggend. Annal. Bd. CI.

zu lassen und die Intensität J_1 zu bestimmen, man erhält dann

$$\frac{1}{h_1} \cdot \log \frac{J_0}{J_1} = \alpha.$$

Für trocknes Chlorgas unter einem Drucke von 760mm erhielten Bunsen und Roscoe als Mittel aus vielen Versuchen

$$\alpha = 0{,}005\,77 \qquad \frac{1}{\alpha} = 173{,}3,$$

oder in einer Schicht von 173,3mm wird die Intensität der chemischen Strahlen der benutzten Lampenflamme auf ein Zehntel geschwächt. Durch weitere Versuche wurde konstatiert, dafs der Wert von α der Dichtigkeit des Chlorgases direkt proportional ist, oder dafs für Chlorgas, dessen Dichte nur die Hälfte oder welches mit einem gleichen Volumen Luft gemischt ist, deren Exstinktionskoefficient bei den in diesen Versuchen vorkommenden Schichten gleich 0 ist, die Hälfte des obigen, oder

$$\alpha = \frac{1}{346{,}6}$$

ist. Läfst man nun Licht durch Chlorknallgas strahlen, das aus gleichen Volumen Chlor und Wasserstoff besteht, so mufs, wenn keine Absorption für die chemische Aktion stattfindet, der Wert von α diesem letztern gleich sein, findet aber eine der chemischen Wirkung entsprechende Absorption statt, so mufs α gröfser sein.

Die Messung des Exstinktionskoefficienten α_1 in dem Chlorknallgasgemisch wurde so ausgeführt, dafs man das Licht auf ein Insolationsgefäfs wirken liefs, dem man eine verschiedene Tiefe geben konnte, und die Menge der gebildeten Salzsäure verglich, wenn man die Dicke der insolierten Schicht einmal gleich h_1, dann gleich h_2 u. s. f. machte. In welcher Weise sich α_1 daraus bestimmen läfst, ergibt sich folgendermafsen. In der Entfernung z von der Eintrittsstelle des Lichtes ist die Intensität des Lichtes noch

$$J = J_0 \,.\, 10^{-\alpha_1 z} = J_0 \,.\, e^{-m \alpha_1 z},$$

wenn wie immer e die Basis des natürlichen Logarithmensystems und m der natürliche Logarithmus von 10 ist. In der unendlich dünnen Schicht dz ist dann diese Intensität J dieselbe, und da die chemische Wirkung in derselben der Intensität des Lichtes proportional ist, haben wir

$$dw = N \,.\, J \,.\, dz = N \,.\, J_0 e^{-m \alpha_1 z} \,.\, dz.$$

Um die Wirkung in einer Schicht von der Dicke h_1 zu bekommen, haben wir die Summe aller dieser Ausdrücke zu bilden, indem wir z nach und nach alle Werte von $z = o$ bis $z = h_1$ annehmen lassen, oder

$$w = \int_0^{h_1} N J_0 e^{-m \alpha_1 z} dz,$$

somit nach den schon oft angewandten Sätzen der mathematischen Einleitung

$$w = \frac{N J_0}{m \alpha_1} \left\{ e^{-m \alpha_1 o} - e^{-m \alpha_1 h_1} \right\}$$

oder

$$w = \frac{N J_0}{m \alpha_1} \left\{ 1 - e^{-m \alpha_1 h_1} \right\}.$$

Mit Hülfe dreier Beobachtungen kann man hieraus N, J_0 und α_1 bestimmen.

Bunsen und Roscoe erhielten auf diese Weise für α_1 den Wert

$$\alpha_1 = \frac{1}{234},$$

also einen beträchtlich gröſsern Wert, als er der optischen Absorption allein entspricht, ein Beweis, daſs für die chemische Wirkung Licht verbraucht wird, und daſs die Menge des verbrauchten Lichtes der chemischen Aktion direkt proportional ist. Die Differenz des optischen Exstinktionskoefficienten und des hier gefundenen Wertes von α_1 gibt uns den chemischen Exstinktionskoefficienten, derselbe wird $\frac{1}{723}$, das heiſst, wenn in dem Chlorknallgasgemische gar keine optische, sondern nur Absorption infolge der chemischen Aktion vorhanden wäre, würde das in das Gemisch eindringende Licht nach Zurücklegung eines Weges von 723^{mm} auf ein Zehntel seiner Stärke gebracht. Die Zahl gilt natürlich nur für das Licht der zu diesen Versuchen benutzten Flamme, für andere Lichtquellen, deren Licht anders zusammengesetzt ist, wird der Wert ein anderer. Für Morgenlicht, vom Zenith des wolkenlosen Himmels genommen, findet Bunsen $377^{mm},3$.

Dieser Nachweis, daſs die chemische Wirkung der Menge des absorbierten Lichtes direkt proportional ist, liefert uns einen sichern Beweis, daſs wir es bei derselben wieder mit einem Übergange der Bewegung des Äthers auf die Moleküle des Körpers zu thun haben. Die Bewegung der Atome in den Molekülen ist dabei eine solche, daſs die Atome in ganz neue Gleichgewichtslagen übergeführt werden, welche den neu entstehenden Verbindungen entsprechen. Dem Maximum der chemischen Wirkung im Spektrum muſs darnach das Maximum der Absorption entsprechen, entsprechend unserer Theorie der Absorption, daſs jene Wellen absorbiert werden, in deren Periode die Atome schwingen können. Bei den chemischen Wirkungen werden die Schwingungen der Atome so groſs, daſs dieselben aus ihren Gleichgewichtslagen losgerissen und in andere Gleichgewichtslagen übergeführt werden.

Viertes Kapitel.

Die Wahrnehmung des Lichtes.

§ 57.

Das menschliche Auge. Wie zur Wahrnehmung des Schalles, so besitzen wir zur Wahrnehmung des Lichtes ein besonderes Organ, das Auge.

Das menschliche Auge[1]) sowie das der Wirbeltiere besteht aus einer Kombination von Linsen verschiedener Medien, welche in ihrer Gesamtheit

[1]) *Helmholtz*, Physiologische Optik § 1—6 und § 10.

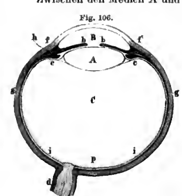
als Sammellinse wirken. Hinter dem letzten der Medien *C* (Fig. 106) ist die das Licht empfindende Nervenhaut, die Netzhaut (Retina) *i* Fig. 106 ausgebreitet.

Der ganze Apparat ist von einer festen Kapsel eingeschlossen, welche durch den innern Druck gespannt gehalten wird, und mit ihrem Inhalt den Augapfel bildet. Der gröfste Teil derselben, in der Zeichnung schattiert, ist die undurchsichtige Faser- oder Sehnenhaut (Sclerotica), welche dem Augapfel seine im ganzen kugelige Form gibt. Nur vorn von *f* bis *f'* ist dieselbe durch die durchsichtige Hornhaut ersetzt, welche ein kleines Segment einer stärker gekrümmten Kugel darstellt, und durch welche das Licht in das Auge eintritt. Am lebenden Auge sieht man zwischen den Augenlidern den vordern Teil der Sehnenhaut, das Weifse, und in der Mitte die durchsichtige Hornhaut.

Das Innere des Auges besteht aus drei Abteilungen, der vordern Augenkammer *B*, welche die wäfsrige Feuchtigkeit enthält, der Krystalllinse *A* und hinter derselben dem gallertigen Glaskörper *C*. Der Rand der Krystalllinse *A* ist mit der Grenze *ff* der Sehnenhaut und Hornhaut so fest verwachsen, dafs die Linse die vordere Augenkammer vollständig von dem Glaskörper trennt.

Zwischen den Medien *A* und *C* und der das ganze Auge umschliefsenden Sehnenhaut sind nun noch zwei Häute ausgespannt. Zunächst schliefst den Glaskörper die Netzhaut (*i*) ein. Die Nervenfasern, von deren Ausbreitung diese gebildet wird, treten durch die Öffnung der Sehnenhaut (*d*) ein, welche dem Scheitel der Hornhaut nicht genau gegenüber liegt. Ziemlich genau in der durch den Scheitel der Hornhaut und den Mittelpunkt des Auges gelegten Axe des Auges liegt der sogenannte gelbe Fleck, die Stelle der Netzhaut, wo die Empfindung am feinsten ist, weil hier die Nervenendigungen am dichtesten zusammenliegen (*p*). Der Querschnitt des Nerven (*d*), der Mariottesche Fleck, besitzt keine Nervenenden und ist deshalb blind. Nach vorn wird im allgemeinen die Nervenhaut immer dünner und die lichtempfindenden Nervenenden immer sparsamer verteilt; bei *g* hört sie ganz auf und an ihre Stelle tritt eine nervenlose Membran, welche bis zur Linse reicht und an diese angeheftet ist.

Fig. 106.



Zwischen Netzhaut und Sehnenhaut liegt das Hautsystem der Uvea, in der Figur durch einen schwarzen Strich angedeutet. Es besteht aus der Aderhaut (Chorioidea) mit einer der Netzhaut zunächst anliegenden Schicht schwarzen Pigmentes, und aus deren bis vor die Linse reichenden Fortsetzung, der Regenbogenhaut (Iris). Letztere ist wie die Aderhaut auf ihrer innern Seite mit Pigment bedeckt und liegt der Linse frei verschiebbar auf. Sie hat nur in der Mitte vor der Linse eine kreisförmige Öffnung *bb*, die Pupille, welche durch die kreisförmigen und radiären Muskelfasern der Iris erweitert und verengt werden kann. Diese Verengerung geschieht unwillkürlich bei starker Beleuchtung der Netzhaut.

Die Übergangsstelle der Aderhaut in die Regenbogenhaut, zwischen der Grenze der Sehnen- und Hornhaut und dem Rande der Linse, verdickt sich zu einem ringförmigen Wulste, dem Ciliarkörper, welcher aus einzelnen Abschnitten der Ciliarfortsätze *c* zusammengesetzt ist. Zwischen diesem Wulst und der Sehnenhaut ist endlich noch ein ringförmiger Muskel, der Ciliarmuskel *h* eingeschaltet, der mit dem Rande der Regenbogenhaut zusammenhängend, wie diese aus durchflochtenen radiären und cirkulären Fasern besteht, von denen die erstern an der Innenfläche des Randes der Horn- und Sehnenhaut festsitzen. Dadurch kann auch dieser Ring weiter oder enger gemacht und so bald mehr bald weniger auf den Ring der Ciliarfortsätze, mittelbar also auf den Rand der Linse, gedrückt werden. Auf diese Weise wird wahrscheinlich die Krystalllinse mehr oder weniger gewölbt und dadurch die Accommodation vermittelt.

Die Begrenzung der drei Medien des Auges ist eine nahe kugelförmige, um die durch den Scheitel der Hornhaut und den Mittelpunkt des Auges gehende Axe des Auges gedrehte Rotationsfläche. Die beiden ersten durchsichtigen Medien, die wässerige Feuchtigkeit *B* und die Krystalllinse *A*, dienen als ein System zweier unmittelbar an einander liegender Sammellinsen, welche bewirken, dafs das von einem leuchtenden Punkte ausgehende Licht so gebrochen wird, dafs es auf einem Punkte der unmittelbar hinter dem dritten Mittel, dem Glaskörper *C*, ausgebreiteten Netzhaut wieder in einen Punkt vereinigt wird. Auf der Fläche dieser Haut wird daher ein reelles optisches Bild der aufsen gesehenen Gegenstände entworfen; dasselbe ist umgekehrt und verkleinert. Man kann es an frisch ausgeschnittenen Augen sichtbar machen, wenn man vorsichtig den hintern mittlern Teil der Sehnen- und Aderhaut entfernt, die Netzhaut aber stehen läfst, und nun die Hornhaut eines so präparierten Auges gegen helle Gegenstände kehrt. Das Bild erscheint dann klein, hell und scharf und als ein umgekehrtes auf der stehen gebliebenen Netzhaut. Noch besser ist das Bildchen nach der Methode von Gerling zu sehen[1]), wenn man die Elemente der Netzhaut mit einem Pinsel entfernt und dann ein Täfelchen von Glas oder Glimmer in die Öffnung einschiebt.

Derjenige Punkt, welchen wir beim Sehen fixieren, wird jedesmal an der vorhin als gelber Fleck bezeichneten Stelle der Netzhaut abgebildet; dadurch, dafs diese Stelle die empfindlichste ist, sehen wir die fixierten Punkte am schärfsten. Nur dort ist zugleich das optische Bild scharf begrenzt, an andern Stellen der Netzhaut ist es weniger scharf; deshalb sehen wir in der Regel auch nur den einen Punkt deutlich, den wir fixieren, alle übrigen undeutlich. Indes ist diese Undeutlichkeit nicht allein durch die geringere Schärfe der Bilder, sondern wesentlich mit durch die geringere Empfindlichkeit der Netzhaut bedingt, da sie schon in geringer Entfernung von der fixierten Stelle viel gröfser ist als die objektive Undeutlichkeit der Netzhautbilder.

Das Gesichtsfeld eines einzelnen Auges wird bestimmt durch die Weite der Pupille und deren Lage zum Rande der Hornhaut; nach innen, oben und unten wird es durch Teile des Antlitzes, Nase, Augenbrauenrand und Wangen begrenzt, nur nach aufsen ist es ganz frei. Beide Augen zusammen überschauen, wenn ihre Axen parallel in die Ferne gerichtet sind, einen horizontalen Bogen von 180 und mehr Graden.

[1]) *Gerling*, Poggend. Annal. Bd. XLVI.

§ 58.

Gang der Lichtstrahlen im Auge. Die Lichtstrahlen, welche von einem entfernten leuchtenden Punkte auf das Auge treffen, werden zuerst von der Hornhaut gebrochen, und zwar so, dafs sie ungestört weiter gehend sich etwa 10^{mm} hinter der Netzhaut in einem Punkte vereinigen würden. Indem sie so konvergierend durch die vordere Augenkammer gehen, treffen sie auf die bikonvexe Krystalllinse, werden von dieser noch konvergenter gemacht und können infolge dessen nun schon auf der Netzhaut zur Vereinigung gelangen.

Wenn auch die einzelnen Flächen von Kugelflächen abweichen, so können wir doch zur Bestimmung der Lage und Gröfse der Bilder das Auge als ein optisches System centrierter Kugelflächen ansehen, dessen Axe mit der Axe des Auges zusammenfällt. Die einzelnen Krümmungsverhältnisse unterliegen wohl ziemlich bedeutenden individuellen Verschiedenheiten, für uns genügt es, ein mittleres Auge zu betrachten. Ein solches liefern uns folgende aus den Messungen von Helmholtz[1]) abgeleitete Werte der einzelnen Brechungsexponenten und Krümmungsradien der Teile des Auges[2]):

1. Brechungsexponent der Hornhaut, der wäfsrigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers	$^{101}/_{75} = 1{,}3465$
2. Brechungsexponent der Linse	$^{16}/_{11} = 1{,}4545$
3. Krümmungsradius der Hornhaut	$7{,}8^{mm}$
4. " " vordern Linsenfläche	$9{,}51^{mm}$
5. " " hintern "	$5{,}87^{mm}$
6. Abstand der vordern Linsenfläche von der vordern Hornhautfläche	$3{,}78^{mm}$
7. Dicke der Linse	4^{mm}.

Um aus diesen Daten den Gang der Lichtstrahlen im Auge zu erhalten, haben wir in die allgemeinen Gleichungen der §§ 38, 39 und 41 diese Daten einzusetzen und die Lage der Kardinalpunkte des Auges zu berechnen.

Wir betrachten das Auge am bequemsten als ein System von drei brechenden Flächen, deren erste die Hornhaut ist, deren andere zusammen die Linse bilden. Um die Kardinalpunkte dieses ganzen Systems zu bestimmen, haben wir dieselben zunächst für die einzelnen Teile desselben aufzusuchen. Als ersten Teil betrachten wir die Vorderfläche der Hornhaut, vor welcher Luft, hinter welcher wässerige Feuchtigkeit sich befindet, als zweiten Teil die Krystalllinse, vor und hinter welcher sich Mittel gleichen Brechungsvermögens befinden.

Die Hauptpunkte des ersten Teiles befinden sich nach § 38 beide im Scheitel der Hornhaut.

Für die zweite Hauptbrennweite haben wir nach § 36 die Gleichung

$$F_1 = \frac{nr}{n-1};$$

[1]) *Helmholtz*, Physiologische Optik. § 10.
[2]) Man sehe *Wüllner*, Einleitung in die Dioptrik des Auges. Leipzig 1866.

setzen wir darin $n = 1{,}3465$, $r = 7{,}8$, so wird

$$F_1 = \frac{1{,}3465 \cdot 7{,}8}{0{,}3465} = 30^{mm}{,}31.$$

Die erste Brennweite ist gegeben durch

$$A_1 = \frac{F_1}{n} = \frac{r}{n-1} = \frac{7{,}8}{0{,}3465} = 22^{mm}{,}22.$$

Durch die Lage der Hauptpunkte, Knotenpunkte und Hauptbrennpunkte ist das Verhalten der Hornhaut vollständig bestimmt, der erste Hauptbrennpunkt liegt hiernach um $22^{mm}{,}22$ vor der vordern Fläche der Hornhaut, der zweite um $30^{mm}{,}31$ hinter derselben.

Der zweite Teil unseres Systems ist die Krystalllinse, welche wir uns durch eine homogene Linse mit den vorhin angegebenen Konstanten ersetzt denken. Die Lage des ersten Hauptpunktes derselben erhalten wir nach § 38 aus der Gleichung

$$h_1 = \frac{(\nu - 1)\, r d}{(\nu - 1)(n-1) d - (\nu - 1) n r - (n-1)\varrho},$$

worin d die Dicke, r der Radius der vordern, ϱ der Radius der hintern Fläche der Linse ist, n den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Übergange aus der wässerigen Feuchtigkeit in die Linse und ν denjenigen beim Übergange des Lichtes aus der Linse in den Glaskörper bedeutet. Da das Brechungsvermögen der wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers dasselbe ist, so folgt zunächst $\nu = \frac{1}{n}$. Führen wir den Wert ein, so wird

$$h_1 = \frac{d r}{(n-1) d - n (r - \varrho)}.$$

Den Wert von n erhalten wir aus den angegebenen Konstanten folgendermaßsen; ist n_1 der Brechungsexponent des Lichtes beim Übergange aus Luft in wässerige Feuchtigkeit, n_2 jener bei dem Übergange aus Luft in die Linse, so ist, wie schon mehrfach erwähnt,

$$n \cdot n_1 = n_2; \quad n = \frac{n_2}{n_1},$$

somit

$$n = \frac{1{,}4545}{1{,}3465} = 1{,}0802.$$

Setzen wir für r seinen Wert $9^{mm}{,}51$, für $d = 4^{mm}$ und für ϱ, da die hintere Fläche dem ankommenden Lichte ihre konkave Seite zuwendet, $\varrho = -5^{mm}{,}87$ ein, so wird

$$h_1 = \frac{4 \cdot 9{,}51}{0{,}0802 \cdot 4 - 1{,}0802\,(9{,}51 + 5{,}87)} = -\frac{38{,}04}{16{,}2926} = -2^{mm}{,}334.$$

Der erste Hauptpunkt liegt also, übereinstimmend mit Messungen von Helmholtz, im Innern der Linse um $2^{mm}{,}334$ hinter dem Scheitel der vordern Fläche.

Für den zweiten Hauptpunkt haben wir nach § 38

$$h_2 = \frac{(n-1)\,\nu d \varrho}{(\nu - 1)(n-1) d - (\nu - 1) n r - (n-1)\varrho}$$

oder mit Beachtung, dafs $\nu = \frac{1}{n}$,

$$h_2 = -\frac{d\varrho}{(n-1)\,d - n\,(r-\varrho)} = -\frac{23,48}{16,2926} = -1^{mm},441.$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also ebenfalls in der Linse, um $1^{mm},441$ vor dem Scheitel der hintern Fläche.

Die beiden Hauptbrennweiten der Linse sind einander gleich, da sich an beiden Seiten derselben dasselbe brechende Mittel befindet.

Für die zweite Hauptbrennweite haben wir, da $\nu = \frac{1}{n}$, nach § 40

$$F_2 = \frac{r\varrho}{(n-1)\left\{\varrho - r + \frac{n-1}{n}\cdot d\right\}} = \frac{9,51\,.\,5,87}{0,0802\left\{5,87 + 9,51 - \frac{0,0802}{1,0802}\cdot d\right\}}$$

$$F_2 = \frac{55,8237}{0,0802\,(15,38 - 0,295)} = 46,142.$$

Dieser Wert der Hauptbrennweite liegt zwischen den beiden von Helmholtz durch direkte Messung erhaltenen Werten; er gibt an, dafs Strahlen, welche in der wässerigen Feuchtigkeit einander und mit der Axe der Linse parallel sind, nach der Brechung in der Linse in einem Abstande von $46^{mm},142$ hinter dem zweiten Hauptpunkte der Linse sich vereinigen, oder dafs Strahlen, welche in der wässerigen Feuchtigkeit nach einem 46,142 vor dem ersten Hauptpunkte der Linse liegenden Punkte konvergieren, nach der Brechung in der Linse parallel einander weiter gehen.

Mit Hülfe der im § 41 für ein System von mehr als zwei brechenden Flächen entwickelten Gleichungen erhalten wir die Kardinalpunkte des Auges selbst.

Den ersten Hauptpunkt des Auges bekommen wir aus der Gleichung

$$h_1 = \frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2},$$

worin h_1 den Abstand des Hauptpunktes des ganzen Systems vom ersten Hauptpunkte des ersten Systems, hier also vom Scheitel der Hornhaut, A_1 die erste Hauptbrennweite, F_1 die zweite Hauptbrennweite des ersten Systems, A_2 die erste Hauptbrennweite des zweiten Systems und D den Abstand des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems, der Krystalllinse vom zweiten Hauptpunkte des ersten Systems, hier ebenfalls der Scheitel der Hornhaut, bedeutet. Setzen wir die soeben im einzelnen bestimmten Werte, und für D die Summe des Zwischenraumes zwischen der Hornhaut und der Krystalllinse und des Abstandes des ersten Hauptpunktes der Linse vom Scheitel derselben, so wird

$$h_1 = \frac{22,22\,.\,6,114}{6,114 - 30,31 - 46,142} = -\frac{135,85308}{70,338} = -1^{mm},931.$$

Der erste Hauptpunkt des Auges liegt also in der wässerigen Feuchtigkeit um $1^{mm},931$ hinter der Vorderfläche der Hornhaut.

Die Lage des zweiten Hauptpunktes erhalten wir aus der Gleichung

$$h_2 = \frac{D\,.\,F_2}{D - F_1 - A_2},$$

worin h_2 den Abstand des zweiten Hauptpunktes der Krystalllinse bedeutet. Setzen wir die betreffenden Werte ein, so wird

$$h_2 = \frac{6{,}114 \,.\, 46{,}142}{6{,}114 - 30{,}31 - 46{,}142} = -\frac{282{,}11218}{70{,}338} = -4^{mm}{,}011.$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also um $4^{mm}{,}011$ vor dem zweiten Hauptpunkte der Linse; letzterer liegt nun um $1^{mm}{,}441$ vor der Hinterfläche der Linse, der zweite Hauptpunkt des Auges liegt also um $5^{mm}{,}452$ vor der Hinterfläche der Linse, und da letztere um $7^{mm}{,}78$ hinter dem Scheitel der vordern Hornhautfläche liegt, so liegt der zweite Hauptpunkt des Auges $2^{mm}{,}328$ hinter der Vorderfläche der Hornhaut oder $0^{mm}{,}397$ hinter dem ersten Hauptpunkte des Auges.

Die beiden Hauptbrennweiten des Auges erhalten wir nach § 41 aus den beiden Gleichungen

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + A_2 - D}$$

und die erste

$$A = F \cdot \frac{A_1 A_2}{F_1 F_2}.$$

Setzen wir in den Ausdruck für F die betreffenden Werte ein, so wird

$$F = \frac{30{,}31 \,.\, 46{,}142}{70{,}338} = 19^{mm}{,}883.$$

Der zweite Hauptbrennpunkt liegt also um $19^{mm}{,}883$ hinter dem zweiten Hauptpunkte des Auges, und da dieser um $5^{mm}{,}452$ vor der Hinterfläche der Krystalllinse liegt, um $14^{mm}{,}431$ hinter der Hinterfläche der Linse.

Da in dem Ausdrucke für die erste Hauptbrennweite

$$F_2 = A_2; \quad F_1 = n \,.\, A_1$$

ist, wenn $n = 1{,}3465$ der Brechungsexponent der wässerigen Feuchtigkeit ist, so folgt

$$A = \frac{F}{1{,}3465} = 14^{mm}{,}767.$$

Der erste Brennpunkt liegt somit um $14^{mm}{,}767$ vor dem ersten Hauptpunkte, und da letzterer um $1^{mm}{,}931$ hinter dem Scheitel der Hornhaut liegt, um $12^{mm}{,}836$ vor dem Scheitel der Hornhaut.

Es erübrigt noch die Bestimmung der Knotenpunkte; wie wir sahen, liegt der erste Knotenpunkt um die zweite Hauptbrennweite hinter dem ersten Hauptbrennpunkte, der zweite um die erste Hauptbrennweite vor dem zweiten Hauptbrennpunkte. Der erste Knotenpunkt liegt demnach $5^{mm}{,}116$ hinter dem ersten Hauptpunkte oder $7^{mm}{,}047$ hinter dem Scheitel der Hornhaut, $0^{mm}{,}734$ vor der Hinterfläche der Linse. Der zweite Knotenpunkt liegt $0^{mm}{,}337$ vor der Hinterfläche der Linse, der Abstand der beiden Knotenpunkte ist gleich $0^{mm}{,}397$, gleich dem Abstande der beiden Hauptpunkte von einander.

Der zweite Hauptbrennpunkt liegt nach obigen Rechnungen $14^{mm}{,}431$ hinter dem Scheitel der zweiten Linsenfläche. Nach Messungen von C. Krause

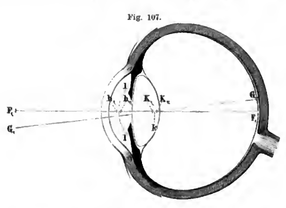
liegt die Netzhaut $14^{mm},387$ hinter der hintern Linsenfläche; der zweite Hauptbrennpunkt fällt somit auf die Netzhaut.

Die Lage der Hauptpunkte $h_{\prime}$ und $h_{\prime\prime}$, Knotenpunkte $K_{\prime}$ und $K_{\prime\prime}$ und Hauptbrennpunkte $F_{\prime}$ und $F_{\prime\prime}$ ist hiernach in der aus Helmholtz physiologischer Optik entnommenen Fig. 107 dargestellt.

Mit Hülfe dieser Kardinalpunkte kann man für ein Auge den Weg der Lichtstrahlen im Auge finden und die von irgend einem Gegenstande entworfenen Bilder ihrer Lage und Gröfse nach beurteilen. Wir können zu dem Ende das Auge uns sogar noch einfacher denken.

Da nämlich sowohl die beiden Hauptpunkte als auch die beiden Knotenpunkte sehr nahe zusammenliegen, so kann man bei Beurteilung der entstehenden Bilder ohne bemerklichen Fehler sowohl die Hauptpunkte als auch die beiden Knotenpunkte in einen Punkt zusammenziehen. Das so

Fig. 107.



noch mehr vereinfachte Schema des Auges nennt Listing das reducierte Auge. In dem reducierten Auge liegt der Hauptpunkt $2^{mm},344\,8$ hinter der Vorderfläche der Hornhaut und der Knotenpunkt k Fig. 107 um $0^{mm},476\,4$ vor der Hinterfläche der Linse. Die Brennpunkte bleiben dieselben.

Da hiernach die vor der Brechung nach dem Knotenpunkte konvergierenden Strahlen nach dem Eintritt in das Auge ungebrochen weiter gehen, so ist die Wirkung des reducierten Auges gleich der einer brechenden Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Knotenpunkt ist und deren Radius gleich ist dem Abstande des Knotenpunktes von dem Hauptpunkte, vor welcher Luft und hinter welcher Glaskörper ist. Der Krümmungsradius der Kugel würde gleich $5^{mm},124\,8$ sein. Berechnet man hiernach die Lage der Brennpunkte des so auf eine brechende Fläche reducierten Auges, so findet man dieselbe genau wie im schematischen Auge. Darin liegt auch nach den früher gegebenen Entwicklungen über die Brechung in Linsen, welche zwei Mittel trennen, die Berechtigung dieser Reduktion. In Fig. 107 ist diese Fläche durch den Bogen ll dargestellt, welche der Hinterfläche der Linse um $2^{mm},344\,8$ näher gerückt ist als der Scheitel der Hornhaut.

Wenn wir die Wirkung des reducierten Auges annehmen, so erhalten wir die Lage des Bildes auf der Netzhaut, wenn wir von dem leuchtenden

Punkte eine gerade Linie nach dem Knotenpunkte ziehen und diese bis zur Netzhaut verlängern; wo sie die Netzhaut trifft, ist der Ort des Bildes. Eine solche Linie heifst die Richtungslinie des Sehens und daher auch der Knotenpunkt der Kreuzungspunkt der Richtungslinien.

Die in diesem Paragraphen angenommenen Zahlen gelten für ein Auge, welches auf unendliche Entfernungen accommodiert ist, da angenommen ist, dafs der zweite Haupthrennpunkt auf die Netzhant fällt. Die Bilder leuchtender Punkte, welche in nicht unendlicher Entfernung liegen, fallen daher hinter die Netzhant, und auf der Netzhant selbst entstehen dann Zerstrenungskreise. Die Lage der Bilder und die Gröfse der Zerstreuungskreise ergeben sich folgendermafsen.

Was zunächst die Lage der Bilder betrifft, so erhalten wir deren Abstand f von dem Scheitel der brechenden Fläche des reducierten Auges oder den Abstand g von dem Knotenpunkte nach § 36 (5) und (5a)

$$f = \frac{a \cdot F}{a - A}; \; g = \frac{b \cdot G}{b - B},$$

wenn a den Abstand des leuchtenden Punktes vom Scheitel, A die erste, F die zweite Hauptbrennweite bedentet; nnd in der Gleichung für g die Gröfsen b, B, G die Abstände des leuchtenden Punktes und des ersten und zweiten Brennpunktes von dem Mittelpunkte hedeuten.

Für den Abstand des Bildes von der Netzhaut, welche nm F von dem Scheitel, um G von dem Mittelpunkte entfernt ist, erhalten wir daraus

$$f - F = \frac{A \cdot F}{a - A}; \; g - G = \frac{B \cdot G}{b - B}.$$

Um die Gröfse des Zerstreuungskreises auf der Netzhaut zu erhalten, dürfen wir annehmen, dafs die in das Innere des Auges eindringenden Strahlen einen Kegel bilden, dessen Basis die Pupille und dessen Spitze der Bildpunkt, dessen Höhe also gleich dem Abstande der Pnpille von dem Bildpunkte ist. Nennen wir daher den Abstand der Pupille, welche der vordern Linsenfläche aufliegt, vom Knotenpunkte δ, so ist die Höhe des Kegels gleich $g + \delta$. Dieser Strahlenkegel wird von der der Pupille parallelen Netzhaut geschnitten, welche um F von dem Scheitel des rednicierten Auges entfernt ist. Dieser Durchschnitt der Netzhaut und des Strahlenkegels ist der Zerstreuungskreis. Nennen wir den Durchmesser der Pupille p und den des Zerstreuungskreises z, so erhalten wir letztern aus der Proportion

$$p : z = g + \delta : f - F,$$

da die Durchmesser der Basis zweier Kegel gleicher Öffnung sich verhalten wie die Höhen der Kegel. Somit ist

$$z = p \, \frac{f - F}{g + \delta}.$$

Der Durchmesser der Pupille ist nach Listing $p = 4^{mm}$ und da die Dicke der Linse 4^{mm} und der Knotenpunkt um $3^{mm},523\,6$ hinter der Vorderfläche der Linse liegt, so ist $\delta = 3^{mm},523\,6$.

Rechnen wir die Abstände a und A, wie es unsere Gleichung voraus-

setzt, von dem Scheitel des reducierten Auges, so ist A sehr nahe gleich 15^{mm} und $A . F$ nahe 300. Nach Listing[1]) ist dann:

für $a - A$	$f - F$	z
∞	0^{mm}	0^{mm}
65^{m}	0,005	0,001 1
25	0,012	0,002 7
6	0,050	0,011 2
1,5	0,200	0,044 3
0,75	0,40	0,082 5
0,375	0,80	0,161 6
0,188	1,60	0,312 2
0,094	3,20	0,576 8.

Man sieht aus dieser Tabelle, dafs die Lage des Bildes sich nur wenig ändert, wenn die Entfernung des leuchtenden Punktes sehr grofs ist, wie das Bild sich dagegen rasch von der Netzhaut entfernt, wenn der Punkt nahe rückt.

Das von uns angenommene Auge wird daher in grofsen Entfernungen deutlich sehen, in kleinen, wo die Zerstreuungskreise sehr grofs werden, aber nicht; denn für diese wird das auf der Netzhaut entworfene Bild dieselbe Beschaffenheit haben wie das Bild, welches durch eine Linse entworfen wird, wenn der auffangende Schirm der Linse näher ist als die Vereinigungsweite der Lichtstrahlen.

§ 59.

Sehen in verschiedener Entfernung. Am Schlusse des vorigen Paragraphen sahen wir, dafs in dem von uns supponierten Auge nur von sehr weit entfernten Gegenständen scharfe Bilder auf der Netzhaut entstehen.

Da nun die Bilder der Netzhaut die Gesichtswahrnehmungen vermitteln, so würde ein solches Auge nur in bestimmten und zwar sehr grofsen Entfernungen deutlich sehen. Die gewöhnlichste Erfahrung zeigt uns aber, dafs das wirklich gesunde Auge nicht so beschränkt ist, sondern dafs wir sehr entfernte und sehr nahe Gegenstände bis zu einer gewissen Grenze deutlich sehen können. Man hat daher wohl geglaubt, dafs das Auge ein optischer Apparat ganz eigentümlicher Art sei, der zugleich Strahlen aus unendlicher Entfernung und aus grofser Nähe in einem Punkte vereinigen könne, auf den also die Gesetze der Lichtbrechung in Linsen nicht anwendbar seien. Dafs indes diese Ansicht falsch sei, läfst sich sehr leicht zeigen. Denn wenn man irgend einen bestimmten Punkt fixiert, so sieht man nur diesen deutlich und scharf begrenzt, alle übrigen jedoch undeutlich. Sehen wir in die Ferne, so erscheinen uns, wie man sich bei einiger Achtsamkeit leicht überzeugt, alle nahe liegenden Gegenstände mit verwischten und verschwommenen Kontouren, umgekehrt scheinen uns die fernern Gegenstände so bei Fixierung nahe gelegener Punkte. In jedem Falle erscheinen somit auf der Netzhaut Zerstreuungskreise von den

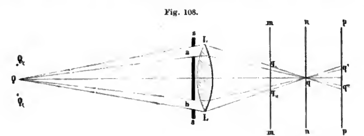
[1]) *Listing* a. a. O., Dioptrik des Auges.

nicht fixierten Punkten, der Vereinigungspunkt der von diesen ausgehenden Strahlen liegt vor oder hinter der Netzhaut, nur der Vereinigungspunkt der von den fixierten Punkten ausgehenden Strahlen fällt gerade auf die Netzhaut.

Nach den Gesetzen der Brechung in Linsen mufs nun der Vereinigungspunkt der Strahlen, welche weiter herkommen als von dem Punkte, dessen Bild gerade auf einen hinter der Linse befindlichen Schirm fällt, vor dem Schirme liegen, kommen sie aber von näher liegenden Punkten, so mufs der Vereinigungspunkt hinter dem Schirme liegen. Dafs auch dieses in dem Auge der Fall ist, zeigt der unter dem Namen des Scheinerschen bekannte Versuch[1]).

Man mache in ein Kartenblatt zwei Löcher, deren Abstand kleiner ist als der Durchmesser der Pupille, also ungefähr zwei Millimeter, halte dieselben so vor das Auge, dafs die Verbindungslinie horizontal ist, und sehe dadurch nach einer feinen Nadel, welche vertikal vor dem hellen Hintergrunde des Fensters aufgestellt ist. Fixiert man die Nadel, so sieht man dieselbe einfach und scharf begrenzt; bedeckt man das eine der Löcher, so erscheint sie weniger hell, da dann weniger Licht von ihr in das Auge fällt. Fixiert man aber einen weiter vom Auge entfernten Gegenstand, oder einen näher liegenden, so sieht man die Nadel in beiden Fällen doppelt. Bedeckt man dann eines der Löcher, so verschwindet eines der beiden Bilder, während das andere unverändert bleibt. Es verschwindet aber ein anderes Bild, wenn man einen nähern, als wenn man einen fernern Gegenstand fixiert. Fixiert man einen nähern Punkt, so verschwindet das rechts stehende der beiden Bilder, wenn man das rechte Loch verdeckt, fixiert man aber einen fernern Punkt, so verschwindet beim Verdecken des rechten Loches das linke Bild. Aus diesem Versuche folgt, dafs die Strahlen, welche von fernern Punkten als den fixierten kommen, sich vor der Netzhaut schneiden, Strahlen dagegen, welche von nähern Punkten kommen, erst hinter der Netzhaut. Denn ist LL (Fig. 108) eine Linse und Q ein

Fig. 108.



leuchtender Punkt in einem gegebenen Abstande, dessen Bild in q liegt, und bringen wir nun vor der Linse einen Schirm ss an, der nur die beiden kleinen Löcher a und b hat, so wird auf dem durch den Bildpunkt q gestellten Schirm nn nur ein einfaches Bild erscheinen, welches nur dunkler ist, als wenn die Linse unbedeckt wäre. Auf den Schirmen mm, pp, auf

[1]) *Helmholtz*, physiol. Optik. § 11.

denen bei unbedeckter Linse Zerstreuungskreise sich zeigen würden, werden aber bei dieser Vorrichtung je zwei helle Punkte $q_,$, $q_{,,}$, und q', q'' erscheinen. Wird dann das untere Loch bedeckt, so verschwindet auf dem ersten Schirme der untere Punkt $q_{,,}$, auf dem zweiten der obere q'.

Denken wir uns anstatt der Linse die brechenden Medien des Auges und statt der Schirme *mm*, *nn*, *pp* die Netzhaut des Auges, so entsteht auf derselben nur ein Bild, man sieht den Gegenstand einfach, wenn der Vereinigungspunkt der Strahlen gerade auf die Netzhaut fällt. Fällt er hinter dieselbe, wenn die Netzhaut in *mm* ist, so entstehen auf ihr zwei Bilder, und man glaubt anstatt des einen leuchtenden Punktes Q zwei zu sehen, $Q_,$ und $Q_{,,}$. Und da das Bild auf der Netzhaut beim Aufrechtstehen umgekehrt ist, so entspricht dem Eindruck des obern Bildpunktes q_1 der untere Punkt $Q_,$, und dem untern Bildpunkt $q_{,,}$ der obere Punkt $Q_{,,}$. Wird nun $q_{,,}$ verdeckt, so verschwindet von den beiden gesehenen leuchtenden Punkten der obere. Wenn also in dem Falle, daſs der Vereinigungspunkt der Strahlen hinter die Netzhaut fällt, die untere Öffnung *b* verschlossen wird, so verschwindet von den beiden gesehenen Punkten der obere. Da nun beim Scheinerschen Versuche, wenn das Auge auf ferner liegende Gegenstände eingestellt ist, von den Doppelbildern der näher liegenden Punkte beim Verdecken des linken Loches das rechte Bild verschwindet, so folgt, daſs der Vereinigungspunkt der von ihnen ausgehenden Strahlen hinter die Netzhaut fällt.

Befindet sich dagegen die Netzhaut in *pp*, so entstehen auf ihr ebenfalls zwei Bilder, q' und q''; man sieht wieder doppelt, und der eben gegebenen Entwicklung gemäſs entspricht dem Netzhautbilde q' der untere Punkt $Q_,$ und dem Bilde q'' der obere Punkt $Q_{,,}$. Das Netzhautbild q' wird aber, da die Strahlen sich vor ihr kreuzen, durch das untere Bündel, welches die Öffnung *b* durchsetzt, erzeugt; wird daher *b* verschlossen, so verschwindet das untere Bild $Q_,$. Beim Scheinerschen Versuche verschwindet, wenn das Auge auf nahe Gegenstände eingestellt ist, von den Doppelbildern der fernern bei Bedeckung des linken Loches das linke Bild, der Vereinigungspunkt der von ihnen ausgehenden Strahlen fällt daher vor die Netzhaut.

Da das Bild eines gegebenen Punktes beim Fixieren fernerer Gegenstände hinter, beim Fixieren näherer vor die Netzhaut fällt, so folgt, daſs bei Accommodation für die Nähe oder Ferne der Gang der Lichtstrahlen im Auge ein anderer wird, und zwar, daſs bei Accommodation für die Nähe die Brennweite des Auges eine kleinere ist als bei der Accommodation für die Ferne.

Diese Veränderung des Auges geschieht durch einen willkürlichen Akt, indem es ganz von unserem Willen abhängt, das Auge für die eine oder andere Entfernung einzustellen.

Der Mechanismus der Accommodation war bis auf die neueste Zeit dunkel, da durch eine Reihe verschiedener Änderungen des Auges die Brechung des Lichtes in ihm eine andere werden kann. Wir können auf diese verschiedenen Ansichten nicht eingehen[1]), besonders da nach den

[1]) Man sehe *Helmholtz* a. a. O., Geschichte der Accommodationslehre zu § 12.

neuern Versuchen von Max Langenbeck[1]), Cramer[2]) und Helmholtz[3]) kein Zweifel darüber mehr herrschen kann, dafs es eine Veränderung der Linse ist, welche die Accommodation bewirkt. An der Vorder- und Hinterfläche tritt nämlich, da vor und hinter der Linse eine Flüssigkeit anderer Brechbarkeit ist, eine Reflexion des Lichtes ein, durch welche, da die Flächen als Kugelspiegel wirken, Bilder der Gegenstände entstehen, welche Licht auf die Linse werfen. Die oben erwähnten Forscher haben nun gezeigt, wenn man von der Linse das Bild einer Lichtflamme reflektieren läfst, während das beobachtete Auge bald für die Nähe, bald für die Ferne accommodiert ist, dafs dann die Gröfse des Flammenbildes eine andere wird, und zwar kleiner, wenn das Auge für die Nähe, gröfser, wenn es für die Ferne accommodiert ist. Da nun das von Kugelspiegeln entworfene Bild um so kleiner ist, je kleiner der Krümmungsradius des Spiegels ist, so folgt aus diesen Versuchen, dafs die Verkürzung der Brennweite des Auges bei Accommodation für die Nähe durch stärkere Krümmung der Linsenflächen erzeugt wird. Bei der stärkern Krümmung wird zugleich die Vorderfläche der Linse der Hornhaut etwas genähert, die hintere nicht, die Linse wird also etwas dicker. Nach Helmholtz ist der Krümmungsradius der vordern Linsenfläche bei Accommodation für die Ferne am schematischen Auge 10^{mm}, für die Nähe 6^{mm}, der hintern für die Ferne 6^{mm}, für die Nähe $5^{mm},5$.

Nach Max Langenbeck und Henke[4]) wird diese Änderung der Linse durch die Wirkung des Ciliarmuskels (*h* Fig. 106) in der Weise hervorgebracht, dafs die cirkulären Muskelfasern bei Accommodation für die Nähe sich verkürzen, die radiären verlängert werden, und bei Accommodation für die Ferne das Umgekehrte eintritt.

Diese Accommodation des Auges ist jedoch nicht unbegrenzt, denn wenn auch bei einem normalen Auge parallel einfallendes Licht auf der Netzhaut vereinigt wird, das Auge also für unendliche Entfernungen accommodiert werden kann, so kann man in der Nähe doch nur bis zu einer gewissen Entfernung deutlich sehen. Die Strahlen, welche von leuchtenden Punkten kommen, die näher als 100^{mm} beim Auge sind, lassen sich nicht mehr auf der Netzhaut vereinigen.

Jedes Auge sieht in einer gewissen Entfernung, ohne bemerkbare Anstrengung am deutlichsten; es ist das die Entfernung, in welcher man beim Lesen unwillkürlich ein Buch hält; für ein normales Auge ist dieser Abstand nahe 2,5 Decimeter. Man nennt diese Entfernung die Weite des deutlichen Sehens oder die deutliche Sehweite.

Nicht alle Augen haben die Fähigkeit, zwischen den oben angegebenen Entfernungen zu accommodieren. Solche Augen, deren Fernpunkt nicht in unendlichem, sondern endlichem, oft nur kleinem Abstande vom Auge liegt, nennt man kurzsichtig. Das Auge hat in dem Falle eine zu kurze Brenn-

[1]) *M. Langenbeck*, Klinische Beiträge aus dem Gebiete der Chirurgie und Ophthalmologie. I. 1849. Göttingen.

[2]) *Cramer*, Über das Accommodationsvermögen. Deutsch von Doden. Leer 1855.

[3]) *Helmholtz* in Gräfe, Archiv für Ophthalm. I. und physiol. Optik. § 11 und 12.

[4]) *Henke* in Gräfe, Archiv für Ophthalm. VI.

weite, die Vereinigungspunkte der Strahlen, welche von fernen Punkten kommen, liegen vor der Netzhant. Man wird der Kurzsichtigkeit daher abhelfen dadurcb, dafs man die das Auge treffenden Strahlen weniger konvergent macht, durch Vorsetzung eines Zerstrennngsglases. Andere können parallele, aber nicht die stark divergierenden Strahlen, welcbe von nahe liegenden Punkten aus das Auge treffen, auf der Netzhaut vereinigen; deren Nahepunkt ist also in die Ferne gerückt. Mit Hülfe konvexer Brillen wird aher diesem Ühelstande ahgeholfen werden können, und dadurcb der Weitsichtige fähig sein, in die Nähe zn sehen[1]).

§ 60.

Monochromatische und chromatische Abweichung. Irradiation. In dem Auge kommen Abweichungen der Strahlen von dem eben betrachteten Gange mehrfacher Art vor. Die eigentliche sogenannte Ahweichnng wegen der Kugelgestalt, bei der die Randstrahlen in einer andern Distanz von der Linse vereinigt werden, als die centralen, zeigt sich zwar nur in sehr geringem Mafse, da einmal durcb die Iris der Rand der Linse bedeckt ist, und so dnrch die Pupille nur die mehr centralen Strahlen in das Auge dringen, und da ferner durch die eigentümliche Beschaffenheit der Linse die Mitte derselhen stärker brechhar ist als die äufsern Schichten[2]). Da nun die Randstrahlen nur äufsere Schicbten durcbsetzen, so wird dadurcb ihre Vereinigungsweite gröfser, und derjenigen der Centralstrahlen gleich. Ja es sollen sogar nach Volkmann[3]) Fälle vorkommen, hei denen infolge dieser eigentümlichen Linsenkonstruktion die mittlern Strahlen näher hei der Linse vereinigt werden als die Randstrahlen.

Dagegen finden sich Abweicbungen anderer Art, welcbe zu ganz eigentümlichen Zerstreuungsfiguren Anlafs geben, und welche Helmholtz[4]), da sie auch bei einfarbigem Lichte vorkommen, monochromatische Ahweicbungen nennt. Sie zeigen sich zwar hesonders hei nicht vollkommener Accommodation, erscheinen jedocb bei Betrachtung intensiver Licbtpunkte auch bei vollkommener Accommodation.

Es gehören bierher die eigentümlichen strahligen Figuren, als welche selbst den gesunden Augen die Sterne und entfernte Flammen erscheinen. Die Anzahl der Strahlenbüschel, welche von dem hellen Centrum radiär ausgehen, beträgt meist 8—10, sie ist für verschiedene Menscben verschieden. Auch leuchtende Punkte, welche näber liegen als der fixierte Punkt, geben zu derartigen Strahlenfiguren Veranlassung, doch unterscheiden sie sich nach Helmboltz von den erstern dadurch, dafs sie in horizontaler Richtung ausgedehnter sind, während die erstern in vertikaler Richtung ausgedehnter sind.

Von einer Lichtlinie entstehen, indem jeder Punkt von ihr solche Strahlenfiguren gibt, häufig mehrere Bilder. Dahin gehören die mehr-

[1]) Genaueres über Kurz- und Fernsichtigkeit etc. *A. Fick*, medicinische Physik. Braunschweig 1856.
[2]) *Helmholtz*, phys. Optik. § 10.
[3]) *Volkmann*, Artikel Sehen in R. Wagners physiol. Handwörterbuch.
[4]) *Helmholtz* a. a. O. § 14. *A. Fick*, Medicinische Physik.

fachen Bilder, welche die meisten Menschen von den Hörnern der Mondsichel haben.

Diese Erscheinungen rühren zwar zum Teil her von den Feuchtigkeitströpfchen, die sich meist auf der Hornhaut finden, und welche gerade so wie Wassertropfen, welche man auf eine Linsenfläche gebracht hat, die erzeugten Bilder zum Teil verzerren; teilweise haben sie aber ihren Grund in einer wirklichen Asymmetrie des Auges.

Wichtiger als diese ist die chromatische Abweichung des Auges. Das Auge ist kein achromatisches Linsensystem, wie man lange geglaubt hat, und kann es auch nicht sein, da die brechenden Medien vor und hinter der bikonvexen Krystalllinse, nahezu den gleichen und einen kleinern Brechungsexponenten besitzen als die Linse. Das Auge mufs daher dasselbe Dispersionsvermögen besitzen, als wenn es eine brechende Fläche wäre, vor welcher Luft und hinter welcher Glaskörper sich befinden, es mufs das Dispersionsvermögen des reducierten Auges haben.

Dafs das der Fall ist, haben Fraunhofers und Helmholtz's Versuche auf das entschiedenste gezeigt[1]). Fraunhofer beobachtete ein Spektrum durch ein achromatisches Fernrohr, in dessen Okular ein sehr feines Fadenkreuz angebracht war, und bemerkte, dafs er die Okularlinse dem Fadenkreuz näher bringen mufste, um dasselbe deutlich zu sehen, wenn er den violetten Teil des Spektrums betrachtete, als wenn er den roten im Gesichtsfelde hatte. Indem er mit dem einen Auge einen äufsern Gegenstand fixierte, mit dem andern den Faden im Fernrohr betrachtete, stellte er die Okularlinse so, dafs ihm der Faden ebenso deutlich erschien als das äufsere Objekt und mafs, um wieviel das Okular verschoben werden mufste, damit der Faden in verschiedenen Farben gleich deutlich gesehen wurde. Mit Berücksichtigung der chromatischen Abweichung des Okulars läfst sich daraus diejenige des Auges bestimmen. Fraunhofer fand dann, dafs ein Auge, welches ein unendlich fernes Objekt deutlich sieht, wenn dasselbe Licht ausstrahlt, das der dunklen Linie *C* entspricht, bei demselben Accommodationszustande ein Objekt, das Licht von der dem dunklen Streifen *G* nahen Farbe aussendet, in einem Abstande von 0,45 bis 0,6 Meter deutlich sieht. Aus diesen und ähnlichen Versuchen folgt, dafs in einem auf unendliche Entfernung eingestellten Auge der Brennpunkt der roten Strahlen ungefähr $0^{mm},6$ hinter dem der violetten Strahlen liegt.

Man kann die Farbenzerstreuung des Auges sehr gut dadurch sichtbar machen, dafs man mit dem Auge einen leuchtenden Punkt oder eine entfernte schmale Lichtquelle fixiert, und dann von der Seite her einen dunklen Schirm vor die Pupille schiebt (die Nase kann sehr gut durch eine kleine Drehung des Kopfes als solcher dienen), man sieht dann die Lichtlinie an der Seite, von welcher her man den Schirm vorschiebt, wenn die Pupille halb bedeckt ist, rot, an der andern Seite blau gesäumt, ja wenn die Lichtlinie nur schmal ist, sehe ich ein, wenn auch nicht sehr vollkommenes Spektrum.

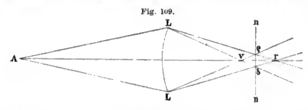
Ein leuchtender weifser Punkt erscheint weifs, wenn man ihn fixiert, aber als Zerstreuungskreis mit rotem Saum, wenn man einen ferner liegenden, als Zerstreuungskreis mit blauem Saume, wenn man einen näher liegen-

[1]) *Fraunhofer* in Gilberts Annalen. Bd. LVI. *Helmholtz* a. a. O. § 13.

den Punkt fixiert. Diese Erscheinungen, sowie die, dafs die fixierten Punkte selbst nicht farbig erscheinen, erklären sich unmittelbar bei Betrachtung des Ganges der Lichtstrahlen im Auge.

Ist ein Auge für eine gewisse Entfernung accommodiert, so fällt der Vereinigungspunkt der Strahlen mittlerer Brechbarkeit auf die Netzhaut, derjenige der roten Strahlen hinter, derjenige der violetten Strahlen vor dieselbe. Ist demnach (Fig. 109) LL die Vorderfläche des reducierten Auges, so befindet sich, wenn es auf den leuchtenden Punkt A eingestellt

Fig. 109.



ist, die Netzhaut nn in der Brennweite der mittlern Strahlen, wo zugleich die Strahlenkegel der früher vereinigten violetten und der später sich kreuzenden roten Strahlen gleiche Breite haben.

Auf der Netzhaut erscheint daher ein kleiner Zerstreuungskreis; da nun aber überall gemischte Farben vorkommen, welche zusammen als weifs empfunden werden, sieht das Auge den accommodierten Punkt A nicht farbig. Statt dessen erscheint er wie ein kleiner Kreis und gibt daher Anlafs zu einer Vergröfserung des Bildes, welche man mit dem Namen der Irradiation bezeichnet, die wegen der geringen Helligkeit der Zerstreuungskreise nur merklich ist, wenn der Punkt A hell auf dunklem Grunde ist.

Schiebt man nun vor die Pupille einen dunklen Schirm hin, der dieselbe mehr als zur Hälfte bedeckt, so sieht man, wie dann die durch die eine Hälfte eindringenden Lichtstrahlen fortgenommen werden; und würde z. B. nur das Strahlenbündel AL eingelassen, so mufs auf der Netzhaut nn ein vollständiges Spektrum entstehen, in welchem, wenn der Schirm (Fig. 109) von unten vorgeschoben wird, oben rot und unten violett ist. Da aber, wie bereits erwähnt, ein auf der Netzhaut oben beleuchteter Punkt bewirkt, dafs wir unterhalb der Augenaxe einen leuchtenden Punkt zu sehen glauben, so wird A unten, also an der Seite, von welcher her der Schirm vorgeschoben wird, rot, oben aber blau erscheinen.

Fixieren wir einen entferntern Punkt als A, so rücken die Vereinigungspunkte v und r weiter fort, es ist also dasselbe, wie wenn nn näher an LL rückt, wir müssen einen Zerstreuungskreis erhalten mit einem roten Saume. Fixieren wir dagegen einen nähern Punkt, so fallen die Punkte v und r näher an LL, wir erhalten einen Zerstreuungskreis mit blauem Saume.

Die von Plateau[1]) am ausführlichsten beschriebenen Irradiationserscheinungen lassen sich wohl sämtlich auf die erwähnten Zerstreuungserscheinungen, welche auch bei vollkommener Accommodation auftreten, zurückführen[2]). Diese Erscheinungen lassen sich im allgemeinen dahin

[1]) *Plateau*, Poggend. Annal. Ergänzungsband I.
[2]) *Helmholtz* a. a. O. § 21.

zusammenfassen, dafs stark beleuchtete Flächen gröfser erscheinen, als sie wirklich sind, während die benachbarten dunklen Flächen um ebenso viel kleiner erscheinen. Die Erscheinungen sind am auffallendsten, wenn die Accommodation nicht ganz genau ist, sie zeigen sich aber, besonders bei starker Beleuchtung, auch wenn das Auge scharf accommodiert ist.

Die auffallendsten Irradiationserscheinungen sind folgende: erstens, dafs helle Flächen auf dunklem Grunde gröfser, dunkle auf hellem kleiner erscheinen; ein weifses Quadrat auf dunklem Grunde scheint gröfser als ein schwarzes auf hellem Grunde; die helle Mondsichel scheint selbst bei scharfer Accommodation einem gröfsern Kreise anzugehören als der im Erdlicht schwach sichtbare Mond; zweitens, dafs nahe liegende helle Flächen zusammenfliefsen; ein feiner Draht vor die Sonne gehalten verschwindet, so auch ein Haar vor der hellsten Stelle einer Kerzenflamme, selbst wenn man das Auge scharf auf dasselbe einstellt; die weifsen Felder eines Schachbrettes scheinen an den Ecken zusammenzufliefsen und die schwarzen zu trennen; drittens, dafs gerade Linien unterbrochen werden: ein Lineal zwischen das Auge und eine helle Lichtflamme gehalten, scheint dort, wo die helle Flamme darüber hervorblickt, ausgezackt zu sein.

Alle diese Erscheinungen reducieren sich darauf, dafs die Ränder heller Flächen sich gleichsam vorschieben und über die benachbarten dunklen Flächen übergreifen; es geschieht das am meisten bei mangelhafter, indes auch, wenn auch nicht so stark, bei genauer Accommodation. Nun wissen wir aber, dafs in allen den Fällen Zerstreuungskreise auf der Netzhaut entstehen, bei der Accommodation wegen der chromatischen und erwähnten monochromatischen Abweichung. Durch diese wird bewirkt, dafs am Rande des Netzhautbildes die Helligkeit über die geometrische Grenze sich ausbreitet, und die Randteile des Bildes weniger hell werden. Da nun unser Auge besonders bei grofser Helligkeit kleine Lichtunterschiede weniger leicht wahrnimmt als eine wenn auch schwache Beleuchtung vorher dunkler Stellen, so folgt, dafs man bei dieser Erscheinung besonders die Verbreiterung des Hellen wahrnimmt, und dafs die Irradiation um so deutlicher wird, je heller die angesehene Fläche ist. Es folgt daraus zugleich, wie Helmholtz nachweist, dafs die Irradiation bis zu einer gewissen Grenze mit der Helligkeit der beleuchteten Fläche an Breite wächst.

Viele Physiologen und Physiker haben mit Plateau eine andere Theorie der Irradiation angenommen; sie glauben, dafs die in der Netzhaut gereizte Nervenfaser die Fähigkeit habe, den Zustand der Reizung auch in benachbarten Nervenfasern hervorzurufen, und so dort eine Empfindung hervorzubringen, ohne dafs dieselben vom Licht getroffen werden. Helmholtz indessen erklärt, wie früher schon Welcker[1]) und A. Fick[2]) diese Theorie für physiologisch nicht gerechtfertigt, und zugleich für überflüssig, da obige Erklärung für alle Einzelnheiten der Erscheinung ausreichend ist[3]).

---

[1]) *H. Welcker*, Über Irradiation etc. Giefsen 1852.

[2]) *A. Fick*, Medicinische Physik. Braunschweig 1856.

[3]) *Helmholtz*, Physiol. Optik. § 21.

§ 61.

Von den Gesichtsempfindungen. Die Lehre von den Gesichtsempfindungen, als einem rein physiologischen Gegenstande, sowie auch die Lehre von den Gesichtswahrnehmungen können in einem der Physik gewidmeten Werke nur kurz behandelt werden. Wir begnügen uns mit einer kurzen Übersicht über die wichtigsten Resultate, soweit sie in physikalischer Beziehung von Bedeutung sind und verweisen im übrigen auf die Lehrbücher der Physiologie, besonders auf das schon mehrfach erwähnte klassische Handbuch der physiologischen Optik von H. Helmholtz.

Unser Auge unterscheidet in dem dasselbe treffenden Lichte zweierlei, Quantität und Qualität, bei gleicher Qualität eine geringere oder gröfsere Helligkeit, und bei gleicher oder verschiedener Helligkeit verschiedene Farbe.

Da das Licht in der von uns angenommenen Hypothese eine Wellenbewegung des Äthers ist, ähnlich wie der Schall der Luft, so wird auch die Intensität des Lichtes der lebendigen Kraft der Ätherbewegungen gleich zu setzen sein, wie die Intensität des Schalles der lebendigen Kraft der schwingenden Luftteile. Die Lichtempfindung wird nun veranlafst durch den Stofs des bewegten Äthers gegen die Netzhaut; je stärker der Stofs ist, um so intensiver ist daher auch die Lichtempfindung; indes ist die Lichtempfindung nicht der Stärke des Stofses oder der objektiven Lichtstärke einfach proportional zu setzen, denn unser Auge unterscheidet nicht alle nachweisbar vorhandenen Lichtunterschiede; die kleinsten wahrnehmbaren Abstufungen in der Lichtempfindung entsprechen nicht gleichen Unterschieden der Lichtstärke[1]). Man beleuchte eine weifse Fläche mit einem schwachen Lichte, so dafs die Lichtstärke des von der Fläche ausgesandten Lichtes gleich h ist; man stelle dann vor die Fläche einen Stab, der auf die Fläche einen Schatten wirft, innerhalb dessen Grenzen dieselbe daher kein Licht jener ersten Quelle erhält, und beleuchte dann die Fläche durch ein zweites Licht, das ihr die Helligkeit H gibt. Die schattige Stelle der Fläche hat dann die Helligkeit H, während die übrige Fläche die Helligkeit $H + h$ hat. Ist nun die Helligkeit H nur gering, so erkennt das Auge den Schatten, es unterscheidet also die Helligkeiten H und $H + h$. Je mehr aber die Helligkeit H zunimmt, um so mehr verschwindet der Schatten, und es scheint, wie grofs auch die Helligkeit h sein mag, eine gröfsere Helligkeit H zu gehen, bei welcher das Auge die Unterschiede H und $H + h$ nicht mehr zu unterscheiden imstande ist.

So wirft das Mondlicht einen deutlichen Schatten auf eine weifse Fläche, bringt man aber eine gut brennende Lampe nahe vor das Papier, so verschwindet der Schatten, ebenso verschwindet der Schatten einer Lampe, wenn man das Sonnenlicht auf das Papier fallen läfst.

Wenn man ein auf durchsichtigem Glase ausgeführtes photographisches Bild, welches lichte Stellen und stärkere und schwächere Schatten hat, vor einen Grund von immer steigender Helligkeit hält, so findet man, dafs bei geringer Helligkeit des Grundes sehr zarte Schatten unsichtbar sind, bei gröfserer sichtbar werden, dann eine Zeitlang gleich gut sichtbar sind und

[1]) *Helmholtz*, Physiol. Optik. § 21.

bei noch gröfserer wieder verschwinden. Nun ist die Helligkeit eines bestimmten Schattens um einen bestimmten Teil der ganzen Helligkeit kleiner als die der lichten Stellen. Nennen wir letztere Helligkeit H, so wird die des Schattens sein $(1 - a)\ H$, wo a einen für einen bestimmten Schatten konstanten Wert hat, der ein ächter Bruch ist. Der Unterschied beider ist also $a \, . \, H$, welcher mit der Helligkeit H selbst gröfser und kleiner wird. Bei geringer Helligkeit ist der Unterschied aH seinem absoluten Werte nach zu klein, um wahrgenommen zu werden; er ist dann sichtbar, bis H einen gewissen gröfsten Wert erhält, und nimmt er mit H noch weiter zu, so verschwindet er wieder; trotzdem also der Unterschied aH immer gröfser wird, ist er bei einer gewissen Stärke der beiden Helligkeiten nicht mehr wahrnehmbar. Daraus geht hervor, dafs es gewisse Grade mittlerer Lichtstärke gibt, innerhalb deren das Auge für kleine Unterschiede am empfindlichsten ist; es sind das die von uns gewöhnlich beim Lesen und Schreiben gebrauchten Lichtstärken. Innerhalb dieser Grenzen kann man nach Fechner und andern bei sehr verschiedenen Graden der Helligkeit Differenzen unterscheiden, die 0,01 der ganzen Helligkeit betragen, denn es fand sich, dafs bei einem Rumfordschen Photometer bei Anwendung zweier vorher als gleich erkannter Flammen der eine Schatten nicht mehr gesehen wurde, wenn die eine Flamme 1′, die andere 10′ vom Schirme entfernt war.

Der Einflufs dieses Satzes auf die Photometrie ist klar, und man sieht, dafs bei den früher beschriebenen Photometern die Vergleichung der Lichtstärken höchstens bis auf ein Procent genau sein kann.

Unser Auge unterscheidet aufserdem das durch verschiedene Wellenlänge und demnach verschiedene Brechbarkeit bestimmte Licht verschiedener Qualität, indem es dasselbe als verschiedene Farben erkennt. Nach diesen Farben haben wir bereits früher die verschiedenen Teile des Spektrums bezeichnet. Genauer gibt Helmholtz die Farben desselben folgendermafsen an[1]).

Rot ist das weniger brechbare Ende des Spektrums bis nahe zur dunklen Linie C; von C bis D geht das Rot durch Orange, d. h. Gelbrot mit überwiegendem Rot in Goldgelb, d. h. Gelbrot mit überwiegendem Gelb über. Ersterem entspricht unter den Farbstoffen die Mennige, letzterem die Bleiglätte. Von D bis zur Linie b befindet sich dann zuerst ein Streifen reines Gelb (Chromgelb), der etwa dreimal so weit von E als von D entfernt ist, dann folgt Grüngelb und von b bis E reines Grün (arseniksaures Kupferoxyd). Zwischen E und F geht das Grün durch Blaugrün in Blau über, zwischen F und G folgen verschiedene Töne des Blau, das erste Drittel von FG, sonst einfach Blau oder Himmelblau genannt, nennt Helmholtz Cyanblau, den übrigen Teil bis gegen F Indigblau. Dem Cyanblau entspricht das Berliner Blau, der Ultramarin dem Indigblau. Jenseits der Linie G bis H oder L (nach Stokes) folgt dann Violett, und auf dieses das Ultraviolett. Letzteres ist für gewöhnlich nicht sichtbar, kann aber bei sorgfältiger Abblendung des übrigen Lichtes und bei Anwendung von Quarzprismen und Quarzlinsen auch ohne Fluorescenz wahrgenommen werden. Seine Farbe ist bei schwacher Intensität indigblau, bei gröfserer bläulich-

[1]) *Helmholtz* a. a. O. § 19.

grau. Die geringe Sichtbarkeit der ultravioletten Strahlen erklärt Helmholtz, da sie nach den Versuchen von Brücke und Knoblauch von den Augenmedien nicht absorbiert werden, aus der Unempfindlichkeit der Netzhaut für Schwingungen so kleiner Wellenlänge.

Der Farbeneindruck einer bestimmten Lichtqualität ist keineswegs konstant, sondern hängt wesentlich von der Intensität des Lichtes ab. Alle einfachen Farben nähern sich bei gesteigerter Helligkeit dem Eindruck des Weifsen; am anffallendsten das Violett, welches einen um so rötlichern Ton erhält, je lichtschwächer es ist, dagegen grauer aussieht, je heller es wird, und schon in dem im Fernrohr betrachteten Sonnenspektrum weifsgrau erscheint. Das Cyanblau des Spektrums wird bei schwacher Stärke indigblau, bei gröfserer himmelblau, weifsblau und endlich weifs. Das Grün geht durch Gelbgrün in Weifs, das Gelb direkt, aber erst bei blendender Stärke in Weifs über. Auch das Rot sah Helmholtz, als er durch ein rotes Glas nach der Sonne blickte, hellgelb werden.

Die Qualität des Lichtes hat einen bedeutenden Einflufs auf die Stärke der Lichtempfindung. Wir sind aus Gründen, die später in der Wärmelehre betrachtet werden, genötigt anzunehmen, dafs die lebendige Kraft der Ätherbewegung, also die objektive Lichtstärke vom roten Ende des Spektrums zum violetten abnimmt, für unsere Empfindung hat aber entschieden der gelbe Teil des Spektrums die gröfste Helligkeit. Die Stärke der Lichtempfindung hängt also nicht nur von der lebendigen Kraft der Ätherschwingungen ab, sondern auch von der Schwingungsdauer[1]). Deshalb hat eine auf subjektiver Schätzung beruhende photometrische Vergleichung von Licht verschiedener Farbe durchaus keinen objektiven Wert.

Wenn man zwei oder mehrere Farben mischt, so nimmt das Auge eine resultierende Farbe wahr, in der es die einzelnen Farben nicht so erkennt, wie das Ohr in einem Accord die einzelnen Töne. Es geht das schon daraus hervor, dafs das Sonnenlicht uns weifs erscheint, in dem man gewifs nicht die grofse Mannigfaltigkeit der einzelnen Farben vermutet. Helmholtz hat diesen Satz überdies durch ausgedehnte Versuche bewiesen[2]), indem er durch das Zusammenbringen verschiedener Spektra die Farben mischte oder durch rasche Rotation verschiedener farbiger Sektoren die Farbeneindrücke erst auf der Netzhaut kombinierte. Eine Mischung farbiger Pigmente kann uns, da sie Absorptionsfarben besitzen, das eine Pigment also das von dem andern reflektierte Licht absorbiert, keinen Aufschlufs geben über die durch eine Mischung der Farben entstehenden Farben. Da man früher die Mischfarben meist aus farbigen Pigmenten herstellte, so sind die Helmholtzschen Resultate von den frühern vielfach verschieden. Nach Helmholtz geben unter den Spektralfarben Weifs — Rot und Grünlichblau — Orange und Cyanblau — Gelb und Indigblau — Grünlichgelb und Violett. Das Grün des Spektrums hat keine einfache Komplementärfarbe, sondern nur eine zusammengesetzte, eine Mischung aus Rot und Violett, die Helmholtz Purpur nennt.

Mischt man andere Farben des Spektrums, so entstehen Mischfarben, die zum Teil den Spektralfarben gleich sind, zum Teil nicht. Folgende

[1]) A. a. O. § 21.
[2]) *Helmholtz*, Poggend. Annal. Bd. LXXXVII. Physiol. Optik. § 20.

Tahelle zeigt die Resultate von Helmholtz in übersichtlicher Form. In der ersten vertikalen und horizontalen Kolnmne stehen die einfachen Farhen; wo sich die horizontalen und vertikalen Reihen schneiden, steht die Farbe, die aus der Mischung der an der Spitze stehenden Farben hervorgeht.

	Violett	Indigblau	Cyanblan	Blaugrün	Grün	Grüngelb	Gelb
Rot	Pnrpur	dk. Rosa	wſs. Rosa	Weiſs	wſs. Gelb	Goldgelb	Orange
Orange	dk. Rosa	wſs. Rosa	Weiſs	wſs. Gelh	Gelb	Gelb	
Gelb	wſs. Rosa	Weiſs	wſs. Grün	wſs. Grün	Grüngelb		
Grüngelb	Weiſs	wſs. Grün	wſs. Grün	Blangrün			
Grün	wſs. Blau	Wasserbl.	Blaugrün				
Blaugrün	Wasserbl.	Wasserbl.					
Cyanblau	Indigblau						

dk. = dunkel.
wſs. = weiſs.

Die Mischung der zusammengesetzten Farhen führt zu keinen neuen Farben mehr, sondern wir erhalten ans ihnen dieselhen Farben, welche die gleichen Spektralfarben liefern, nur mehr oder weniger gesättigt, d. h. mehr oder weniger mit Weiſs gemischt. Die übrigen noch in der Sprache hezeichneten Farhen werden durch Intensitätsunterschiede obiger Farhen hewirkt. So ist Grau ein lichtschwaches Weiſs, Braun ein lichtschwaches Goldgelh u. s. w.

Die Empfindung des Lichtes verschiedener Qualität als Farhe müssen wir als einen rein physiologischen Akt ansehen, wie daraus hervorgeht, daſs Licht gleicher Qualität bei verschiedener Intensität uns als verschiedenfarbig und Licht verschiedener Qualität, einfaches und zusammengesetztes uns als gleichfarhig erscheint[1]).

Die Affektion der Netzhant dauert noch fort, anch wenn das sie hewirkende Licht aufgehört hat das Auge zu treffen.

Man überzeugt sich zunächst davon durch den hekannten Versuch, daſs eine im Kreise rasch bewegte glühende Kohle uns als feuriger Kreis, daſs ein rasch gedrehtes Rad uns als eine halh durchsichtige Scheihe erscheint. Ehenso zeigt sich die Daner des Lichteindruckes, indem ein rasch gedrehter Farbenkreisel in der Mischfarhe der einzelnen auf ihm enthaltenen farhigen Sektoren erscheint.

Zugleich zeigt sich die Daner dieser Einwirkung in den heiden Arten von Nachhildern, die wir nach dem Anhlick eines hellen Gegenstandes hahen. Schliefsen wir nach dem Anhlicke eines hellen Gegenstandes die Angen, und halten so alles Licht ah, so sehen wir noch sehr kurze Zeit ein sogenanntes positives Nachhild, indem wir die Kontonren des vorher erhlickten Gegenstandes noch wahrnehmen, und zwar die hellen Teile hell, die dunklen dunkel. Das positive Nachhild besteht nur kurze Zeit, und zeigt in dieser dnrch sein farhiges Abklingen, daſs die Eindrücke der verschiedenen Farben nicht gleiche Dauer hahen, das Nachhild erscheint zuerst hell und weiſs, dann eine kurze Zeit grün, eine noch kürzere violetthlau und schlieſslich rot.

Die positiven Nachhilder gehen, hesonders wenn man das Auge auf eine hellere Fläche richtet, in negative üher, in solche, wo das im ursprünglichen Bilde Helle dunkel erscheint und nmgekehrt. Das Ange ist demnach

[1]) *Helmholtz* a. a. O. § 20. Darlegung der Theorie von Th. Young (Lectures on natnral Philosophy).

an der gereizten Stelle unempfindlicher, und reagiert an derselben auf neues Licht nicht so stark, wie die nichtgereizte Umgebung. Darauf beruht es auch, dafs wenn man im frühern Stadium des positiven Nachbildes das Auge auf eine helle Fläche richtet, ein der Farbe desselben komplementär gefärbtes negatives Bild sich zeigt. War das positive rot, so ist das negative grünlichblau.

Ist das Auge durch eine bestimmte Farbe gereizt, so wird es für diese unempfindlich, und erblickt dann eine farblose Fläche komplementär gefärbt[1]).

Unter den Gesichtsempfindungen ist schliefslich noch die eigentümliche Erscheinung zu erwähnen, dafs ein farblos weifser Körper in einer farbigen Umgebung in der der Umgebung komplementären Farbe erscheint. Am auffallendsten zeigen das die farbigen Schatten. Wenn man im Tageslicht eine weifse Fläche noch durch die gelbrote Flamme einer Talgkerze beleuchtet, so erhält sie einen gelblichen Farbenton, wirft man dann einen Schatten von der Kerzenflamme, so erscheint der Schatten in der gelbroten Umgebung, obwohl er vom Tageslicht beleuchtet ist, entschieden blau gefärbt.

Diese Erscheinung sieht Helmholtz als eine rein psychologische an[2]), die auf der Eigentümlichkeit unseres Urteils beruht, dafs wir direkt wahrnehmbare Unterschiede für gröfser halten als solche, welche in der Anschauung nur unsicher hervortreten, oder die wir nach der Erinnerung beurteilen.

Wenden wir das auf die Kontrastfarben an, so unterscheiden sich bei denselben die betrachteten Teile des Gesichtsfeldes dadurch, dafs der eine objektiv mit farbigem Lichte beleuchtet ist, dort also eine bestimmte Farbe vorherrscht, in dem andern nicht, dort ist die Farbe der Umgebung vorhanden aber schwächer, zu dieser aber noch die sie zu weifs ergänzende Farbe. Deshalb tritt in der Empfindung die komplementäre Farbe deutlicher hervor, besonders da uns jeder Vergleich mit andern Farben fehlt, und wir nur aus der Erinnerung wissen, dafs das Papier weifs ist.

§ 62.

Von den Gesichtswahrnehmungen. Mit dem Ausdrucke der Gesichtswahrnehmungen bezeichnen wir die infolge der Gesichtsempfindungen in uns entstehenden Vorstellungen der aufser uns vorhandenen Objekte. Zur Bildung derselben bedarf es zwar immer einer psychischen Thätigkeit, dieselbe wird aber veranlafst und unterstützt durch die Beschaffenheit der Netzhautbilder.

Wir sehen zunächst immer nach einer bestimmten Richtung, und zur Bestimmung derselben dient der Satz[3]), dafs, wenn eine bestimmte Stelle der Netzhaut gereizt wird, wir die reizende Ursache und zwar, da das der

---

[1]) *Plateau*, Poggend. Annal. XXXII. *Fechner*, Poggend. Annal. XLIV u. L. *Helmholtz*, Physiol. Optik. § 22 u. 23.

[2]) *Helmholtz* a. a. O. § 24.

[3]) *Helmholtz*, Physiol. Optik. § 26.

ungeheueren Mehrzahl nach Licht aussendende Objekte sind, als Licht aussendende Objekte in der Richtung zu sehen glauben, von wo aus bei normalen Verhältnissen, d. h. bei ungestörter Lichtausbreitung, ein Lichtreiz die gereizte Stelle unserer Netzhaut treffen würde. Wir verlegen also durch unser Urteil jenes Objekt immer in die durch die gereizte Stelle und den Knotenpunkt des Auges gelegte Richtungslinie.

Das ist auch der Grund des so vielfach als einer besondern Erklärung bedürftig angesehenen Aufrechtsehens der um uns befindlichen Gegenstände, die auf der Netzhaut ein umgekehrtes Bild entwerfen. Die Richtungslinien der angesehenen Punkte kreuzen sich sämtlich im Knotenpunkte des Auges; eine unterhalb der Augenaxe gereizte Stelle der Netzhaut sieht daher auswärts einen oberhalb derselben liegenden leuchtenden Punkt. Man kann sagen, wir sehen aufrecht, weil die Bilder der Netzhaut umgekehrt sind.

An den aufser uns gesehenen Gegenständen unterscheiden wir ihre räumliche Ausdehnung und ihre räumliche Lage. Die Ausdehnung in einer zur Augenaxe senkrechten Ebene, die Gröfse der Gegenstände nach Höhe und Breite beurteilen wir nach den entsprechenden Ausdehnungen der Netzhautbilder oder nach dem Winkel, den die nach den äufsersten Punkten der gesehenen Objekte gezogenen Richtungslinien mit einander bilden. Diesen Winkel nennt man den Sehwinkel. Der Sehwinkel, der demnach die scheinbare Gröfse eines Gegenstandes mifst, hängt ab von der wirklichen Gröfse des angesehenen Gegenstandes und seiner Entfernung vom Auge, so zwar, dafs die scheinbare Gröfse gleich ist dem Quotienten aus der Gröfse des Gegenstandes und der Entfernung desselben vom Auge. Der Winkel, unter dem wir einen Gegenstand von doppelter Gröfse sehen, ist derselbe, wenn sich der Gegenstand in der doppelten Entfernung befindet, als der, unter dem uns ein Gegenstand von der Gröfse 1 in der Entfernung 1 erscheint. Die Gröfse der Netzhautbilder ist daher in beiden Fällen dieselbe. Dafs uns aber dennoch der erste Gegenstand gröfser erscheint, dafs wir also seine wahre Gröfse schätzen, ist ein rein psychischer Akt und beruht nur auf unserem Urteil, indem wir entweder von anders her die wahre Gröfse kennen und dann schliefsen, dafs er sich in der doppelten Entfernung befindet, oder umgekehrt aus der bekannten Entfernung seine Gröfse ableiten.

Dafs es in der That nur ein psychischer Akt ist, der uns über die wahre Gröfse der gesehenen Gegenstände Aufschlufs gibt, zeigen die vielfach vorkommenden Täuschungen, wenn man unbekannte Gegenstände in Entfernungen sieht, die sich nicht anderweitig schätzen lassen. So ist es eine bekannte Erfahrung, dafs fast alle, welche aus einer Ebene oder einem Hügelland zuerst an ein Hochgebirge kommen, die Höhe desselben unterschätzen.

Wird der Gesichtswinkel, unter welchem ein Gegenstand erscheint, zu klein, so kann er nicht mehr wahrgenommen werden. Die Gröfse des Gesichtswinkels, unter welchem ein Gegenstand noch sichtbar ist, läfst sich nicht allgemein bestimmen, er schwankt nach der Helligkeit des Objektes und nach der individuellen Beschaffenheit des Auges. Zwei Punkte werden noch als verschieden erkannt, wenn sie unter einem Gesichtswinkel von 60″ erscheinen, so dafs der Abstand ihrer Bilder auf der Netzhaut circa

$0^{mm},005$ beträgt[1]). Überhaupt wahrgenommen wird ein mäßig beleuchteter Gegenstand, wenn er unter einem Gesichtswinkel von circa 30″ erscheint; ein hell beleuchteter auf dunklem Grunde aber noch bei viel kleinerm Gesichtswinkel.

Die räumliche Nebeneinanderlagerung der Gegenstände in einer zur Gesichtslinie senkrechten Ebene und ihren Abstand beurteilen wir ebenso durch die entsprechende Nebeneinanderlagerung der Bilder auf der Netzhaut und durch ihre Winkeldistanz. Es gilt von ihr dasselbe, was von der Ausdehnung der Körper nach Höhe und Breite gilt.

Anders jedoch mit der Ausdehnung der Körper und ihrer Entfernung nach der dritten Ausdehnung des Raumes. Auf unserer Netzhaut erhalten wir nur Projektionen aller gesehenen Objekte, und ebenso bilden sich die in verschiedener Entfernung vom Auge befindlichen Objekte alle auf derselben Netzhautfläche ab. Ein räumliches Sehen findet daher strenge genommen nicht statt, es ist das nur Folge einer psychischen Thätigkeit. Wir wissen es, dafs die Gegenstände im Raume hinter einander liegen, und wir kennen aus Erfahrung die wahre Gröfse der meisten Gegenstände; wir schliefsen daher aus ihrer scheinbaren Gröfse auf ihre räumliche Entfernung. Ebenso sehen wir selbst bei normalem Auge die Gegenstände um so deutlicher, je näher sie der bequemsten Sehweite liegen, entferntere sehen wir undeutlicher; aus der Undeutlichkeit der feinern Kontouren, von deren Dasein wir wissen, schliefsen wir ebenfalls auf die weitere Entfernung. Ferner ist es nach der Annahme vieler Physiologen wahrscheinlich, dafs wir uns der Accommodation in so weit bewufst werden, dafs dieses Bewufstsein zur Schätzung der Entfernung beiträgt.

Wirklich räumlich sehen wir eigentlich nur nahe liegende Körper; das, sowie die Schätzung der Entfernung nahe liegender Punkte wird bewirkt durch das Sehen mit zwei Augen.

Die meisten in unserem Gesichtsfelde befindlichen Gegenstände entwerfen nämlich in unseren beiden Augen Bilder; dadurch erhalten wir daher auch zwei Empfindungen, die jedoch nur als eine wahrgenommen werden, wenn wir die Gegenstände fixieren, oder wenn sie in einer bestimmten Stellung vor dem Auge sich befinden; alle übrigen Gegenstände sehen wir wirklich doppelt. Wann wir einen Gegenstand einfach, wann doppelt sehen, hängt davon ab, welche Punkte der beiden Netzhäute von den Bildern getroffen werden; es gibt gewisse Punkte in beiden Augen, die sogenannten zugeordneten oder identischen Netzhautstellen, welche, wenn sie zugleich in beiden Augen getroffen werden, die Ursache ihrer Erregung an derselben Stelle des Raumes suchen[2]). Wenn wir nun einen Gegenstand fixieren, so konvergieren die Sehaxen nach diesem Punkte, und die Endpunkte der Sehaxen *a* (Fig. 110) werden zugleich von dem Lichte getroffen, welches von dem fixierten Punkte *m* ausgeht. Da wir den Punkt *m* dann einfach sehen, so folgt, dafs die Endpunkte der Augenaxen identische Netzhautstellen sind.

Wenn man von drei hinter einander liegenden Punkten, etwa den Spitzen dreier auf ein Brett gesteckten Nadeln die mittlere fixiert, so er-

---

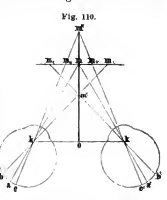
[1]) *Helmholtz* a. a. O. § 18.

[2]) *Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie. p. 327 ff. *Helmholtz*, Physiol. Optik. p. 697 ff.

scheinen die erste und die weitest entfernte doppelt. Die Doppelbilder der nächsten Nadel m' sind verkehrtseitig, das rechte $m_,$ gehört dem linken Auge und das linke dem rechten Auge, die der entfernteren Nadel m'' sind rechtseitige, das rechte gehört dem rechten, das linke dem linken Auge. Man überzeugt sich leicht davon, wenn man abwechselnd das eine und andere Auge schliefst, und beachtet, welche Bilder verschwinden[1]).

Wir schliefsen daraus, dafs auf den beiden innern Seiten wie auch auf den beiden äufsern der Netzhaut sich keine Punkte als identisch entsprechen. Es gibt indes aufser den Endpunkten der Augenaxen noch identische Netzhautstellen, die man durch Bestimmung des Horopters, d. h. derjenigen Punkte, die man aufser dem fixierten einfach sieht, aufsuchen kann[2]). Es sind im allgemeinen die Punkte identisch, welche in dem einen Auge auf der innern, im andern auf der äufsern Hälfte symmetrisch zur Augenaxe liegen, welche also z. B. von a aus gleich weit nach rechts und oben oder nach rechts und unten liegen u. s. f. Die einfach gesehenen Punkte sind jedoch nur durch feine Versuche aufzufinden. Im allgemeinen sieht man aufser dem fixierten Punkte, wenn auch ohne dafs man sich dessen bewufst ist, alles übrige doppelt, wie man sich durch einige Aufmerksamkeit überzeugen kann. Dafs man die Doppelbilder gewöhnlich nicht sieht, liegt wohl daran, dafs unsere Seele immer nur auf beschränkte Teile der Netzhaut ihre Aufmerksamkeit wenden kann, und daher nur die intensivern Eindrücke der schärfern einfachen Bilder aufnimmt.

Fig. 110.



Da wir beim Direktsehen mit beiden Augen, um einen Gegenstand einfach und deutlich zu sehen, den Augenaxen durch Wirkung der Augenmuskeln eine ganz bestimmte Stellung geben müssen, so ist es wohl keinem Zweifel unterworfen, dafs wir aus der Muskelanstrengung, die jedenfalls für einen Punkt in bestimmter Entfernung eine ganz bestimmte ist, unbewufst die Entfernung schätzen[3]). Das Auge fühlt gewissermafsen den Winkel der Augenaxen und wir berechnen aus diesem gefühlten Winkel die Entfernung *om* des Punktes *m* Fig. 110. Es gilt das jedoch, wie erwähnt, nur für kleine Entfernungen, für solche, die mehrere Meter betragen, sind die Augenaxen schon merklich parallel.

Auch die Ausdehnung nach der Tiefe eines nahen Körpers beurteilen wir zum Teil nach der verschiedenen Konvergenz der Sehaxen für die verschieden weit vom Auge entfernten Punkte desselben. Indes wirkt dazu noch ein anderer Umstand bestimmend mit, nämlich der, dafs wir von den nahen Gegenständen in beiden Augen verschiedene Bilder erhalten, die

[1]) *Ludwig* a. a. O. p. 328.

[2]) *Meissner,* Beiträge zur Physiologie des Sehorgans. Leipzig 1854. *Helmholtz* a. a. O. p. 700.

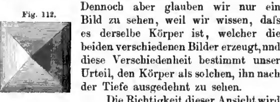
[3]) *Brücke*, Müllers Archiv. 1841. *Ludwig,* Lehrbuch der Physiologie. *Helmholtz*, Phys. Optik. p. 599 ff.

auf identischen Teilen der Netzhaut liegen, und die wir als zusammen gehörig erkennen. Denn betrachten wir z. B. eine gleichseitige vierseitige Pyramide, deren Spitze dem Gesichte zugewandt ist, so sehen wir dieselbe mit dem linken Auge wie in Fig. 111, mit dem rechten aber wie in Fig. 112.

Fig. 111.



Fig. 112.

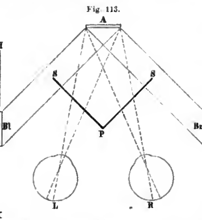


Dennoch aber glauben wir nur ein Bild zu sehen, weil wir wissen, dafs es derselbe Körper ist, welcher die beiden verschiedenen Bilder erzeugt, und diese Verschiedenheit bestimmt unser Urteil, den Körper als solchen, ihn nach der Tiefe ausgedehnt zu sehen.

Die Richtigkeit dieser Ansicht wird bestätigt durch die von Wheatstone gefundene Thatsache[1]), dafs wir durch gleichzeitige Anschauung zweier nach Art von Fig. 111 und 112 dargestellten Projektionen vollständig den Eindruck des Körperlichen, einer vierseitigen Pyramide erhalten, deren Spitze uns zugewandt ist, wenn das Bild des rechten Auges nur vom rechten, das des linken nur vom linken Auge gesehen wird, und die Netzhautbilder derselben auf identische Netzhautpunkte fallen.

Bei einiger Übung reicht es schon hin, um die Zeichnungen stereoskopisch zu sehen, wenn man vor jedes Auge eine Röhre von einigen Zollen Länge hält, etwa eine Papierrolle, und durch diese nach der für das betreffende Auge gezeichneten Abbildung hinsieht, bequemer aber und auch wenn man nicht darin geübt ist, sieht man die Erscheinungen mit Hülfe von Stereoskopen.

Fig. 113.



Die beiden verbreitetsten Apparate der Art sind das Wheatstonsche Spiegelstereoskop[2]) und das von Brewster[3]) konstruierte dioptrische Stereoskop. Ersteres besteht aus zwei gleichen Spiegeln SP (Fig. 113), welche unter einem rechten Winkel so zusammengefügt, dafs die äufsern Flächen spiegeln, in einem vorn und hinten offenen Kasten befestigt sind. Die Wände HK des Kastens sind einander und der Halbierungsebene des Winkels parallel, und um den Abstand der deutlichen Sehweite von den Spiegeln

[1]) *Wheatstone*, Poggend. Annal. Ergänzungsband I.

[2]) *Wheatstone* a. a. O.

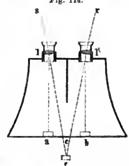
[3]) *Brewster*, Report of the British Association cet. 1849. Eine Reihe anderer Stereoskope nebst einer Menge Versuche über diesen Gegenstand finden sich im zweiten Teile von *Doves* Farbenlehre, optische Untersuchungen. p. 159—200, beschrieben. Berlin 1853. Ferner *Helmholtz*, Physiol. Optik. p. 638 ff. p. 679 ff. Betreffs der Aufstellung der Bilder, um Gegenstände, welche aufserhalb der deutlichen Sehweite liegen, durch Abbildungen richtig stereoskopisch zu sehen, vergleiche man auch *Steinhauser*, Carls Rep. Bd. XIII. p. 433.

entfernt. Stellt man nun bei *Br* eine für das rechte, bei *Bl* eine für das linke Auge gefertigte Zeichnung eines Körpers auf, so liegen die virtuellen Bilder beider in *A*, und die vor dem Spiegel befindlichen Augen *L* und *R* sehen jedes das für dasselbe gefertigte Bild. Statt der Bilder glaubt man dann den Körper zu sehen, den sie darstellen.

In dem Brewsterschen dioptrischen Stereoskop betrachtet man die beiden Zeichnungen durch zwei Röhren, die in dem Abstande der beiden Augen auf einem Kästchen befestigt sind, auf dessen Boden die Zeichnungen hingelegt werden, und dessen eine Wand zur Beleuchtung der Bilder zum Teil geöffnet werden kann.

In den Röhren sind aufserdem die Hälften einer in der Mitte durchgeschnittenen Linse von circa 15 Centimeter Brennweite angebracht, so dafs die beiden Schnittflächen nach aufsen gerichtet sind. Die Linsen dienen dazu, um die Augen bequem accommodieren zu können, und zugleich, um die Bilder ein wenig nach der Mitte zu verschieben, so dafs sie auf identische Netzhautstellen fallen. Denn sind Fig. 114 *l* und *l'* die beiden Linsenhälften, und *a* und *b* die beiden Zeichnungen, so ist klar, dafs die von *a* und *b* auf die Linsen fallenden Lichtstrahlen durch die Wirkung der Linsen als Prismen so abgelenkt werden, dafs sie nach Punkten konvergieren, die zwischen *a* und *b* liegen, und dafs leicht bewirkt werden kann, dafs sie nach dem Mittelpunkte *c* konvergieren. Die von *a* und *b* entworfenen Netzhautbilder fallen dann auf identische Punkte und man sieht die Zeichnungen als Körper.

Fig. 114.



Wir sehen demnach, dafs hauptsächlich drei Umstände unser Urteil über die Gröfse und Entfernung der wahrgenommenen Gegenstände bestimmen, die Gröfse des Sehwinkels, das Accommodationsgefühl und die Konvergenz der Sehaxen; letzterer Umstand jedoch nur für nahe liegende Gegenstände. Bei entfernteren tritt dafür die verschiedene Helligkeit und Deutlichkeit der von verschiedenen Gegenständen entworfenen Bilder hinzu. Zu diesen kommen dann noch eine Anzahl rein psychologischer Umstände, wie Erfahrung etc. hinzu, auf welche natürlich hier nicht eingegangen werden kann.

§ 63.

Das Mikroskop. Damit wir einen Gegenstand sehen können, darf nach dem Vorigen der Winkel, den die durch seine äufsersten Punkte gelegten Richtungslinien mit einander bilden, der Sehwinkel, nicht zu klein sein. Der Sehwinkel oder die scheinbare Gröfse eines Körpers hängt nun ab von der Gröfse des Körpers und von seinem Abstande vom Auge. Durch hinreichende Annäherung an das Auge kann daher der Sehwinkel eines Körpers immer gröfser gemacht werden, so dafs wir dadurch imstande sind, den Sehwinkel auch der kleinsten Körper so grofs zu machen, dafs er oberhalb jener Grenze bleibt, bei welcher das Bild auf der Netzhaut zu klein wird, um wahrgenommen zu werden.

Indes ist der Annäherung eines Körpers an das Auge, um ihn zu sehen, dadurch eine Grenze gesetzt, dafs unser Accommodationsvermögen nicht unbeschränkt ist, dafs wir die von zu nahen Gegenständen ausgehenden Lichtstrahlen nicht mehr auf der Netzhaut vereinigen können. Um einen Gegenstand scharf und deutlich, ohne zu grofse Anstrengung zu sehen, dürfen wir ihn dem Auge nicht viel weiter als bis zur deutlichen Sehweite nähern. Dadurch ist die Gröfse der Gegenstände, welche wir mit freiem Auge sehen können, begrenzt. Wir müssen uns daher optischer Hülfsmittel bedienen, um Gegenstände, welche wegen zu geringer Gröfse mit freiem Auge nicht sichtbar sind, zu sehen.

Der einfachste Apparat der Art ist die Lupe oder das einfache Mikroskop. Dasselbe besteht aus einer Sammellinse, oder einer Kombination von Sammellinsen, welche zusammen als eine wirken. Damit eine solche als Mikroskop diene, hält man dieselbe so über den zu betrachtenden Gegenstand, dafs die Linse um weniger als ihre Brennweite von demselben entfernt ist. Nach § 40 erzeugt dann die Linse von diesem Gegenstande ein aufrecht stehendes virtuelles Bild, welches in einer Entfernung f von der Linse sich befindet, welche durch die Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}$$

gegeben ist, und welche gröfser ist als der Abstand a des Gegenstandes von der Linse. Nennen wir die Gröfse des Gegenstandes Y, die des Bildes y, so ist ebenfalls nach § 40

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y.$$

Man hält die Linse dicht vor das Auge und wählt dann den Abstand a so, dafs der Abstand f des Bildes gleich der deutlichen Sehweite wird.

Die Vergröfserung einer Lupe ist das Verhältnis der scheinbaren Gröfsen des von der Lupe in der deutlichen Sehweite erzeugten virtuellen Bildes und des ebenfalls in den Abstand des deutlichen Sehens versetzten Gegenstandes. Da nun aber nach dem vorigen Paragraphen die Gröfse, in der ein Körper uns erscheint, seiner wirklichen Ausdehnung proportional, seinem Abstande vom Auge dagegen umgekehrt proportional ist, so folgt, dafs die scheinbare Gröfse zweier im gleichen Abstande vom Auge befindlicher Körper sich einfach wie ihre wahre Gröfse verhält; die Vergröfserung der Lupe wird also einfach gemessen durch

$$\frac{y}{Y} = -\frac{f}{a} \cdots (\alpha).$$

Soll f gleich der deutlichen Sehweite $= -d$ werden, so mufs der Abstand a des Gegenstandes von der Linse so gewählt sein, dafs

$$-\frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a},$$

$$a = \frac{d \cdot F}{d + F}$$

und setzen wir diesen Wert und zugleich $f = -d$ in (α), so wird

$$\frac{y}{Y} = \frac{d + F}{F}.$$

Ist z. B. die deutliche Sehweite gleich 24 Centimeter und die Brennweite der Linse gleich drei Centimeter, so würde eine solche neunfache Vergröfserung liefern und die Linse würde in einem Abstande von 2,7 Centimeter von dem zu betrachtenden Gegenstande zu halten sein.

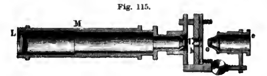
Der Ausdruck für die Vergröfserung, die eine Lupe giebt, zeigt, dafs dieselbe zunimmt, wenn die Brennweite kleiner wird, und da diese kleiner wird, wenn die Krümmung der Linsenfläche gröfser wird, dafs die Vergröfserung mit der Krümmung der Linsen zunimmt. Dadurch ist die Anwendung der Lupen beschränkt, bei grofsem Gesichtsfelde auf kleine Vergröfserungen, und bei starken Vergröfserungen auf ein kleines Gesichtsfeld. Denn je stärker die Krümmung der Linsenflächen ist, um so gröfser ist auch die Abweichung der Randstrahlen, wodurch die von den Linsen erzeugten Bilder undeutlich werden. Man kann daher nur bei schwach gekrümmten Linsen denselben einen grofsen Durchmesser geben und damit ein grofses Gesichtsfeld erhalten, während man bei starker Krümmung durch Verkleinerung des Linsendurchmessers und somit des Gesichtsfeldes die Randstrahlen abhalten mufs.

Zuweilen wendet man, um mittels eines einfachen Mikroskopes stärkere Vergröfserungen bei gröfserem Gesichtsfelde zu erhalten, sogenannte Duplets oder Triplets an, Lupen, welche aus Linsen bestehen, welche in der § 42 betrachteten Weise zusammengesetzt sind; dadurch, dafs mehrere Linsen von grofser Brennweite unmittelbar zusammengelegt sind, erhalten wir die Wirkung einer Linse von kleiner Brennweite.

Bequemer jedoch wendet man in dem Falle ein sogenanntes zusammengesetztes Mikroskop an. Dieselben zerfallen in zwei Klassen, solche, welche zu objektiver Darstellung reelle vergröfserte Bilder liefern, und solche, welche virtuelle nur dem in sie hineinschauenden Beobachter sichtbare Bilder liefern.

In dem objektiven Mikroskop wirft eine Linse von kurzer Brennweite die vergröfserten reellen Bilder auf einen Schirm. Die durch einen Heliostaten horizontal in ein sonst dunkles Zimmer geleiteten Sonnenstrahlen fallen auf die, an dem Ende des horizontal vor den Heliostaten in den Fensterladen eingeschraubten Rohres M (Fig. 115) eingesetzte Linse von

Fig. 115.



grofser Brennweite L. Die dadurch bereits konvergierenden Sonnenstrahlen treffen dann auf eine zweite am andern Ende des Rohres M befestigte Linse von kleiner Brennweite L', werden in dem Brennpunkte bei b vereinigt und treffen dort auf den zwischen zwei feinen Glasplatten befestigten Gegenstand. Von dem dadurch sehr stark beleuchteten Gegenstande aus gehen die Strahlen durch die in dem bei e offenen Rohr befestigte Linse o, welche eine nicht sehr grofse Brennweite hat, und die um etwas mehr als ihre Brennweite von b entfernt ist. Diese Linse entwirft daher auf einem entfernten Schirme ein vergröfsertes umgekehrtes Bild des bei b vor-

handenen Gegenstandes. Die. Linse *o* kann dem Gegenstande etwas mehr oder weniger genähert werden, damit auf verschieden entfernten Schirmen deutliche Bilder erzeugt werden können.

Die Vergröfserungen, welche man mit einem solchen Mikroskop erzeugen kann, sind sehr bedeutend. Nehmen wir z. B. an, die Brennweite der Linse *o* sei gleich 1,5 Centimeter, ihr Abstand von *b* sei 1,507 Centimeter, so wird in einem Abstande von drei Metern von *o* das reelle umgekehrte Bild entstehen, und zwar werden in demselben alle linearen Dimensionen fast 200mal gröfser sein als in dem abgebildeten Gegenstande. Ist daher die Gröfse des Gegenstandes ein Quadratmillimeter, so beträgt die Gröfse des Bildes 40,000 Quadratmillimeter.

Die zusammengesetzten Mikroskope der zweiten Art, die gewöhnlich einfach Mikroskope genannt werden, sind eigentlich eine Zusammensetzung des objektiven Mikroskopes und der Lupe. Sie bestehen aus einer dem zu betrachtenden Objekte nahe gebrachten Sammellinse *o* (Fig. 117), die von demselben ein vergröfsertes reelles Bild entwirft, und aus einer Lupe *p*, durch welche man dieses vergröfserte reelle Bild betrachtet. Erstere Linse wird das Objektiv, letztere das Okular genannt. Beide sind zusammen in eine Röhre *R* (Fig. 116) gefafst, das Objektiv unten bei *o*, das Okular oben bei *p*. Die Röhre ist an einer prismatischen Stange befestigt, welche in der passend hohlen Säule *P* mittels der Schraube *Q* auf und nieder gelassen werden kann. Unterhalb der Röhre bei *T* ist an der Säule eine durchbohrte Metallplatte, als Objektträger angebracht, auf welche das zu betrachtende Objekt zwischen zwei Glasplättchen eingeschlossen gelegt wird. Die Öffnung in dem Objektträger ist in der Verlängerung der Mikroskopaxe, so dafs das betreffende Objekt gerade über derselben zu liegen kommt. Unterhalb derselben ist ein kleiner Hohlspiegel angebracht, der so gegen ein Fenster gestellt ist, dafs er zerstreutes Tageslicht nach dem auf der Öffnung liegenden Objekte reflektiert. Häufig ist noch unterhalb *T* eine zweite drehbare mit Öffnungen verschiedener Gröfse versehene Metallplatte *d* angebracht, die dazu dient, von dem Spiegel *S* mehr oder weniger Licht zum Objekt zu lassen.

Als Objektivlinsen werden Linsen von sehr kleiner Brennweite, höchstens fünf Millimeter angewandt, um einmal eine starke Vergröfserung zu erzielen, ohne das Rohr des Mikroskopes zu lang machen zu müssen, und zugleich um eben dadurch ein grofses Gesichtsfeld zu erhalten. Denn wenn auch das durch das Objektiv erzeugte reelle Bild sich in Bezug auf die Erzeugung neuer Bilder gerade so verhält, als befände sich an seiner Stelle ein wirklicher Gegenstand, so unterscheidet es sich von letzterm dadurch, dafs es nicht nach allen Seiten Licht aussendet, sondern dafs von dem reellen Bilde aus nur solche Strahlen das Okular treffen, welche rückwärts verlängert durch das Objektiv gehen. Die gesamten das Okular treffenden Strahlen sind daher von einem Kegel umschlossen, dessen Basis das Okular und dessen Spitze die Mitte des Objektivs ist, wie eine Betrachtung der Fig. 117 sofort erkennen läfst. Je weiter nun das Okular *p* von *o* entfernt ist, um so spitzer wird der Kegel, um so kleiner daher auch das Gesichtsfeld *ab*, welches gleich der Basis des über *o* hinaus verlängerten Kegels an der Stelle des Objektes ist.

Andererseits ist, wie ebenfalls Fig. 117 zeigt, die Gröfse des Gesichts-

feldes der Gröfse des Okulares proportional, das Okular ist daher von gröfserm Durchmesser, und um die Abweichung der Randstrahlen zu vermeiden, von gröfserer Brennweite.

In der Anordnung der Objektive und Okulare findet sich in den Mikroskopen aus verschiedenen Fabriken manche Verschiedenheit. Statt der einfachen Objektivlinsen werden achromatische Kombinationen angewandt und aufserdem vielfach anstatt eines achromatischen Linsenpaares mehrere, um

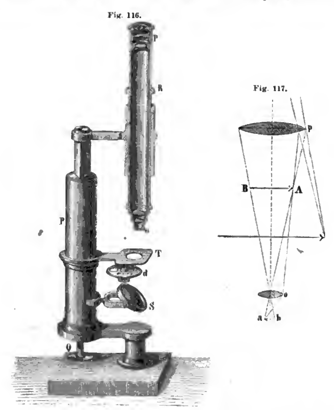


Fig. 116.

Fig. 117.

durch deren Zusammenwirken eine kleine Brennweite ohne sphärische Abweichung zu erhalten. Gleiches gilt vom Okular, welches ebenfalls aus mehreren Linsen zusammengesetzt wird. Die Wirkung derselben wird man sich nach dem Angegebenen in besondern Fällen leicht erklären können[1]).

Um die Deutlichkeit der Bilder zu erhöhen, ist aufserdem durch An-

[1]) Genaueres über das Mikroskop siehe *H. von Mohl*, Mikrographie. Tübingen 1846. *Harting*, Theorie, Gebrauch und Geschichte des Mikroskops, aus dem Holländischen übersetzt von *Theile*. Braunschweig 1859. *Nägeli* und *Schwendner*, Das Mikroskop. Leipzig 1867.

bringen passender Blendungen in den Mikroskopröhren an der Stelle, wo die reellen Bilder sich befinden, dafür Sorge getragen, dafs aufser den vom reellen Bilde ausgesandten Lichtstrahlen kein Licht durch das Okular ins Auge gelangt.

Die neuern vollkommnern Mikroskope sind so eingerichtet, dafs man mit denselben verschiedene Vergröfserungen herstellen kann. Bei denjenigen, bei welchen Okular und Objektiv in fester Entfernung von einander sind, geschieht das mittels verschiedener Objektive und Okulare, bei andern dadurch, dafs man das Objektiv dem Objekte mehr oder weniger nähern und dem entsprechend die Entfernung des Okulars vom Objektiv regeln kann. In allen Fällen wird aber das Okular so gestellt, dafs das reelle Bild, welches das Objektiv entwirft, sich in gleichem Abstande vom Okular befindet. Um daher bestimmte Stellen des Bildes mit dem Auge fixieren zu können, ist in manchen Mikroskopen an dieser Stelle ein sogenanntes Fadenkreuz ausgespannt, zwei sehr feine Fäden, die sich unter einem rechten Winkel auf der Axe des Mikroskopes kreuzen. Bei andern sind, um sie als Mefsapparate benutzen zu können, an derselben Stelle planparallele Glasplatten angebracht, auf denen in bestimmten sehr kleinen Abständen eine Menge paralleler, sehr feiner Linien eingeschnitten ist, sogenannte Glasmikrometer.

§ 64.

Das Fernrohr. Die scheinbare Gröfse eines Gegenstandes nimmt nicht nur ab mit dessen wahrer Gröfse, sondern auch in demselben Verhältnis, als die Entfernung desselben vom Auge zunimmt. Wie es nun der Zweck des Mikroskopes ist, von Gegenständen, deren wahre Gröfse zu gering ist, als dafs sie in deutlicher Sehweite wahrgenommen werden können, dort ein vergröfsertes Bild zu erzeugen, so ist es die Aufgabe der Fernrohre, von Gegenständen, deren scheinbare Gröfse wegen eines zu grofsen Abstandes derselben vom Auge zu klein ist, um noch deutlich wahrgenommen zu werden, in der Weite des deutlichen Sehens ein Bild zu entwerfen, und dieses zugleich so zu vergröfsern, dafs es deutlich wahrgenommen werden kann.

Jedes Fernrohr besteht daher aus zwei wesentlichen Teilen, dem Objektiv, welches von dem entfernten Gegenstande in der Nähe des Auges ein Bild entwirft, und dem Okular, welches dieses Bild in die Entfernung des deutlichen Sehens bringt und zugleich vergröfsert.

Die verschiedenen Arten der Fernrohre unterscheiden sich nach der Einrichtung des Objektivs in dioptrische und katoptrische; erstere erzeugen das reelle Bild durch eine Sammellinse, letztere durch einen Hohlspiegel; nach der Einrichtung des Okulars in astronomische und terrestrische; erstere liefern umgekehrte, letztere aufrechtstehende Bilder des Gegenstandes, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist.

Das dioptrische Objektiv besteht aus einer achromatischen Sammellinse von ziemlich grofser Brennweite und grofsem Durchmesser. Denn die Lichtstärke des Bildes und somit auch zum Teil seine Deutlichkeit ist um so gröfser, je mehr Licht von den einzelnen Punkten des Objekts das Objektiv trifft. Deshalb wählt man dasselbe möglichst grofs, und um dann keine Undeutlichkeit infolge der Abweichung der Randstrahlen zu erhalten, wählt man eine grofse Brennweite, die bei diesen Apparaten, wo das Bild

immer in einem der Hauptbrennweite nahen Abstande erzeugt wird, von keiner Unbequemlichkeit begleitet ist.

Bei den astronomischen Fernrohren wird das von dem Objektiv erzeugte Bild durch ein einfaches Mikroskop, als Okular, betrachtet. Das Okular besteht demnach aus einer Sammellinse oder einer Kombination von Sammellinsen, die als eine Sammellinse von gröfserer Brennweite wirken. Da das Okular als Lupe wirken soll, so befindet es sich in einem solchen Abstande vom Objektiv, dafs das Bild von dem Okular etwas weniger, als die Brennweite des Okulars beträgt, entfernt ist; da das Bild von dem Objektiv nahezu um die Brennweite des Objektivs entfernt ist, so ist der Abstand von Okular und Objektiv nahezu gleich der Summe der Brennweiten von Objektiv und Okular.

Das Okular soll das Bild stets in die Weite des deutlichen Sehens versetzen. Damit deshalb das Fernrohr für verschiedene Augen brauchbar ist, und mittels desselben verschieden entfernte Gegenstände gesehen werden können, ist es gegen das Objektiv verstellbar, es kann ihm genähert oder von ihm entfernt werden. Je näher die zu betrachtenden Gegenstände sind, um so weiter ist auch das Bild von dem Objektiv entfernt, um so weiter mufs daher das Okular von dem Objektiv entfernt werden.

Um die durch ein solches Fernrohr erhaltene Vergröfserung zu bestimmen, müssen wir das Verhältnis der scheinbaren Gröfse des Gegenstandes und des durch das Okular in die deutliche Sehweite versetzten Bildes aufsuchen.

Wegen der grofsen Entfernung des Gegenstandes vom Auge dürfen wir annehmen, dafs der Gesichtswinkel des Gegenstandes vom Auge aus gerechnet gleich ist dem, unter welchem der Gegenstand von der Mitte des Objektives aus erscheint. Da nun nach dem Frühern zwischen der Gröfse des reellen Bildes y und des Gegenstandes Y die Beziehung besteht

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y,$$

so folgt, dafs der Gesichtswinkel, unter dem das reelle Bild vom Objektiv aus erscheint, gleich ist dem des Gegenstandes; oder vom Objektiv aus gesehen ist die scheinbare Gröfse des Gegenstandes

$$g = \frac{Y}{a} = -\frac{y}{f}$$

gleich der des reellen Bildes. Dies reelle Bild befindet sich in einem Abstande f' vor dem Okular, von der Mitte des Okulars aus gesehen ist demnach die scheinbare Gröfse des Bildes

$$g' = \frac{y}{f'}$$

und dies ist auch von der Mitte des Okulares aus gesehen die scheinbare Gröfse des von dem Okulare erzeugten vergröfserten Bildes, da auch hierfür die Relation besteht

$$\frac{y'}{d} = \frac{y}{f'},$$

wenn y' die Gröfse des virtuellen Bildes und $-d$ sein Abstand vom Okular ist.

Vernachlässigen wir nun den Abstand des Auges vom Okular, so sind g und g' die scheinbaren Gröfsen des Gegenstandes und des Bildes und wir erhalten

$$\frac{g'}{g} = -\frac{f}{f'}.$$

Der Abstand f ist immer nahezu gleich der Brennweite des Objektivs, f' der des Okulares, so dafs wir ohne bedeutenden Fehler setzen können

$$\frac{g'}{g} = -\frac{F}{F'}.$$

Die durch das Fernrohr erzeugte Vergröfserung ist also direkt proportional der Brennweite des Objektivs und umgekehrt derjenigen des Okulars. Das Bild ist, wie das Vorzeichen — beweist, ein umgekehrtes.

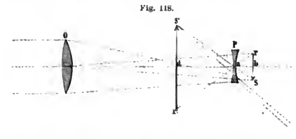
Die Gröfse des Gesichtsfeldes ist gerade wie beim Mikroskop durch den Kegel bestimmt, dessen Spitze die Mitte des Objektivs, dessen Basis das Okular ist.

Um das Fernrohr als Mefsinstrument zu benutzen, wird in demselben ein Fadenkreuz angebracht, in gleicher Weise, wie wir es beim Mikroskop erwähnten, also in dem Abstande vom Okular, dafs es an derselben Stelle sich befindet, wo das reelle Bild entsteht. Da das Fadenkreuz immer in demselben Abstande vom Okular sich befinden mufs, so ist es mit demselben verschiebbar.

Bei dem astronomischen Fernrohr ist das Bild umgekehrt; da dieses zu manchen Zwecken unbequem ist, hat man in dem terrestrischen oder Erdfernrohr mit dem Objektiv ein zusammengesetztes Okular verbunden, welches als schwaches Mikroskop wirkt. Eine passende Linsenkombination entwirft von dem reellen Bilde ein neues Bild, und dieses wird durch die Okularlinse betrachtet.

Einfacher wird dieser Zweck bei dem Galileischen Fernrohre dadurch erreicht, dafs als Okular eine Konkavlinse verwandt ist. Ist O Fig. 118 das

Fig. 118.



Objektiv eines solchen Fernrohres, welches bei rs ein reelles Bild des entfernten Gegenstandes entwerfen würde, so ist bei diesen Fernrohren bei P ein Konkavglas angebracht, in welchem die Strahlen gebrochen werden, ehe sie sich im reellen Bilde vereinigt haben. Der Abstand ab des Konkavglases von dem Orte des Bildes rs ist etwas gröfser als die Zerstreuungsweite des Glases; die nach den verschiedenen Punkten von rs konvergierenden Strahlen werden daher durch das Glas P so abgelenkt, dafs bei $r's'$

ein virtuelles Bild entsteht, in einem Abstande f, so dafs (§ 40)

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{F'} + \frac{1}{a}.$$

Man nimmt nun ein Okular von kleiner Zerstreuungsweite, so dafs, wenn $ab = -a$ nur wenig von F' verschieden ist, f gleich der deutlichen Sehweite wird, und bekommt dann ein aufrecht stehendes vergröfsertes Bild des Gegenstandes.

Die erhaltene Vergröfserung wird gerade wie beim astronomischen Fernrohr bestimmt. Die scheinbare Gröfse des Gegenstandes ist auch hier wieder

$$g = \frac{rs}{cb}$$

gleich der scheinbaren Gröfse des Bildes von der Mitte des Objektives an gerechnet. Die scheinbare Gröfse des Bildes ist aber, wenn wir annehmen, das Auge befinde sich unmittelbar am Okular,

$$g' = \frac{r's'}{ad} = \frac{rs}{ab}.$$

Demnach ist die Vergröfserung

$$\frac{g'}{g} = \frac{cb}{ab} = \frac{F}{F'},$$

wenn F die Brennweite des Objektives, F' diejenige des Okulars bedeutet, da die Abstände cb und ab sich wenig von den beiden Brennweiten unterscheiden.

Da bei dem Galileischen Fernrohr die Strahlen von dem Okulare aus sofort divergieren, so ist das Gesichtsfeld immer nur sehr klein, es wird bei der Annahme, dafs das Auge unmittelbar am Okulare ist, durch die Öffnung eines Kegels gemessen, dessen Spitze die Mitte des Objektives und dessen Basis die Pupille des Auges ist[1]). Man kann daher, wenn das Gesichtsfeld einigermafsen grofs sein soll, immer nur kleine Vergröfserungen damit erzielen. Daher werden diese Fernrohre auch fast nur zu Zwecken benutzt, wo kleine Vergröfserungen ausreichen, wie zu Theaterperspektiven etc.

Von den dioptrischen Fernrohren unterscheiden sich die katoptrischen dadurch, dafs als Objektiv anstatt der Sammellinse ein Hohlspiegel verwandt wird, dessen reelles Bild dann durch ein Mikroskop betrachtet wird. Sie wurden konstruiert, so lange man noch nicht imstande war, grofse, reine und achromatische Objektive zu konstruieren. Jetzt sind die Spiegelteleskope auch auf den Sternwarten meist durch die Refraktoren verdrängt.

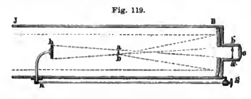
Die Einrichtung dieser Apparate ergibt sich aus beistehendem Schema des Gregoryschen Teleskopes. Das Rohr ist mit seinem Ende J gegen den zu betrachtenden Gegenstand gerichtet. Die in dasselbe eintretenden Strahlen treffen den Hohlspiegel H, der bei ab ein kleines reelles Bild entwirft. Der Hohlspiegel ist in der Mitte, dort, wo das Okularrohr eingesetzt ist, durchbohrt. Dem Okulare o gegenüber ist ein zweiter kleiner Hohlspiegel h angebracht, der von dem reellen Bilde ab ein zweites reelles Bild $a'b'$ nahe

[1]) *Lubimoff*, Poggend. Annal. Bd. CXLVIII, bestimmt das Gesichtsfeld des Galileischen Fernrohrs etwas anders; er findet es abhängig von der Gröfse des Objektivs. Ich kann indes seine Entwicklung nicht für richtig halten.

vor das Okular wirft. Dieses Bild wird dann durch das Okular betrachtet. Die Stange *s* dient dazu, das Spiegelchen *h* etwas zu verstellen, damit das von verschieden entfernten Gegenständen entworfene Bild immer in gleichem Abstande von *h* sich befindet, und so das zu betrachtende immer dieselbe Stelle vor dem Okulare einnimmt.

In dem Newtonschen Spiegelteleskope ist das Oknlar seitlich bei *n* angebracht, der Spiegel *h* ist ein Planspiegel, der gegen die Axe geneigt

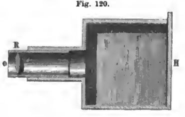
Fig. 119.



ist und das zuerst von dem Spiegel *H* entworfene Bild vor das Okular bringt. Er befindet sich deshalb zwischen *H* und *ab* und zwar nm die Distanz *hn* von dem reellen Bilde entfernt[1]).

Von andern optischen Apparaten ist die in neuester Zeit durch Entdeckung der Photographie so wichtig gewordene Camera obscura zu erwähnen. Man kann sie als ein Fernrohr ohne Oknlar betrachten. In der Vorderwand eines rings verschlossenen Kastens (Fig. 120) ist ein Rohr eingesetzt, und in diesem ein zweites Rohr verschiebbar. In dem zweiten Rohre *R* ist eine achromatische Sammellinse angebracht, welche auf der Hinterwand *H* ein reelles Bild der Gegenstände entwirft, die in einem passenden Abstande vor der Linse sich befinden. Bei Apparaten, die zu photographischen Zwecken dienen, ist die Hinterwand *H* eine matte Glastafel, welche fortgenommen werden und durch die in eine Kassette eingeschlossene empfindliche Platte ersetzt werden kann. Die nach dem Innern des Kastens gerichtete Wand der Kassette besteht aus einem Schieber; wird derselbe gehoben, so fällt das Bild auf die Platte.

Fig. 120.



Je nach dem Zwecke, wozu die Camera sonst dienen soll, sind an derselben zuweilen noch Spiegel und andere Vorrichtungen angebracht, die den Zweck haben, das von der Linse erzeugte Bild an einer bestimmten Stelle zu entwerfen. Dieselben bedürfen keiner besondern Erklärung[2]).

[1]) Ein als gewöhnliches Fernrohr zu benutzendes, als Brachyteleskop bezeichnetes Reflexionsfernrohr ist kürzlich von *Forster* und *Fritsch* konstruiert. Man sehe: Das Brachyteleskop von J. Forster und K. Fritsch. Wien 1877.

[2]) Über die Fernrohre und sonstige optische Instrumente sehe man die ausführlichern Werke über Dioptrik, z. B.: *Littrow*, Dioptrik oder Anleitung zur Verfertigung der Fernrohre. Wien 1830. *Prechtl*, praktische Dioptrik. Wien 1828.

Zweiter Abschnitt.

Theoretische Optik.

Erstes Kapitel.

Interferenz und Beugung des Lichtes.

§ 65.

Fresnels Spiegelversuch. Von den beiden Hypothesen, nach denen sich die Erscheinungen der ungestörten Ausbreitung des Lichtes als im Wesen desselben begründet zu erkennen geben, wurde die Newtonsche Emissionshypothese durch den Foucaultschen Versuch über die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser als unhaltbar erkannt. Da dieser Versuch die Folgerungen der zweiten Hypothese, nach welcher das Licht eine Wellenbewegung des Äthers ist, vollkommen bestätigte, so hielten wir uns berechtigt, dieselbe als wahrscheinlich anzunehmen. Wir benutzten sie demgemäfs zur Erklärung der Erscheinungen, die sich bei der Wechselwirkung des Lichtes und der Körper, auf welche dasselbe bei der gestörten Ausbreitung trifft, zeigen, sowie der Erscheinungen der Emission, und sahen, dafs in diesen nichts lag, was der Undulationstheorie widersprach, vielmehr, dafs alle die dahin gehörigen Erscheinungen mit Hülfe dieser Theorie verstanden werden konnten.

Nach derselben ist das Licht eine schwingende Bewegung, die sich in dem überall vorhandenen Äther von den leuchtenden Punkten aus nach allen Richtungen verbreitet. Die Grenze, bis zu welcher sich die Bewegung in einem bestimmten Augenblicke bei der ungestörten Fortpflanzung ausgebreitet hat, ist eine Kugel, da wir annehmen, dafs der freie Äther isotrop, das heifst überall gleich dicht und nach allen Richtungen gleich elastisch ist. Die Radien dieser Kugelwellen sind die Lichtstrahlen, sie sind die Punktreihen, welche die im dritten Abschnitte des ersten Teiles ausführlicher betrachtete Bewegung vollführen, und denen wir bei Betrachtung der Wellenbewegung in einem Punktsystem den Namen Wellenstrahlen beilegten. Die Bewegung kann entweder eine longitudinale oder eine transversale sein, kombiniert aus beiden kann sie nicht sein, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Bewegungen nach den damals abgeleiteten Gesetzen sehr verschieden sind, so dafs die longitudinale der transversalen Bewegung weit voreilen mufs. In einem nur sehr kleinen

Abstande von der Lichtquelle müssen deshalb beide Bewegungen vollständig getrennt sein. Von diesen beiden möglichen Bewegungen bestimmten uns dann die Erscheinungen der Dispersion, die transversalen Schwingungen als die Ursache des Lichtes zu betrachten. Bei diesen sind im isotropen Äther alle in einer zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrechten Ebene, der Wellenebene, wie wir sie schon mehrfach nannten, liegenden Richtungen gleich berechtigt. Wir werden daher unter Voraussetzung transversaler Schwingungen annehmen müssen, dafs die Schwingungen nach allen in der Wellenebene vorhandenen Richtungen vor sich gehen, das heifst ein bestimmtes vom Lichte getroffenes Ätherteilchen, oder die in einer Ebene liegenden Teilchen, durch welche die Lichtwellen hindurchgehen, müssen in einer unmefsbar kleinen Zeit nach und nach sich in allen in dieser Ebene liegenden Richtungen bewegen.

Wenn auch diese Theorie durch die bisher betrachteten Erscheinungen für uns einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit gewonnen hat, so müssen wir uns doch noch nach direkten Beweisen für dieselbe umsehen, ganz besonders um definitiv zu entscheiden, ob in der That die durch die Dispersionstheorie veranlafste Annahme der transversalen Schwingungen, durch welche wir, wie damals schon erwähnt wurde, dem Äther gewissermafsen die Eigenschaften eines festen Körpers beilegen, zulässig ist.

Der Weg, den wir zu diesem Ziele verfolgen müssen, liegt unmittelbar vor; wir haben an der Hand der im dritten Abschnitte des ersten Teiles abgeleiteten Sätze über die Wellenbewegung die Konsequenzen dieser Theorie zu ziehen und diese dann durch den Versuch zu bestätigen.

Das Wesen der Wellenbewegung besteht in der Periodicität; ein schwingendes Teilchen bewegt sich eine Zeit lang nach der einen Richtung und darauf ebenso lange und mit ebensolcher Geschwindigkeit nach der entgegengesetzten. Von dem erregenden Mittelpunkte pflanzt sich dann die Bewegung nach allen Richtungen fort, und der entstehende Wellenstrahl zeigt in einer Wellenlänge alle Phasen der Bewegung neben einander, die ein schwingendes Teilchen während einer Oscillationsdauer nach einander durchläuft. Die Wellenlänge zerfällt daher in zwei kongruente Teile, in deren erstem die Bewegung in dem einen, in deren anderem sie in dem entgegengesetzten Sinne vor sich geht, in deren jedem die Geschwindigkeit von einem Minimum bis zu einem Maximum wächst und dann wieder zu einem Minimum abnimmt, um in der folgenden Wellenhälfte den entgegengesetzten Sinn anzunehmen.

In einem Mittel können sich nun mehrere Wellenbewegungen gleichzeitig fortpflanzen und demselben Teilchen Impulse erteilen. Nach dem Princip der Koexistenz kleiner Bewegungen ist dann die Geschwindigkeit des Teilchens die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, welche ihm jede einzelne der Teilbewegungen geben würde. Die resultierende Geschwindigkeit oder die resultierende Amplitude der Schwingung mufs daher von der Phase der Bewegung abhängig sein, in der die einzelnen Wellensysteme zusammentreffen.

Es kann auf den ersten Blick zweifelhaft scheinen, ob dieser Satz bei den Lichtbewegungen zur Anwendung kommen kann, wenn, wie wir voraussetzen, die Bewegung eine transversale ist, denn wenn die interferierenden Schwingungen nicht in derselben Richtung geschehen, so hängt von der

Phasendifferenz nach § 130 des ersten Teiles weniger die Amplitude als die Form der resultierenden Schwingung ab. Indes die in einem bestimmten Zeitmoment von einer und derselben Lichtquelle ausgehenden Schwingungen werden eine ganz bestimmte Richtung besitzen und auch wenn sie sich ausbreiten stets gleichgerichtete Schwingungen erzeugen. Wenn wir deshalb die in einem bestimmten Momente von einer Lichtquelle ausgehende Bewegung teilen, und nachdem sie verschiedene Wege durchlaufen, wieder zusammentreffen lassen, so können wir auf eine solche Lichtbewegung direkt die früher für Punktreihen, in denen die Schwingungen gleichgerichtet sind, abgeleiteten Interferenzgesetze anwenden.

Wir sahen früher, dafs die schwingende Bewegung einer Punktreihe sich darstellen läfst durch die Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wenn y den Abstand eines um die Entfernung x von dem Mittelpunkt entfernten Teilchens von der Gleichgewichtslage zur Zeit t bedeutet, und a die Amplitude, T die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge der Bewegung darstellt. Ist die Entfernnng eben dieses Teilchens von einem andern erregenden Mittelpunkte, der auch zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung beginnt, $x + \delta$, so wird der Abstand y' dieses Teilchens von der Gleichgewichtslage zur Zeit t infolge des von dieser Bewegung herrührenden Impulses sein

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right),$$

wenn a' die Amplitude dieser Bewegung bedeutet.

Erhält das Teilchen von beiden Bewegungen Impulse nach gleicher Richtung, so ist der resultierende Abstand

$$Y = y + y'$$

nnd derselbe läfst sich darstellen, da die resultierende Bewegung mit den komponierenden von gleicher Periode sein mufs, durch

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right),$$

worin

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

und

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

ist, wie man leicht erhält, wenn man die Summe $y + y'$ bildet und auf die für Y angegebene Form bringt[1]). Aus dem Ausdruck für A folgt, dafs die Amplitude der resultierenden Bewegung abhängt von der Gröfse δ, die uns die Phasendifferenz gibt, mit welcher die komponierenden Bewegungen zusammentreffen. Ist $\delta = 0$, so ist

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' = (a + a')^2.$$

[1]) Wir verweisen hier zugleich für alle folgenden Entwicklungen auf die im 3. Abschnitt des ersten Teiles ausführlich dargelegten Principien der Wellenbewegung.

Wächst δ bis auf $\frac{\lambda}{2}$, so nimmt A ab bis

$$A^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' = (a - a')^2.$$

Nimmt δ noch weiter zu, so wächst A wieder, bis es für $\delta = \lambda$ wieder seinen gröfsten Wert erhält. Bei weiterer Zunahme von δ nimmt A in gleichen Perioden ab und zu, so dafs es allemal, wenn $\delta = n\lambda$ ist, seinen gröfsten, und wenn es gleich $(2n - 1)\frac{\lambda}{2}$ ist, seinen kleinsten Wert annimmt.

Noch deutlicher tritt dieses periodische Wachsen hervor, wenn wir annehmen, dafs die Amplituden der Teilbewegung gleich sind, dann wird

$$A^2 = 2a^2\left(1 + \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right),$$

und da

$$1 + \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\cos^2\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

$$A^2 = 4a^2\cos^2\pi\frac{\delta}{\lambda}; \quad A = 2a\cos\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

und man sieht, wie A einen zwischen 0 und $2a$ liegenden Wert annimmt, je nachdem die Phasendifferenz δ zwischen $(2n - 1)\frac{\lambda}{2}$ und $2n\frac{\lambda}{2}$ liegt.

Durch das Zusammenwirken der beiden Bewegungen kann also die resultierende stärker oder schwächer sein als jede der beiden, und kann selbst vernichtet werden.

Wenden wir diese Folgerungen auf das Licht an, so folgt daraus, dafs, wenn ein Punkt von einer Lichtquelle auf zwei verschiedenen Wegen Licht erhält, die Beleuchtung des Punktes nicht einfach die Summe der beiden zu ihm gesandten Lichtmengen ist, sondern dafs die Beleuchtung abhängt von der Differenz der beiden von den verschiedenen Lichtwellen durchlaufenen Wege. Durch das Zusammenwirken zweier nach Zurücklegung verschiedener Wege sich vereinigender Lichtstrahlen kann, vorausgesetzt, dafs dieselben gleiche Wellenlänge haben, die Beleuchtung des Punktes stärker oder schwächer sein als die von jedem einzelnen Lichtstrahle; und ist die Intensität beider Strahlen die gleiche, so kann durch ihr Zusammenwirken selbst Dunkelheit entstehen. Diese Einwirkung der Strahlen auf einander kann aber nur an der Stelle stattfinden, wo die Strahlen sich treffen, in ihrem weitern Verlauf werden sie nicht gestört, da nach dem zweiten Teile des Princips der Koexistenz der kleinsten Bewegungen die Wellenstrahlen sich ungestört durchkreuzen, das heifst jenseits des Kreuzungspunktes sich ungestört fortsetzen.

Der Erste, welcher Interferenzerscheinungen beobachtete und auf diese hin den Satz aussprach, dafs Licht zu Licht hinzugefügt Dunkelheit erzeugen könne, war Grimaldi[1]), und Thomas Young[2]) benutzte die von Grimaldi gemachte und von ihm vervollkommnete Beobachtung zum Erweise

---

[1]) *Grimaldi*, Physico-Mathesis de Lumine. Bologna 1665.

[2]) *Thomas Young*, On the theory of light and colours. Philosophical Transactions of Roy. Society. 1802. London. Gilb. Annal. XXXIX.

der Richtigkeit der Wellentheorie. Wir werden diese Erscheinungen, bei denen sich zugleich eine Beugung des Lichtes zeigt, in den nächsten Paragraphen besprechen. Fresnel[1]) erst erdachte einen Versuch, den nach ihm benannten Spiegelversuch, mit dem er den unzweideutigen Beweis lieferte, dafs, wenn ein Punkt zugleich von zwei Lichtquellen beleuchtet wird, seine Helligkeit verschieden ist, je nach der Differenz der Abstände des Punktes von den beiden Lichtquellen.

Fresnel stellte zwei Spiegel von schwarzem oder hinten geschwärztem Glase so auf, dafs ihre Ebenen vertikal und nur sehr wenig gegen einander geneigt waren, und dafs sie überdies mit einer Kante genau zusammenstiefsen, ohne dafs an der Berührungslinie ein Spiegel vor dem andern vorstand.

Wenn die von verschiedenen Mechanikern hergestellten Interferenzapparate nicht zu Gebote stehen, kann man sich diese Spiegel am besten dadurch herstellen, dafs man eine viereckige Platte schwarzen Glases durch einen scharfen Schnitt in der Mitte durchschneidet, und nachdem man die Schnittränder abgeschliffen hat, die beiden Stücke auf ein viereckiges Holzstückchen mit weichem Wachs aufklebt, so dafs die beiden abgeschliffenen Ränder zusammenstofsen. Man darf dann, wenn die Vorrichtung zu dem Versuche brauchbar sein soll, mit der Fingerspitze an der Stelle, wo die Gläser zusammenstofsen, keine vorspringende Kante mehr fühlen. Der Winkel, den die beiden vordern spiegelnden Flächen mit einander bilden, mufs ferner nahezu 180^0 sein.

Ein vortreffliches von Nörrenberg angegebenes Mittel zur Erreichung dieser Bedingungen teilt Quincke mit[2]). Ein Spiegelglasstreifen von 100^{mm} Länge, 25^{mm} Breite und 3^{mm} Dicke wird mit dem Diamanten in zwei 50^{mm} lange Stücke geschnitten. Diese legt man dicht neben einander auf vier nahezu gleich grofse Kügelchen von weichem Wachs, die auf der horizontalen Oberfläche eines gröfsern Holzklötzchens aufliegen. Zwei von den Wachskugeln liegen unter der Berührungslinie der beiden Glasstreifen, die andern beiden an den Enden der Streifen, so dafs jeder Streifen in drei Punkten aufliegt. Auf diese beiden als Spiegel dienenden Streifen legt man eine gröfsere Platte Spiegelglas von etwa 200^{mm} Länge, 50^{mm} Breite und 3^{mm} Dicke und drückt diese mit horizontal und parallel der Berührungslinie der beiden Spiegel gelegtem Zeigefinger längs dieser Linie schwach an. Die gröfsere elastische Spiegelglasplatte biegt sich in der Mitte durch, und infolge dessen werden die beiden Spiegelflächen schwach gegen einander geneigt, ohne dafs die eine Fläche vor der andern im geringsten vorsteht. Die Neigung der Spiegel beträgt dann nur wenige Minuten.

Stellt man dann die beiden Spiegel einer Lichtquelle gegenüber, so erzeugt jeder von derselben ein Bild, und ein den Spiegeln gegenüber gestellter Schirm wird von dem von den Spiegeln reflektierten Lichte so beleuchtet, als wären die Spiegelbilder zwei selbständige Lichtquellen. Fig. 121 zeigt die Anordnung des Versuches als Horizontaldurchschnitt. L ist die Licht-

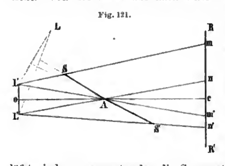
[1]) *Fresnel*, Sur la lumière. Supplément à la traduction française de la 5 édit. du traité de chimie de Thomson. Paris 1822. Poggend. Annal. Bd. 3. Oeuvres complètes. T. II. p. 17 ff. Supplément au deuxième mémoire sur la diffraction § 24 ff. Oeuvres complètes T. I. p. 150 ff.

[2]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 42.

quelle, AS, AS' sind die beiden Spiegel, $L'L''$ die beiden Spiegelbilder. Der Schirm RR', den wir parallel $L'L''$ aufgestellt denken, erhält dann zwischen mm' Licht von der Lichtquelle L', in dem Raume nn' von der Lichtquelle L''; der Raum nm' wird also zugleich von beiden Lichtquellen beleuchtet; man sieht das deutlich an der in diesem Raume gröfsern Helligkeit des Schirmes.

Wendet man als Lichtquelle L eine sehr schmale intensive vertikale Lichtlinie an, etwa ein sehr schmales Bündel Sonnenstrahlen oder die Brennlinie, welche von den Sonnenstrahlen gebildet wird, welche eine Cylinderlinse durchsetzt haben, so erscheinen in dem Raume nm' an beiden Seiten der Mitte C eine Anzahl farbiger Streifen, welche den Lichtlinien L' und L'' parallel sind. In der Mitte c befindet sich ein weifser Streifen, dort, wo die in der Mitte des Abstandes LL' auf LL' senkrechte oc den Schirm trifft. Von der Mitte aus nach einer Seite hin fortschreitend treffen wir folgende stetig in einander übergehende Farben, zunächst gelblichrot, dann schwarz-violett, blau; weiter weifs, gelb-rot, violett, blau, ferner grün, gelb, rot, bläulichgrün, dann noch rot, bläulich-grün, wieder rot, bläulich-grün u. s. f., bis die Farben schliefslich undeutlich werden.

Fig. 121.



Wenn man auf die Cylinderlinse anstatt weifsen Lichtes homogenes einfaches Licht fallen läfst, indem man entweder die Sonnenstrahlen durch ein homogenes Glas gehen läfst, oder vor die Linse ein Prisma anbringt, so dafs nur eine Farbe auf die Linse fällt, dann wird die Erscheinung viel einfacher, es treten nur abwechselnde helle und dunkle Streifen auf. Die Mitte c ist hell, von ihr ausgehend sieht man nach beiden Seiten die Helligkeit abnehmen, und in einem bestimmten Abstande am geringsten werden, von da an wächst nach beiden Seiten die Helligkeit wieder und erreicht wieder in einem bestimmten Abstande ihren gröfsten Wert u. s. f. Wir bezeichnen die Maxima der Helligkeit als helle, die dunkelsten Stellen als dunkle Streifen.

Erzeugt man mit einem Prisma ein möglichst helles Spektrum und läfst von diesem immer andere Farben auf die Linse, und somit auf die Spiegel fallen, so findet man, dafs die Abstände der hellen und dunklen Streifen immer andere werden; sie sind am gröfsten für rotes Licht, kleiner für gelbes, grünes, blaues, am kleinsten für violettes Licht. Die Breite der Streifen wird also um so geringer, je brechbarer das Licht ist. Hieraus folgt zunächst, weshalb wir bei Anwendung des weifsen Lichtes anstatt heller und dunkler Streifen farbige Streifen sehen. In dem mittlern hellen Streifen sind alle Farben mit gröfster Intensität vorhanden, derselbe mufs daher weifs erscheinen; nach den Seiten hin verschwindet zuerst violett, dann blau, dann grün, und schliefslich überragt das Rot die übrigen Farben, der mittlere helle Streifen mufs daher nach Innen gelbliche, nach Aufsen rote Ränder haben. Dann folgt nach beiden Seiten, da der helle Streifen für violett weiter von der Mitte entfernt ist als der dunkle für rot, zunächst

ein schwarzer Streifen, auf diesen folgt zunächst das Maximum für violett und blau; diese Farben werden daher den zweiten hellen Streifen nach Innen begrenzen. Weiterhin treten zum Violett und Blau auch die andern Farben; auf das Blau wird daher Weifs folgen müssen, welches, da das violette und blaue Licht zuerst wieder verschwindet, durch Gelb in Rot übergeht u. s. f. Wir können die Farben sämtlich nach den Gesetzen der Farbenmischung ableiten.

Wie bei den verschiedenen Farben, so ändern sich die Abstände der Streifen ebenso, wenn wir die Neigung der Spiegel ändern. Die Mitte c bleibt immer hell, der erste und die folgenden dunklen und hellen Streifen rücken aber um so weiter nach den Seiten, je näher der Winkel, welchen die beiden Spiegel bilden, gleich 180^0 ist, um so näher zusammen, je mehr die Spiegel gegen einander geneigt sind. Wenn die Neigung der Spiegel gegen 179^0, oder wenn wir von dem spitzen Winkel der beiden Spiegelebenen ausgehen, 1^0 beträgt, so fallen die Streifen so nahe zusammen, dafs sie nicht mehr sichtbar sind.

Ebenso ändert sich der Abstand der Streifen, wenn die Entfernung des Schirmes von den Spiegeln eine andere wird, er wird gröfser, wenn der Schirm weiter von den Spiegeln entfernt wird, kleiner, wenn man den Schirm den Spiegeln nähert.

Aus der Thatsache, dafs in dem von beiden Lichtquellen beleuchteten Streifen des Schirmes bei Anwendung einfarbigen Lichtes dunkle Streifen auftreten, folgt nun unzweideutig, dafs in der That Licht zu Licht hinzugefügt Dunkelheit hervorbringen kann, denn diese Streifen zeigen sich nicht dort, wo nur Licht von dem einen Spiegel hinkommt. Sie verschwinden ebenfalls und machen einer gleichmäfsigen Beleuchtung Platz, wenn der eine Spiegel bedeckt wird, also nur der andere Licht auf den Schirm sendet.

Die Mitte c des von beiden Spiegeln beleuchteten Streifens ist immer hell, in welchem Abstande man auch den Schirm aufstellen mag und welche Neigung auch die Spiegel gegen einander haben, vorausgesetzt, dafs der Schirm, wie wir annahmen, senkrecht ist zu der auf die Verbindungslinie der beiden Lichtquellen $L'L''$ in dem Mittelpunkte o senkrechten oc, dafs also RR' parallel ist LL'. Da nun die Mitte c von jeder der beiden Lichtquellen L' und L'', welche zugleich in demselben Augenblicke Licht aussenden, in dem von L das Licht ausgeht, gleich weit entfernt ist, so folgt, dafs zwei gleichbeschaffene Lichtstrahlen, die von zwei ganz gleichen Lichtquellen ausgehen und einen von beiden gleichweit entfernten Punkt beleuchten, sich gegenseitig verstärken. Von der Mitte aus wird nach beiden Seiten hin die Lichtstärke anfangs kleiner, sie wird in den dunklen Streifen ganz null, und nimmt dann wieder zu. Daraus folgt, dafs, wenn der von zwei Lichtstrahlen bei ihrem Zusammentreffen durchlaufene Weg ein verschiedener ist, sie je nach der Verschiedenheit des Weges sich stärken oder schwächen können.

Die Helligkeit ist also abhängig von der Differenz der von den beiden Lichtstrahlen durchlaufenen Wege, und zwar ist sie eine periodische Funktion; mit der Zunahme der Wegedifferenz wird sie erst kleiner, dann gröfser, wieder kleiner u. s. f. Um nun zu untersuchen, ob die Abhängigkeit von der Wegedifferenz genau die von der Theorie geforderte ist, müssen wir die

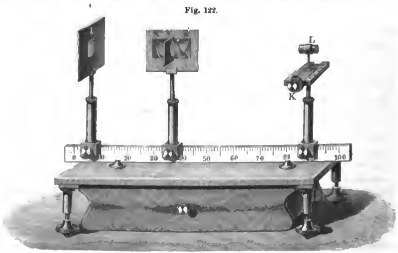
Differenz der Entfernungen der einzelnen Punkte von den beiden Lichtquellen bestimmen.

Zu dem Ende müssen wir aufser dem Abstande der Lichtquelle und des Schirmes von den Spiegeln, so wie die Neigung der letzteren gegen einander, die leicht ein für allemal gemessen werden können, die Entfernungen der einzelnen hellen und dunklen Streifen von der Mitte *c* kennen. Um diese zu erhalten, ist das beschriebene Beobachtungsverfahren, die Erscheinung auf einem Schirme zu betrachten, nicht sehr geeignet, da die Streifen sehr nahe zusammenliegen.

Fresnel[1]) fing daher die Erscheinung direkt mit einer Lupe von kurzer Brennweite auf. Man denke sich eine Lupe so hinter dem Schirme aufgestellt, dafs man durch sie hindurchsehend ein deutliches virtuelles Bild der den Spiegeln zugewandten Seite des Schirmes erhält, so sieht man nach Fortnahme des Schirmes die vorhin auf dem Schirme dargestellten Streifen vergröfsert, und kann nun leicht den Abstand derselben messen. Zu dem Zwecke spannte Fresnel in der gleichen Entfernung vor der Lupe einen feinen Faden parallel den Streifen aus, der unveränderlich fest mit der Lupe verbunden war, und befestigte den Apparat auf einer Mikrometerschraube, welche der Lupe eine seitliche Bewegung in der Richtung *mn* Fig. 121 zu erteilen vermochte. Da die angesehenen Streifen und der Faden sich in derselben Entfernung von der Linse befinden, so sieht man sie zugleich und Faden wie Streifen deutlich.

Eine sehr bequeme Anordnung zur Messung der Streifenabstände gibt die sogenannte Diffraktionsbank von Duboscq. Dieselbe zeigt Fig. 122.

Fig. 122.



Auf einem festen Fufsbrett ist ein Messinglineal, auf die hohe Kante gestellt, welches mit einer Millimeterteilung versehen ist, befestigt. Auf dieses Lineal sind in passenden Stativen die einzelnen Apparate befestigt.

[1]) *Fresnel* a. a. O. Poggend. Annal. Bd. III. p. 99 ff. Oeuvres complètes T. II. p. 15.

Zunächst eine Cylinderlinse l, in der Mitte eines undurchsichtigen Schirmes, der alles nicht durch die Linse hindurchgehende Licht von den Spiegeln abhält. Läfst man auf die Linse ein nahe paralleles Strahlenbündel fallen, so entsteht in der Brennweite derselben eine reelle Lichtlinie, wie sich unmittelbar aus den Gesetzen der Brechung in einer Kreislinie, dem Horizontaldurchschnitt der Cylinderlinse ergibt. Die von dieser Lichtlinie ausgehenden Strahlen fallen dann auf die Spiegel SS', von denen der eine S mit Hülfe einer Mikrometerschraube parallel sich selbst vor oder zurückgestellt werden kann, während die Ebene des andern gegen die des ersten mehr oder weniger geneigt werden kann, um so die Spiegel den vorhin angegebenen Bedingungen entsprechend stellen zu können.

Die entstehenden Streifen werden mit der Lupe L beobachtet, welche nahe der Brennweite einen Faden parallel den Interferenzstreifen ausgespannt hat, oder an dessen Stelle ein feines Glasplättchen, in welchem mit einem Diamanten eine Marke oder eine Teilung eingerizt ist. Die Lupe wird von einem Schlitten getragen, welcher durch eine mit dem Kopfe K versehene Mikrometerschraube seitlich verschoben werden kann. An einer Teilung, an der sich ein auf dem Schlitten vorhandener Nonius vorbeischiebt, sowie an der in 100 gleiche Teile geteilten Trommel der Mikrometerschraube wird die seitliche Verschiebung gemessen. Zur Ausführung der Messungen stellt man zunächst den Faden der Lupe so, dafs er den mittlern hellen Streifen deckt, und verschiebt dann durch Drehung des Schraubenkopfes K die Lupe nach der einen oder andern Seite so weit, dafs der Faden den ersten, zweiten etc. dunklen Streifen deckt; die Gröfse der Verschiebung liest man an der Teilung des Kopfes ab.

Mifst man so den Abstand eines bestimmten, etwa des ersten oder zweiten Streifens von der Mitte, indem man nach und nach die Lupe in verschiedene Entfernung von den Spiegeln bringt, so findet man, dafs die Abstände der Streifen mit zunehmender Entfernung gröfser werden, und zwar so, dafs in einem Horizontalschnitt, der durch die Ebene $L'L''oc$ Fig. 121 gelegt ist, die einem bestimmten Streifen angehörigen Punkte auf einer Hyperbel liegen, deren Brennpunkte die beiden Lichtquellen L' L'' sind. Fig. 123 stellt einen solchen Horizontaldurchschnitt dar. AC und BC sind die beiden Spiegel, L' und L'' die beiden Bilder der Lichtquelle und oc die auf dem Mittelpunkt o von $L'L''$ errichtete Senkrechte. Diese Linie ist der Ort der hellen Mitte, nach beiden Seiten liegt daneben ein dunkler Streifen, dessen Entfernungen von oc in verschiedenen Abständen von o durch die Hyperbel $KK'K''$ gegeben ist. Auf diesen dunklen folgt der zweite helle Streifen, dessen Abstände von oc durch das zweite Hyperbelpaar $MM'M''$ gegeben ist u. s. f.

Die Hyperbel ist bekanntlich dadurch charakterisiert, dafs die Differenz zweier von den beiden Brennpunkten nach einem und demselben Punkte derselben gezogenen Leitstrahlen eine konstante Gröfse, und zwar gleich der sogenannten grofsen oder reellen Axe ist.

Daraus, dafs diese Kurven Hyperbeln sind, folgt also

$$KL'' - KL' = K'L'' - K'L' = K''L'' - K''L' = d,$$

wenn wir die grofse Axe dieser Hyperbel mit d bezeichnen.

Diese Leitstrahlen sind nun die von den Lichtstrahlen, welche in den

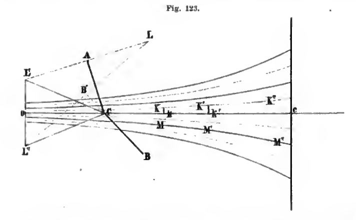
Punkten K, K'.. zusammentreffen, zurückgelegten Wege; es folgt also, wenn zwei gleichbeschaffene Lichtstrahlen, die zugleich von einem Punkte ausgehen, auf verschiedenen Wegen, von denen der eine um eine gewisse Gröfse d kürzer als der andere ist, zu einem Punkte sich fortpflanzen, so vernichten sich dieselben bei ihrem Zusammentreffen.

Die analytische Geometrie lehrt, dafs, wenn wir den Abstand Kk oder $K'k'$.. eines Punktes der Hyperbel von der Mittellinie oc mit x und den zugehörigen Abstand ko mit y bezeichnen, wenn wir ferner den halben Abstand $L'L''$ der beiden Brennpunkte e, die halbe grofse Axe der Hyperbel a nennen, dafs dann x und y durch folgende Gleichung mit einander verknüpft sind:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{e^2 - a^2} = 1 \quad \ldots . \text{(I)}.$$

Messen wir demnach für irgend einen Punkt der Hyperbel die Werte

Fig. 123.



x und y, nnd bestimmen den Abstand e der Brennpunkte, so können wir aus dieser Gleichung a und da

$$KL'' - KL' = d = 2a,$$

auch die Wegedifferenz der Lichtstrahlen bestimmen, bei welcher sie sich vernichten.

Die Gröfse x ist der gemessene Abstand des ersten dunklen Streifens von der hellen Mitte, oder der halbe Abstand der beiden ersten dunklen Streifen von einander. Nennen wir den Abstand letzterer δ, so ist demnach

$$x = \frac{\delta}{2}.$$

Ferner ist

$$y = ko = kC + Co.$$

kC ist der Abstand des Punktes k von dem Punkte, in welchem der Horizontalschnitt die Kante schneidet, in welcher die Spiegel zusammenstofsen. Derselbe läfst sich direkt messen, er sei gleich w.

Co, der Abstand des Punktes C von der Ebene der Spiegelbilder, bestimmt sich aus dem Abstande LC und der Neigung $ACB' = \alpha$ des Spiegels folgendermafsen. Es ist

$$Co = CL' \,.\, \cos oCL'.$$

Nun liegen L, L', L'' auf einer Kreislinie, deren Mittelpunkt C ist, demnach ist

$$CL' = CL = f \text{ und } \sphericalangle L'CL'' = 2\, L'LL'',$$

da der Winkel an L als Peripheriewinkel auf demselben Bogen steht wie der an C als Centriwinkel. Da weiter

$$LL' \perp CA, \quad LL'' \perp BC,$$

so folgt

$$\sphericalangle L'LL'' = \alpha,$$

gleich dem Neigungswinkel der beiden Spiegel. Da ferner

$$CL' = CL'' \text{ und } Co \perp L'L'',$$

so folgt auch

$$\sphericalangle oCL' = \frac{1}{2}\, L'CL'' = \alpha$$

und

$$y = w + f \cos \alpha.$$

Der halbe Abstand der beiden Brennpunkte $e = oL'$ ist dann

$$e = CL' \,.\, \sin \alpha = f \,.\, \sin \alpha.$$

Setzen wir die Werte für x, y, e in unsere Gleichung (I), so wird dieselbe

$$\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{(w + f \cos \alpha)^2}{(f \sin \alpha)^2 - a^2} = 1 \quad \ldots . \text{(II)}$$

und diese Gleichung nach a aufgelöst gibt uns einen bestimmten Wert für a oder auch den Wegeunterschied d. Da in dieser Gleichung a, δ und α sehr kleine Gröfsen sind, können wir zunächst a^4 vernachläfsigen und erhalten so

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 (f \sin \alpha)^2 = a^2 \left\{ \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + w^2 + 2fw \cos \alpha + f^2 \right\}.$$

Setzen wir auf der rechten Seite jetzt $\cos \alpha = 1$ und vernachläfsigen $\left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ gegen $(f + w)^2$, so wird

$$a = \frac{\delta}{2} \, \frac{f}{f + w} \sin \alpha \quad \ldots . \text{(IIa)}.$$

Bestimmt man aus entsprechenden Messungen für die andern hellen und dunklen Hyperbeln die grofsen Axen, also die Wegedifferenz der in ihnen zusammentreffenden Lichtstrahlen, so ergibt sich, dafs die grofsen Axen der dunklen Hyperbeln, wenn die der ersten $KK' \ldots$ den Wert d hat, die Werte

$$d, \; 3d, \; 5d, \; 7d \ldots$$

haben, dafs sie sich also verhalten wie die Reihe der ungeraden Zahlen.

Die Axen der hellen Hyperbeln haben dagegen die Werte

$$2d,\ 4d,\ 6d,\ 8d\ \ldots.$$

sie verhalten sich also wie die Reihe der geraden Zahlen.

Wir schliefsen daraus, dafs zwei gleichbeschaffene Lichtstrahlen bei ihrem Zusammentreffen sich vernichten, wenn sie von derselben Lichtquelle ausgehend Wege durchlaufen haben, die um eine bestimmte Gröfse d, oder ein ungerades Vielfaches derselben verschieden sind, dafs sie sich aber verstärken, wenn ihre Wege nicht oder um ein gerades Vielfaches derselben Gröfse d verschieden sind.

Gehen wir von einem hellen Streifen zu dem nächstliegenden dunklen über, so nimmt die Lichtstärke stetig ab, gehen wir von einem dunklen zum nächstliegenden hellen über, so nimmt dieselbe stetig zu. Beim Übergange zum nächstliegenden Streifen nimmt nun aber die Differenz der von den beiden Lichtstrahlen durchlaufenen Wege stetig zu. Wir schliefsen daher, dafs die aus dem Zusammenwirken zweier Lichtstrahlen resultierende Lichtintensität stetig abnimmt, wenn die Differenz der von ihnen zurückgelegten Wege von 0 oder $2nd$ auf d oder $(2n+1)\,d$ wächst, dafs sie dagegen ebenso zunimmt, wenn sie von $(2n-1)\,d$ auf $2nd$ wächst.

Vergleichen wir diese Resultate mit der aus den Principien der Wellentheorie gezogenen Folgerung, so finden wir sie damit in vollstem Einklang. Die aus dem Zusammenwirken zweier Wellenbewegungen resultierende Amplitude war

$$A = 2a \,.\, \cos \pi \frac{\delta}{\lambda},$$

wenn die Amplituden beider gleich a und die Phasendifferenz, das heifst der Wegenunterschied der Strahlen gleich δ ist, und man sieht, wie die auf Seite 392 aus dieser Form von A in Bezug auf den Wert von A gezogenen Schlüsse in dem Fresnelschen Versuche experimentell dargestellt sind. Daraus folgt, dafs sich auf jedem Lichtstrahle seiner Länge nach periodische Zustände finden, von der Länge d, die einander stetig folgen, und von denen zwei unmittelbar auf einander folgende sich gerade entgegengesetzt verhalten. Wir werden daher berechtigt sein, das Licht als eine Wellenbewegung und die gefundene Wegedifferenz d, von welcher die resultierende Helligkeit abhängig ist, als die halbe Länge einer Welle anzusehen. Denn der Wert von A hängt genau so von $\frac{1}{2}\lambda$ ab, wie die resultierende Helligkeit von d.

Die Messung der Distanzen w und f sowie des Winkels α gibt somit durch Gleichung IIa und durch Verdoppelung des Wertes von a die halbe Wellenlänge des zu dem Versuche benutzten homogenen Lichtes. Fresnel hat diese Messungen für ein rotes Licht durchgeführt, welches durch ein tiefrotes Glas alter Kirchenfenster hindurchging[1]). Er erhielt als Wellenlänge für dieses Licht

$$\lambda = 6{,}38,$$

wenn, wie das schon im ersten Abschnitt geschehen ist, die zehntausendstel Millimeter als Einheit genommen werden.

[1]) *Fresnel,* Poggend. Annal. Bd. III. p. 124. Oeuvres complètes. T. II. p. 23.

Gegen die von Fresnel gegebene in diesem Paragraphen vorgetragene Theorie des Interferenzversuches ist vor kurzem H. F. Weber[1]) aufgetreten mit der Behauptung, dafs dieselbe den im Versuche sich darbietenden Erscheinungen nicht entspräche. Weber bemerkt betreffs dieses Versuches folgendes: „Fresnel hat versichert, durch Beobachtungen und Messungen alle Konsequenzen seiner Theorie bestätigt gefunden zu haben. Unzählige Male sind seit Fresnels Tagen die Fresnelschen Interferenzen als Grunderscheinungen erzeugt worden und alle Beobachter haben die Übereinstimmung der Fresnelschen Theorie mit den Erscheinungen anerkannt. Diese Übereinstimmung zwischen der Theorie und der Wirklichkeit besteht aber nicht, eine genauere Betrachtung der Fresnelschen Interferenzen läfst erkennen, dafs keine einzige der Folgerungen der Theorie den Erscheinungen entspricht.“

Weber behauptet dann, dafs in einem gegebenen Abstande vor den Spiegeln die Breite der einzelnen Interferenzstreifen ganz beträchtlich ungleich sei, dafs in gewissen Entfernungen vom Spiegel die mittlere Franse schmäler sei als die nebenliegenden, diese breiter als die folgenden u. s. w.; in andern Entfernungen verhalte sich die Sache umgekehrt, in wieder andern seien die Fransen in der That gleich breit. Im weifsen Licht sei die Mitte niemals weifs, sondern je nach der Entfernung von der beiden Spiegeln gemeinschaftlichen Kante sehr verschieden gefärbt. Die Helligkeitsmaxima, auch im homogenen Lichte, seien sehr verschieden und die Unterschiede derselben so grofs, dafs sie schon auf den ersten Blick geradezu eindringlich in die Augen falle.

Gerade diese letzte Bemerkung Webers läfst seine Einwürfe zweifelhaft erscheinen und führt auf die Vermutung, dafs seine Beobachtung mangelhaft, dafs die Anordnung des Versuches nicht den Vorschriften Fresnels entsprechend gewesen ist. Denn es ist doch wohl kaum anzunehmen, dafs ein Beobachter wie Fresnel und die vielen Beobachter, die seit Fresnels Tagen die Interferenzstreifen unzähligemal beobachtet haben, solche eindringlich in die Augen fallende Unterschiede übersehen hätten.

Dafs derartige Ungleichheiten in den Helligkeitsmaximis vorkommen können, und unter welchen Umständen sie auftreten, hat Fresnel selbst ausführlich besprochen[2]); der wesentlichste Umstand zur richtigen Darstellung der Erscheinung ist, wie auch Quincke hervorhebt, dafs an der beiden Spiegeln gemeinsamen Kante der eine Spiegel vor dem andern nicht im geringsten hervorragt. Denn sobald das der Fall ist, fällt die zur Verbindungslinie der beiden Lichtquellen L, L' Fig. 123 senkrechte OCc nicht mehr mit der Mitte des von beiden Spiegeln gemeinsam beleuchteten Raumes zusammen; das ganze Fransensystem rückt dann mehr nach dem Rande des Raumes und kann dann allerdings durch die dort auftretenden, später zu besprechenden Beugungserscheinungen gestört werden. Auch dann, wenn der Einfallswinkel der Strahlen ein sehr grofser wird, so dafs der von beiden Spiegeln gemeinsam beleuchtete Raum sehr schmal wird, können die Beugungserscheinungen eine Komplikation der Erscheinung hervorbringen, besonders in sehr grofser Nähe der Spiegel.

[1]) *H. F. Weber*, Vierteljahresschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft 1879. 1. Heft. Wiedem. Annal. Bd. VIII.

[2]) *Fresnel*, Supplément au II. mémoire sur la diffraction. Oeuvres complètes T. I. p. 154 ff.

Dafs bei sorgfältiger Durchführung des Versuches die Fransen der Fresnelschen Theorie entsprechen, davon habe ich mich neuerdings überzeugt durch Messungen, welche Söhnlein in meinem Laboratorium ausgeführt hat. Es wurde homogenes Licht benutzt; die Anordnung des Versuches war die Fig. 122 dargestellte. Von einer entfernt stehenden Natronflamme entwarf die Cylinderlinse l ein schmales Bild, dessen Distanz von der beiden Spiegeln gemeinsamen Kante 200^{mm} betrug. Die Maxima in den Fransen waren dann stets sämtlich von gleicher Lichtstärke, in welcher Entfernung w von den Spiegeln man auch beobachtete. Welche Franse die mittlere war, liefs sich wegen der Homogenität des Lichtes nicht erkennen, da der Fresnelschen Theorie entsprechend alle ganz gleich erschienen. Bei der Messung wurde dann so verfahren, dafs die Fresnelsche Lupe in bestimmte Entfernungen von den Spiegeln eingestellt wurde, und dafs man durch das ganze mit Streifen bedeckte Gesichtsfeld einmal von der linken zur rechten, dann von der rechten zur linken hindurchging und die Abstände je zweier dunkler Streifen mafs. Diese Messungen wurden an jeder Stelle mehrfach wiederholt. Aufser bei dem kleinsten Abstande $w = 150^{mm}$, in welchem sich 7 Streifenabstände scharf messen liefsen, wurden so 5 oder 6 Abstände gemessen. Der spitze Winkel, den die beiden Spiegelflächen mit einander bildeten, wurde mit einem Spektrometer durch Reflexion des Fadenkreuzes gemessen. Derselbe betrug bei der gleich mitzuteilenden Reihe von Messungen 9′ 10″. Folgende Tabelle enthält eine Reihe von Messungen, bei denen also in den auch vorhin gebrauchten Zeichen

$$\alpha = 9' \, 10'' \qquad f = 200^{mm}$$

war. Über jeder die Streifenabstände δ enthaltenden Kolumne sind die Abstände w angegeben.

$w = 150^{mm}$	$w = 200^{mm}$	$w = 250^{mm}$	$w = 300^{mm}$	$w = 400^{mm}$	$w = 500^{mm}$
$\delta = 0{,}170$	$\delta = 0{,}215$	$\delta = 0{,}235$	$\delta = 0{,}263$	$\delta = 0{,}330$	$\delta = 0{,}394$
0,192	0,230	0,246	0,285	0,343	0,398
0,210	0,227	0,248	0,293	0,356	0,392
0,185	0,222	0,260	0,283	0,340	0,406
0,185	0,210	0,240	0,270	0,320	0,386
0,197			0,270		0,365
0,205					
$\lambda = 5{,}87$	$\lambda = 5{,}93$	$\lambda = 5{,}87$	$\lambda = 5{,}89$	$\lambda = 5{,}89$	$\lambda = 5{,}92$

Die gemessenen Werte der Streifenabstände lassen durchaus keine Periodicität erkennen, die in jeder Kolumne vorkommenden Unterschiede liegen vielmehr vollständig innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler und sind zudem ganz unregelmäfsig. Die Genauigkeit der Messungen erkennt man an den unter jeder Kolumne angegebenen aus dem Mittel von δ derselben nach Gleichung IIa berechneten Werte von $\lambda = 4a$. Als Einheit von λ ist der zehntausendste Teil des Millimeters gesetzt. Als Mittel ergibt sich für $\lambda = 5{,}895$, also fast genau derselbe Wert, den wir § 28 als Mittel aus den besten vorliegenden Messungen für die Wellenlänge der Linie D erhielten.

Ebenso ergaben sich für andere Werte von f und α stets durch das ganze Gesichtsfeld gleiche Streifenbreiten, so dafs sich die Fresnelsche

Theorie durchaus bestätigt fand. Wir können somit durchaus diese Theorie festhalten, dafs wir es hier mit einer Interferenz der reflektierten Strahlen zu thun haben, wenn es auch zur Darstellung der gesamten Erscheinnngen der allgemeinern und strengern Rechnungen Wehers hedarf[1]).

§ 66.

Andere Methoden die Interferenzstreifen hervorzubringen. Die Erzeugung der Interferenzstreifen mit Hülfe der Fresnelschen Spiegel beruht darauf, dafs mittels derselben Schwingungen ganz bestimmter Phasendifferenz an einer Stelle erregt werden, indem die von einer und derselben Lichtquelle herrührenden Wellen, nachdem sie genau unter denselben Umständen reflektiert sind und verschiedene Wege durchlaufen haben, wieder an derselben Stelle zusammentreffen. Auf diese Weise ist es erreicht, dafs an einer und derselben Stelle längere Zeit hindurch, und so lange als man will, Schwingungen gleicher Richtung immer mit derselben Phasendifferenz zusammentreffen. Das ist eine zur Wahrnehmung der Interferenzen notwendige Bedingung, denn bei der äufserst geringen Länge der Lichtwellen und infolge dessen der äufserst kurzen Dauer der Schwingungen, ist die Interferenz einzelner Schwingungen, wie es heim Schall der Fall war, nicht wahrzunehmen. Aus diesem Grunde können wir auch keine Interferenzerscheinungen wahrnehmen, wenn wir die Wellen, welche zusammenkommen, von zwei verschiedenen Lichtquellen hernehmen, wenn wir also die beiden durch Spiegelung erhaltenen Lichtlinien hei dem Fresnelschen Versuche ersetzen durch zwei selbständig leuchtende Lichtlinien oder Lichtpunkte. Wir können nämlich durchaus nicht annehmen, dafs die Schwingungen der leuchtenden Körper mit einer solchen Regelmäfsigkeit erfolgen, dafs wir die von ihnen ausgehenden Lichtwellen eine mefsbare Zeit hindurch als zu demselben Mittelpunkt gehörig ansehen dürfen, so dafs wir die Schwingungen eines im Abstande x von der Lichtquelle befindlichen Ätherteilchens durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

darstellen können; wir müssen die Bewegung vielmehr darstellen durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right),$$

worin d innerhalh jeder mefsharen Zeit alle Werte zwischen Null und λ annimmt.

Die von einer zweiten Lichtquelle herkommende und denselben Punkt treffende Welle ist ebenso dargestellt durch

$$y' = a' \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d'}{\lambda}\right),$$

wo ebenfalls d' in jeder mefsharen Zeit alle Werte zwischen 0 und λ annehmen kann.

1) Anmerkung bei der Korrektur. Man sehe auch die inzwischen erschienenen Messungen von *Struve* (Wiedem. Ann. Bd. XV), nach denen die Unterschiede in den Fransenbreiten so klein sind, dafs es einer erheblich stärkern Vergröfserung bedarf, als *Söhnlein* sie anwandte, um dieselben zu erkennen.

Die Amplitude der resultierenden Bewegung ist natürlich auch hier gegeben durch die Gleichung

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' . \cos 2\pi \frac{d - d'}{\lambda};$$

da indes $d - d'$ in jedem Momente einen andern Wert erhält, so ist die resultierende Amplitude oder Intensität veränderlich. Die Änderung erfolgt aber in so kurzen Zeiträumen, dafs wir sie selbst nicht wahrnehmen, sondern nur die während der Beobachtungszeit vorhandene mittlere Intensität des Lichtes sehen. Um diese mittlere Intensität innerhalb einer gegebenen Zeit t zu erhalten, haben wir die Summe der in den einzelnen Zeitmomenten dt vorhandenen Intensitäten zu bilden und diese Summe durch die Anzahl der einzelnen Glieder, also durch $\frac{t}{dt}$ zu dividieren. Darnach ist die mittlere Intensität

$$M = \frac{1}{t} \int_0^t (a^2 + a'^2)\, dt + \frac{1}{t} \int_0^t 2aa' \cos 2\pi \frac{d - d'}{\lambda} \cdot dt.$$

Der mit dt multiplicierte Ausdruck unter dem Summenzeichen des zweiten Gliedes nimmt nun innerhalb des Intervalls $0 - t$ alle Werte zwischen -1 und $+1$ an, da $d - d'$ alle Werte zwischen 0 und λ annimmt. Daraus folgt, dafs das zweite Glied der Summe gleich 0 ist, somit dafs

$$M = \frac{1}{t} \int_0^t (a^2 + a'^2)\, dt = a^2 + a'^2;$$

oder die mittlere Intensität ist einfach die Summe der Intensitäten der von beiden Quellen ausgehenden Bewegung, welches auch die Lage des betrachteten Punktes zu den einzelnen Lichtquellen ist. Zwei verschiedene Lichtquellen können also niemals bei ihrem Zusammenwirken Interferenzstreifen erzeugen.

Auch wenn wir nur eine Lichtquelle haben, ist die ausgesandte Bewegung in der angegebenen Weise unregelmäfsig, so dafs wir im Abstande x von derselben die Bewegung darstellen müssen durch

$$y = a . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda} \right),$$

worin d innerhalb jeder mefsbaren Zeit jeden Wert zwischen 0 und λ annimmt. Hier verläfst aber die Bewegung, welche mit der ersten Interferenzen gibt, die Lichtquelle zur selben Zeit, sie wird nur auf einem um δ gröfsern Weg zu den ihr und der ersten gemeinschaftlichen Punkten geführt; deshalb ist, welches auch der Wert von d in jedem Momente ist, die Phasendifferenz der beiden zusammentreffenden Wellen lediglich durch den Wegeunterschied δ bestimmt und immer derselbe. Die resultierende Bewegung ist deshalb von dieser Phasendifferenz nach dem Interferenzgesetz abhängig und immer dieselbe.

Die äufserst geringe Länge der Lichtwellen fordert auch dann, wenn die interferierenden Wellen von einer und derselben Lichtquelle ausgehen,

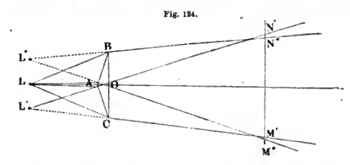
dafs die Lichtquelle möglichst nahe auf einen Punkt oder eine Lichtlinie reduciert werde. Denn sobald die in einem und demselben Punkte zusammentreffenden Wellen von merklich verschieden liegenden Punkten der Lichtquelle herrühren, kommen dieselben wieder in allen möglichen Phasen zusammen und können somit nicht zu Streifen Anlafs geben.

Die Bedingungen, dafs wir Interferenzstreifen erhalten, sind also, dafs wir von einer schmalen Lichtquelle aus Wellen auf Wegen verschiedener Länge zu denselben Punkten führen, dort, wo die Wegedifferenz dann null oder ein gerades Vielfaches von halben Wellenlängen ist, erhalten wir durch das Zusammenwirken der beiden Wellen die vierfache Helligkeit der einzelnen Welle, dort, wo die Wegedifferenz ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, Dunkelheit.

Aufser mit Hülfe der Fresnelschen Spiegel läfst sich diese Anordnung noch auf verschiedenen andern Wegen erreichen. Sehr bequem ist dazu das schon von Fresnel[1]) angewandte Interferenzprisma. Dasselbe besteht Fig. 124 aus einem sehr stumpfwinkligen Glasprisma ABC.

Dasselbe wird einer Lichtlinie L so gegenübergestellt, dafs die Kante A der Lichtlinie parallel ist, und dafs die durch L und A gelegte Ehene

Fig. 124.



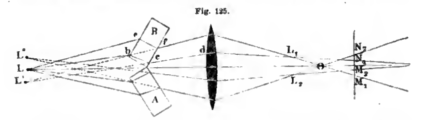
das Prisma halbiert. Jede Hälfte des Prismas wirkt dann als ein Prisma mit sehr kleinem brechenden Winkel, und der Erfolg ist nach § 17 der, dafs die auf die Hälfte BA des Prismas fallenden Strahlen nach der Brechung sich so fortpflanzen, als kämen sie von der Lichtlinie L'', während die auf CA fallenden Strahlen nach der Brechung sich so fortpflanzen, als kämen sie von der Lichtlinie L'. In dem von beiden gemeinschaftlich beleuchteten Raume $OM'N''$ müssen sich also gerade so Interferenzstreifen zeigen als bei den Fresnelschen Spiegeln. Nur in einer Beziehung zeigt sich ein kleiner Unterschied. Nach § 26 ist nämlich die Lage der virtuellen Bilder L' und L'' eine verschiedene für die verschiedenen Farben, für rotes Licht liegen sie näher bei L als für violettes Licht. Die hellen und dunklen Streifen für Violett liegen deshalb hier näher beisammen als bei Anwendung

[1]) *Fresnel*, Oeuvres complètes. T. I. p. 330. Bei der grofsen Schwierigkeit, die Prismen so zu schleifen, dafs die beiden spitzen Winkel B und C genau gleich werden, findet man selten die mit denselben dargestellten Streifen genau der Theorie entsprechend, vielmehr zeigen die Prismen meist die im vorigen Paragraph erwähnten von *H. F. Weber* hervorgehobenen Abweichungen von der Theorie.

der Spiegel, wenn die für rotes Licht denselben Abstand haben. Bei Anwendung des weifsen Lichtes sind die farbigen Streifen deshalb schmaler, als wenn man sie durch die Fresnelschen Spiegel erzeugt.

Ein anderes im Princip wohl zuerst von Fizeau[1]) angewandtes Mittel, um in derselben Weise Interferenzstreifen zu erzeugen, sind zwei aus demselben Stücke geschnittene und wenig gegen einander geneigte Spiegelglasplatten Fig. 125 A und B mit ebenen und parallelen Wänden; man stellt dieselben in einiger Entfernung von einer Lichtlinie so auf, dafs sie durch

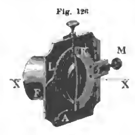
Fig. 125.



die Lichtlinie und die den beiden Glasplatten gemeinschaftliche Kante gelegte Ebene den Winkel der beiden Platten halbiert. Die auf die einzelnen Platten fallenden Strahlen werden dann so gebrochen, dafs sie nach dem Austritte sich fortpflanzen, als kämen die aus A austretenden von L'', die aus B austretenden von L'. Die dann noch divergierenden Strahlen werden von einer Sammellinse aufgenommen, welche von L' in L_1 und von L'' in L_2 ein reelles Bild entwirft. Die von L_1 ausgehenden Strahlen erleuchten den Raum $L_1 M_1 N_1$, die von L_2 ausgehenden den Raum $L_2 M_2 N_2$. Da die beiden Bilder L_1 und L_2 den vorhin gestellten Bedingungen entsprechen, so entstehen in dem von beiden gemeinschaftlich beleuchteten Raume gerade so Interferenzstreifen, wie bei den Fresnelschen Spiegeln.

Eine dritte Methode bieten die von Billet[2]) angewandten Halblinsen. Die Einrichtung derselben zeigt Fig. 126. Eine schwache Sammellinse wird durch einen durch ihre Mitte geführten Schnitt in zwei gleiche Hälften geteilt. Die eine Hälfte wird in einen festen Halbring L gefafst, die andere in einen Halbring K, der durch die Mikrometerschraube M dem ersten genähert und von ihm entfernt werden kann. Sind die beiden Halbringe sich möglichst nahe gestellt, so berühren sich die Schnittflächen der Linse. Man stellt nun diese Halblinsen in der Nähe einer Lichtlinie so auf, dafs die Halbierungsebene der Linsen die Lichtlinie in sich aufnimmt.

Fig. 126.



Berühren sich die Linsenhälften, so wirken sie als eine einfache Linse, sie erzeugen in einem bestimmten Abstande von der Linse ein reelles Bild

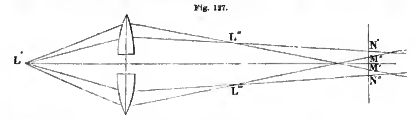
[1]) *Fizeau*, Comptes Rendus. T. XXXIII. p. 349. Krönig Journal. Bd. III. Man sehe auch Jamin, Cours de Physique. T. III.

[2]) *Billet*, Traité d'optique physique. T. I. p. 67.



der Lichtlinie. Wenn man dagegen die Linsenhälften von einander entfernt, wie Fig. 127, so erzeugen sie zwei Bilder L'' und L''', welche beide

Fig. 127.



dann die Bedingung zur Bildung der Interferenzstreifen in dem Raume, in welchen beide Bilder ihr Licht senden, erfüllen.

§ 67.

Farben dünner Blättchen. Wohl die verbreitetste und zuerst aus der Wellentheorie erklärte Interferenzerscheinung sind die Farben, welche dünne Schichten farbloser durchsichtiger Körper zeigen. Alle durchsichtigen Körper, wenn sie in hinreichend dünnen Schichten hergestellt werden, zeigen Farben ähnlich denen der Seifenblasen, wenn man sie im reflektierten Lichte beobachtet. Der Erste, dem diese Thatsache auffiel, war Boyle (1663), und Hooke, der Zeitgenosse und Rivale Newtons, machte sie zum Gegenstande einer genauern Untersuchung. In seiner Mikrographia (1665) gibt er an, daſs die Farbe der Glimmerblättchen von ihrer Dicke abhänge und nur zum Vorschein komme, wenn die Dicke innerhalb gewisser Grenzen liege. Ferner behauptet er, daſs für eine gleichmäſsige Färbung notwendig sei, daſs die Dicke überall dieselbe sei. Er war es auch, dem es zuerst gelang, regelmäſsige Farbenringe zu erzeugen durch Aufeinanderlegen zweier Objektivgläser.

Nach Hooke beschäftigte sich Newton[1]) mit dieser Erscheinung und stellte in einer musterhaften Experimentaluntersuchung die Gesetze derselben auf.

Legt man auf eine ebene Glasplatte eine Konvexlinse von sehr schwacher Krümmung, und betrachtet die Kombination im reflektierten Lichte, indem man also auf sie hinsieht, so sieht man um einen dunklen Mittelpunkt eine Reihe von konzentrischen farbigen Ringen. Zunächst um die dunkle Mitte legt sich ein nach Innen bläulich, nach Auſsen gelbrot gesäumter weiſser Kreis. Als zweites Ringsystem folgt dann ein schmaler violetter Ring, um den sich ein intensiv blauer, dann schwach grüner, deutlich gelber und schlieſslich roter Rand herumlegt. Das dritte Ringsystem ist von Innen nach Auſsen blau, grün, gelb, rot; das vierte grün, gelbrot, rot und in den noch weiter erkennbaren Ringen zeigt sich nur grün und rot, bläulich-grün, rot und rötlich-weiſs. Man hat die Farbenringe, um mit ihnen andere Interferenzfarben bequem vergleichen zu können, genau klassificiert, und als Farben verschiedener Ordnung neben einander gestellt. Jedes der erwähnten

[1]) *Newton*, im 2. Buche seiner Optik.

Ringsysteme wird dann als ein Ganzes gefafst, und die in dem ersten auftretenden Farben als Farben erster Ordnung, die im zweiten als zweiter Ordnung bezeichnet u. s. f.

Hiernach sind von der dunklen Mitte an gerechnet die Farben

I. Ordnung: schwarz, blafsblau, weifs, gelb, orange, rot.
II. Ordnung: violett, blau, gelblich-grün, gelbrot.
III. Ordnung: purpur, indigblau, glänzend grün, lebhaft gelb, rosa, karmesin.
IV. Ordnung: bläulich-grün, gelblich-rot, schwach rot.
V. Ordnung: schwach grün, weifs, schwach rot.

Einfacher aber schärfer und deshalb zu genauen Messungen mehr geeignet wird die Erscheinung, wenn man die Platten durch homogenes Licht beleuchtet oder durch ein möglichst homogenes Glas auf sie hinsieht; man sieht dann eine grofse Anzahl heller und dunkler Ringe, die sich um den dunklen centralen Fleck herumlegen.

Der Übergang von hell zu dunkel und von dunkel zu hell ist wie bei den Interferenzstreifen ein allmählicher.

Eine Messung der Ringdurchmesser ergab, dafs, wenn man die Durchmesser des ersten hellen Ringes gleich 1 setzt, diejenigen der folgenden hellen Ringe sind:

$$\varrho h = \sqrt{1},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7}\ \ldots.$$

sie verhalten sich wie die Quadratwurzeln der ungeraden Zahlen. Diejenigen der dunklen Ringe sind dann

$$\varrho d = \sqrt{0},\ \sqrt{2},\ \sqrt{4},\ \sqrt{6}\ \ldots.$$

sie verhalten sich also wie die Quadratwurzeln aus den geraden Zahlen. Der Durchmesser des centralen dunklen Fleckes ist dabei gleich 0 gesetzt.

Die Durchmesser der Ringe überhaupt verhalten sich also wie die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen.

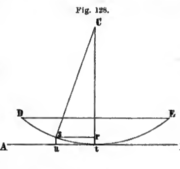
Wendet man nach einander verschiedenes homogenes Licht an, so werden die Durchmesser der Ringe andere, sie sind am gröfsten bei Anwendung roten, am kleinsten bei Anwendung violetten Lichtes. Die Ringe im weifsen Lichte sind nichts Anderes als die teils über teils neben einander gelagerten Ringe der einzelnen Farben; die Färbungen lassen sich daraus nach den Gesetzen der Farbenmischung berechnen, in ganz gleicher Weise wie bei den Interferenzstreifen des weifsen Lichtes im Fresnelschen Spiegelversuch.

Schon Hooke erklärte, dafs die zwischen zwei schwach konvexen Linsen entstehenden Farbenringe nur ein specieller Fall der Farben dünner Blättchen seien, dafs sie in der dünnen zwischen den beiden innern Flächen der auf einander gelegten Gläser eingeschlossenen Luftschicht entstehen. Dünne Blättchen zeigten, wie Hooke fand, Farben, die von ihrer Dicke abhängen, und da bei dieser Vorrichtung die Dicke der Luftschicht in einem um den Berührungspunkt als Mittelpunkt gelegten Kreis überall gleich ist, so ist ein solcher Kreis überall gleich gefärbt, da aber die verschiedenen Kreise eine verschiedene Dicke haben, so sind die verschiedenen Ringe auch immer anders gefärbt. Einen direkten Beweis für die Richtigkeit der Annahme,

dafs die Ringbildung in dieser Schicht veranlafst werde, erhielten Hooke und Newton durch die Erfahrung, dafs die Durchmesser der Ringe wesentlich abhängen von der Substanz der innerhalb der beiden Gläser eingeschlossenen Schicht. Wurden dieselben unter die Glocke einer Luftpumpe gebracht, und zwischen ihnen ein luftverdünnter Raum hergestellt, so wurden die Ringdurchmesser gröfser; wurde die Luft durch Wasser ersetzt, so wurden sie kleiner, mehr noch wenn anstatt des Wassers eine stärker brechende Flüssigkeit genommen wurde. Vergleichende Messungen der Durchmesser bei verschiedenen Substanzen ergaben, dafs dieselben sich verhielten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Brechungsexponenten der eingeschlossenen Flüssigkeiten. Die Brechungsexponenten von Luft und Wasser verhalten sich wie $1 : \frac{4}{3}$, die Ringdurchmesser, wenn einmal Luft, dann Wasser zwischen den Gläsern eingeschlossen ist, wie $\sqrt{1} : \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Bei der von Newton angewandten Kombination einer Konvexlinse und einer ebenen Glasplatte ergibt sich aus den beobachteten Ringdurchmessern und dem gemessenen Krümmungsradius der untern Linsenfläche die Dicke der Schicht, bei welcher die hellen und dunklen Ringe entstehen. Sei zu dem Ende AB (Fig. 128) die ebene Glasplatte, DE die untere Fläche der Linse, deren Mittelpunkt in C, und sei sr der Radius irgend eines hellen oder dunklen Ringes, der in der obern Grenze der zwischen DE und AB eingeschlossenen Schicht liegt. Die Dicke der Schicht an der Stelle, wo der Ring entsteht, ist dann gleich su. Ist nun Ct senkrecht zu AB, so haben wir

Fig. 128.



$$sr^2 = Cs^2 - Cr^2$$

$$Cr = Ct - rt$$

und weiter

$$Ct = R; \quad rt = su = d,$$

wenn wir den Krümmungsradius der Fläche DE mit R und die Dicke der Schicht mit d bezeichnen. Daraus folgt

$$\varrho^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2,$$

und daraus

$$d = \frac{\varrho^2}{2R} + \frac{d^2}{2R},$$

d ist gegen R sehr klein, so dafs wir $\frac{d^2}{2R}$, welches gegen d selbst wieder sehr klein ist, vernachläfsigen dürfen. Dann ist

$$d = \frac{\varrho^2}{2R}.$$

Es folgt daraus, dafs die Dicken der Schicht, wo die Ringe sich bilden, proportional sind den Quadraten der Ringdurchmesser. Da nun die Durch-

messer der hellen Ringe sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen, so folgt, dafs die entsprechenden Dicken der Schicht sich einfach verhalten wie die ungeraden Zahlen.

Ist also die Dicke für den ersten hellen Ring gleich 1, so sind die Dicken für die übrigen hellen Ringe

$$d_h = 1,\ 3,\ 5,\ 7 \ldots\ldots$$

und die Dicken an Stelle der dunklen Ringe

$$d_d = 0,\ 2,\ 4,\ 6 \ldots\ldots$$

Schliefslich fand Newton, dafs die Durchmesser der hellen und dunklen Ringe und somit die Dicken der Schicht, denen die Ringe entsprechen, verschieden sind je nach der Richtung, in welcher man auf die Kombination hinsieht. Die Ringdurchmesser sind am kleinsten, wenn man senkrecht auf die Gläser hinabsieht, und sie werden gröfser, wenn man unter einem kleinern Winkel auf die Platte sieht. Das Gesetz, nach welchem sich die Dicken der Schicht für einen bestimmten Ring bei schiefem Daraufsehen ändern, läfst sich am besten folgendermafsen darstellen. Ist d die Dicke der Schicht, wenn wir senkrecht auf die Platte hinabsehen und Δ diejenige, wenn wir so darauf hinsehen, dafs die in unser Auge kommenden Lichtstrahlen den Winkel i' mit dem Einfallslote im Innern der Schicht bilden, so ist

$$\Delta = \frac{d}{\cos i'}.$$

Das Gesetz ist durch ausgedehnte Messungen von De la Provostaye und Desains[1]) bestätigt worden. Sohnke und Wangerin[2]) haben indes durch sorgfältige Messungen gezeigt, dafs das Gesetz nur angenähert richtig ist, dafs vielmehr die Ringe, sobald man nicht senkrecht auf die Kombination hinabsieht, nicht Kreise sondern doppelt gekrümmte Kurven sind. Die Ringe liegen dann nicht, wie es vorher bei der Ableitung zwischen Ringdurchmesser und Schichtdicke angenommen wurde, an der Grenze der zwischen den beiden Gläsern eingeschlossenen Schicht, sondern sind gegen die Grenzflächen geneigt und zwar in einer der Einfallsebene des Lichtes parallelen Richtung anders als in einer zur Einfallsebene senkrechten Richtung. Wir gehen auf diese Verhältnisse nicht näher ein, begnügen uns vielmehr nach Entwicklung der Theorie dieser Erscheinung anzudeuten, in welcher Weise dieselbe auf Grund dieser und schon früherer Beobachtungen und Ausführungen von Feussner[3]) zu vervollständigen ist, im übrigen auf die Arbeiten dieser Physiker verweisend.

Die Dicken der Schicht für den ersten hellen Ring bei senkrechtem Hinabsehen auf den Apparat sind nach den Messungen von Newton:

---

[1]) *De la Provostaye* und *Desains*, Annal. de chim. et de phys. III. Sér. T. XXVII. Poggend. Annal. Bd. LXXVI.

[2]) *Sohnke* und *Wangerin*, Wiedem. Annal. Bd. XII.

[3]) *Feussner*, Sitzungsberichte der Gesellsch. zur Beförderung der ges. Naturwissensch. zu Marburg 1880 No. 1 und 1881 No. 1.

für das äufserste Rot	0^{mm},000 161	
„ die Grenze Rot-Orange	0	,000 149
„ „ „ Orange-Gelb	0	,000 142
„ „ „ Gelb-Grün	0	,000 133
„ „ „ Grün-Blau	0	,000 123
„ „ „ Blau-Indigo	0	,000 114 75
„ „ „ Indigo-Violett	0	,000 109 75
„ das äufserste Violett	0	,000 101 5

Auch wenn man durch eine solche Kombination einer Linse und einer ebenen Glasplatte hindurchsieht, erscheinen farbige Ringe, welche denen im reflektierten Lichte ganz gleich, nur weniger intensiv und brillant sind, und welche bis auf einen Punkt ganz denselben Gesetzen folgen. Der Unterschied ist der, dafs bei den Ringen im durchgehenden Lichte jene dunkel sind, welche im reflektierten Lichte hell sind und umgekehrt. So legt sich zunächst um die helle Mitte ein dunkler Ring, um diesen ein heller u. s. f. Die farbigen Ringe im weifsen Lichte sind daher sämtlich komplementär zu denen im reflektierten Lichte gefärbt.

Alle diese Thatsachen sind schon von Newton beobachtet worden, wesentlich Neues in Betreff der Erscheinung ist seitdem nicht hinzugefügt. Anders jedoch mit der Erklärung derselben. Die Newtonsche Erklärung gründete sich auf die Emissionstheorie und erst im Anfange dieses Jahrhunderts fiel dieselbe vor den Einwürfen Th. Youngs[1]) und Fresnels[2]). Diese Forscher in Verbindung mit Poisson[3]) und Airy[4]) leiteten dann die Erscheinung mit allen ihren Einzelheiten aus den Principien der Undulationstheorie her und wiesen nach, dafs die Erscheinung auf Interferenz der nach gleicher Richtung sich fortpflanzenden an der vordern und hintern Fläche der Schicht reflektierten Strahlen beruhe.

Nehmen wir an, ein Bündel paralleler gleichgefärbter Strahlen A, A', A'', .. falle auf eine dünne Schicht SS, einer von parallelen Wänden begrenzten durchsichtigen Substanz (Fig. 129). Der Winkel, den dieselben mit dem Einfallslote bilden, sei gleich i. Die Schicht SS sei an den beiden Seiten von dem gleichen Mittel begrenzt, also wenn die Schicht, wie bei den Newtonschen Ringen, Luft ist, sei oberhalb und unterhalb derselben die gleiche Glassorte.

An der obern Grenze der Schicht angekommen, erleiden sämtliche Strahlen eine Teilung. Der Strahl AB wird zum Teil bei B reflektiert nach R hin, zum Teil aber tritt er in die Schicht SS' ein und pflanzt sich im Innern der Schicht in der Richtung BC fort, so dafs er mit dem Einfallslote den Winkel i' bildet. Bei C tritt eine zweite Teilung des Strahles ein, er wird zum Teil nach $B_{,}$ reflektiert, zum Teil tritt er in der Richtung

1) *Th. Young*, On the theory of ligt and colours. Philos. Trans. 1802.

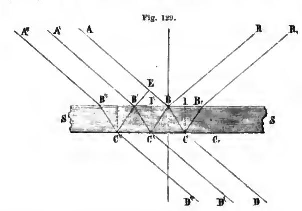
2) *Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. Tome V. Poggend. Annal. Bd. XXX. Oeuvres complètes. T. I u. II. p. 74, p. 247 ff. Note sur le phénomène des anneaux colorés. Annal. de chim. et phys. XXIII.

3) *Poisson*, Sur le phénomène des anneaux colorés. Annal. de chim. et phys. XXII.

4) *Airy*, On the undulatory theory of optics. Mathematical Tracts. Poggend. Annal. Bd. XLI.

CD parallel zu AB aus der Schicht aus. Der in der Richtung $CB_{,}$ reflektierte Strahl tritt dort wiederum zum Teil aus der Schicht aus und pflanzt sich in der Richtung $B_{,}R_{,}$ parallel zu BR fort, zum Teil wird er nochmals nach $C_{,}$ reflektiert. Bei $C_{,}$ tritt wiederum eine Teilung ein; teilweise wird der Strahl reflektiert, teilweise wird er gebrochen. Gleiches gilt von den übrigen Strahlen $A'B'$, $A''B''$.... Der Erfolg dieser vielfachen Teilungen ist der, dafs an jedem Punkte B nicht nur ein reflektierter Strahl BR sich fortpflanzt und in jedem Punkte C nicht nur ein gebrochener Strahl CD austritt, sondern eine ganze Reihe von Strahlen. In der Richtung BR (Fig. 129) z. B. pflanzen sich fort zunächst der an B reflektierte Teil des Strahles

Fig. 129.



AB, ferner der bei B' in die Schicht eintretende, dann bei C' reflektierte und schliefslich bei B nach R wieder austretende Teil des Strahles $A'B'$, dann der bei B'' in die Schicht eintretende, bei C'', B', C' reflektierte Teil des Strahles $A''B''$ u. s. f.

In der Richtung CD treten aus erstens der bei B in die Schicht eintretende, bei C sie wieder verlassende Anteil des Strahles AB, zweitens der bei B' in das zweite Mittel eintretende, bei C' und B reflektierte und schliefslich bei C austretende Teil des Strahles $A'B'$, ferner ein Teil des Strahles $A''B''$, welcher bei B'' in die Schicht eintrat, bei C'', B', C', B reflektiert wurde und bei C in der Richtung CD austritt u. s. f.

Die Lichtintensität des nach BR und CD austretenden Strahlenkomplexes hängt nun nach den Gesetzen der Wellenbewegung ab von der Phasendifferenz der einzelnen ihn komponierenden Strahlen.

Beginnen wir mit der Bestimmung der reflektierten Lichtintensität und suchen die Resultierende der nach BR sich fortpflanzenden Anteile der Strahlen AB und $A'B'$.... auf.

Nennen wir den Abstand des Punktes B von der Lichtquelle x, so wird zur Zeit t das in B befindliche Ätherteilchen im einfallenden Lichtstrahle einen Abstand y von der Gleichgewichtslage haben, der gegeben ist durch

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

worin a die Amplitude, λ die Wellenlänge und T die Oscillationsdauer der Lichtschwingungen bedeutet.

Bei B wird das Licht zum Teil reflektiert, die Amplitude des reflektierten Strahles ist daher kleiner als die des einfallenden Lichtes, während Oscillationsdauer und Wellenlänge ungeändert bleiben. Ist daher r ein echter Bruch, so wird die Amplitude des reflektierten Strahles gleich ra sein. Um nun in dem reflektierten Strahle die Verschiebung y' eines von B um x' entfernten Ätherteilchens zur Zeit t zu erhalten, haben wir zu beachten, daſs durch die Reflexion selbst eine Phasenänderung eintreten kann. Wie wir in den Principien der Wellenbewegung nachwiesen, geht bei der Reflexion einer Wellenbewegung eine halbe Wellenlänge verloren, das heiſst in der reflektierten Welle ist die Bewegung der schwingenden Punkte derjenigen der in der einfallenden Welle schwingenden entgegengesetzt, wenn das zweite Mittel dichter ist als das erste; die Phase der reflektierten Welle ist aber derjenigen der einfallenden Welle gleich, das heiſst die Bewegung geschieht im Abstande x' von B nach derselben Richtung, als wenn sich das einfallende Licht um die Strecke x' fortgepflanzt hätte, wenn das zweite Mittel optisch dünner ist als das erste. Ist demnach, wie bei den Newtonschen Ringen, die Schicht SS Luft, welche an beiden Seiten von Glas begrenzt ist, so ist die Phase der reflektierten Welle gleich der der einfallenden Welle, da Luft weniger dicht ist als Glas, und wir erhalten

$$y' = ra \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} \right).$$

Der Strahl $A'B'$ ist bei B' von der Lichtquelle, wenn B um x entfernt war, um $x - BE$ entfernt, wenn $B'E$ senkrecht zu AB ist, also die Wellenebene des einfallenden Lichtes darstellt. Für den Punkt B' erhalten wir daher

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} \right).$$

Bei B' tritt der Lichtstrahl zum Teil in die Schicht ein, erfährt also eine Schwächung seiner Amplitude von a zu da, wo d ein echter Bruch ist. Mit dieser Amplitude durchläuft er zunächst im Innern der Schicht die Strecke $B'C'$ und besitzt in dieser eine andere Wellenlänge λ' als diejenige des einfallenden Lichtes, da, wie wir sahen, bei der Brechung die Wellenlänge geändert wird. Eine Änderung der Phase findet bei der Brechung nicht statt. Bei C' wird der Strahl reflektiert und erfährt dadurch neuerdings eine Schwächung seiner Amplitude von da zu ϱda, zugleich aber tritt hier auch der Verlust einer halben Wellenlänge ein, da die untere Grenze der Schicht SS die obere eines dichtern Mittels ist. Nach der Reflexion bei C' wird daher zur Zeit t der Abstand eines unmittelbar über C' liegenden Ätherteilchens von der Gleichgewichtslage sein

$$y_1 = \varrho da \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C'}{\lambda'} - \frac{1}{2} \right)$$

und da

$$\cos \pi = -1; \ \sin \pi = 0$$

$$y_1 = -\varrho da \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C'}{\lambda'} \right).$$

Der reflektierte Strahl durchläuft dann die Strecke $C'B$ gleich $B'C'$ und tritt bei B wieder in das erste Mittel in der Richtung BR aus. Auf der Strecke $C'B$ hat der Strahl die Amplitude ϱda und die Wellenlänge λ'; durch die Brechung bei B wird die Amplitude nochmals geschwächt auf $\delta \varrho da$ und die Wellenlänge wird wieder die frühere λ. Im Abstande x' von B wird daher die Verschiebung y_1 eines Ätherteilchens zur Zeit t

$$y_1 = -\delta \varrho da \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE + x'}{\lambda} - \frac{2B'C'}{\lambda'} \right)$$

oder

$$y_1 = -\delta \varrho da \,.\, \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} \right) \right].$$

Der von dem nächstfolgenden Strahle $B''A''$ nach BR reflektierte Anteil ist gegen den von $B'A'$ herrührenden Anteil genau so verschoben wie dieser gegen den direkt bei B reflektierten Strahl, er hat auch den Weg BE weniger, dagegen den Weg $B''C'' + C''B' = 2B'C'$ mehr zurückgelegt, aufserdem ist er zweimal mehr bei C'' und B' reflektiert worden; dieser Anteil ist demnach dargestellt durch

$$y_2 = -\delta \varrho^3 da \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - 2\left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} \right) \right].$$

In derselben Weise kommt von einem dritten, vierten...$n$ten Strahle ein Anteil nach BR, von denen jeder zwei Reflexionen mehr erfahren hat als sein vorhergehender und die Strecke BE weniger, dafür aber $2B'C'$ mehr zurückgelegt hat, so dafs die Gleichung des n. Strahles wird

$$y_n = -\delta \varrho^{2n-1} da \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - n\left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} \right) \right].$$

Die resultierende Verschiebung Y des an diesem Orte vorhandenen Ätherteilchens zur Zeit t ist die Summe aller dieser einzelnen Verschiebungen:

$$Y = y' + y_1 + y_2 + \ldots\ldots. y_n$$

oder setzen wir

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} \right) = \vartheta \quad 2\pi \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} \right) = \eta$$

$$Y = ra \sin \vartheta - \delta \varrho da \left\{ \sin(\vartheta - \eta) + \varrho^2 \sin(\vartheta - 2\eta) + \ldots.. \varrho^{2n-2} \sin(\vartheta - n\eta) \right\}.$$

Um diese Resultierende zu berechnen, haben wir den Wert der in der Klammer stehenden Reihe zu bestimmen. Wir gelangen dazu, indem wir jedes Glied der Reihe mit $2 \cos \eta$ multiplicieren und die Produkte dann in folgender Weise zerlegen

$$2 \cos \eta \,.\, \sin(\vartheta - \eta) = 2 \cos^2 \eta \sin \vartheta - \sin 2\eta \cos \vartheta.$$

Addieren und subtrahieren wir auf der rechten Seite $\sin^2 \eta \sin \vartheta$, so wird

$$2 \cos \eta . \sin(\vartheta - \eta) = (\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) \sin \vartheta - \sin 2\eta \cos \vartheta + (\cos^2 \eta + \sin^2 \eta) \sin \vartheta$$
$$= \sin(\vartheta - 2\eta) + \sin \vartheta.$$

Das zweite Glied wird in dieser Weise zerlegt

$$2 \cos \eta \,.\, \sin(\vartheta - 2\eta) = 2 \cos \eta \,.\, \sin([\vartheta - \eta] - \eta) =$$
$$= 2 \cos^2 \eta \sin(\vartheta - \eta) - \sin 2\eta \,.\, \cos(\vartheta - \eta);$$

addieren und subtrahieren wir hier $\sin^2\eta \,.\, \sin(\vartheta - \eta)$, so wird

$$2\cos\eta \,.\, \sin(\vartheta - 2\eta) = \sin(\vartheta - 3\eta) + \sin(\vartheta - \eta)$$

und so fort, so dafs das n. Glied wird

$$2\cos\eta \,.\, \sin(\vartheta - n\eta) = \sin(\vartheta - [n+1]\,\eta) + \sin(\vartheta - [n-1]\,\eta).$$

Bezeichnen wir den Wert der Reihe mit R, so liefert uns diese Zerlegung

$$2\cos\eta \,.\, R = \sin\vartheta + \varrho^2 \sin(\vartheta - \eta) + \ldots\ldots \varrho^n \sin(\vartheta - [n-1]\,\eta)$$
$$+ \sin(\vartheta - 2\eta) + \varrho^2 \sin(\vartheta - 3\eta) + \ldots\ldots \varrho^n \sin(\vartheta - [n+1]\,\eta).$$

Da n als unendlich grofs anzusehen ist, da in jedem auf die Grenzfläche fallenden Strahlenbündel unendlich viele Strahlen vorhanden sind, welche einen Anteil nach BR senden, so können wir die erste der beiden Reihen auf der rechten Seite schreiben

$$\sin\vartheta + \varrho^2 \,.\, R$$

da die auf das erste folgenden Glieder nichts anders sind als die ursprüngliche mit ϱ^2 multiplicierte Reihe.

Die zweite Reihe ist dann ebenso, da es die ursprüngliche Reihe weniger dem ersten Gliede dividiert durch ϱ^2 ist,

$$\frac{R - \sin(\vartheta - \eta)}{\varrho^2},$$

somit wird

$$2\cos\eta \,.\, R = \sin\vartheta + \varrho^2 R + \frac{R - \sin(\vartheta - \eta)}{\varrho^2}$$

oder

$$R = \frac{\varrho^2 \sin\vartheta - \sin(\vartheta - \eta)}{2\varrho^2 \cos\eta - \varrho^4 - 1}.$$

Damit wird die resultierende Bewegung

$$Y = ra \,.\, \sin\vartheta - \varrho\, d\, \delta a \,\frac{\varrho^2 \sin\vartheta - \sin(\vartheta - \eta)}{2\varrho^2 \cos\eta - \varrho^4 - 1}$$

oder

$$Y = \frac{ra\,(\varrho^2\, 2\cos\eta - \varrho^4 - 1) - \varrho^3 d\delta a + \varrho d\delta a \,.\, \cos\eta}{2\varrho^2 \cos\eta - \varrho^4 - 1} \,.\, \sin\vartheta +$$
$$+ \frac{\varrho d\delta a \sin\eta}{2\varrho^2 \cos\eta - \varrho^4 - 1} \,.\, \cos\vartheta.$$

Bezeichnen wir die Koefficienten von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ mit A und B, und setzen für ϑ seinen Wert, so wird

$$Y = A \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right) + B \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right)$$

und man erkennt, dafs wir den ganzen reflektierten Strahlenkomplex durch zwei Strahlen ersetzt haben, welche eine Phasendifferenz von einer viertel Wellenlänge besitzen. Nach den Interferenzgesetzen ist dann das Quadrat der resultierenden Amplitude, also die resultierende Intensität gleich der

Summe der Quadrate der einzelnen Amplituden. Nennen wir die resultierende Intensität J, so ist demnach

$$J = A^2 + B^2.$$

Um die resultierende Intensität bequemer auswerten zu können, wollen wir gleich hier bemerken, dafs wir für die Werte der Schwächungskoefficienten im nächsten Kapitel (§ 82 und § 83) beweisen werden, dafs

$$\varrho = r, \quad d\delta = 1 - r^2.$$

Setzen wir diese Werte von ϱ und $d\delta$ in die Ausdrücke für A und B, so wird

$$A = a\,\frac{(r + r^3)(\cos\eta - 1)}{2r^2\cos\eta - r^4 - 1} = a\,\frac{(r + r^3)(1 - \cos\eta)}{1 + r^4 - 2r^2\cos\eta}$$

$$B = a\,\frac{(r^3 - r)\sin\eta}{1 + r^4 - 2r^2\cos\eta}.$$

Daraus folgt

$$J = a^2 r^2\,\frac{(r^2 + 1)^2(1 - \cos\eta)^2 + (r^2 - 1)^2\sin^2\eta}{(1 + r^4 - 2r^2\cos\eta)^2}$$

oder

$$J = a^2 r^2\,\frac{(r^2 + 1)^2(1 - \cos\eta)\,.\,2\sin^2\tfrac{1}{2}\eta + 4(r^2 - 1)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\eta\,.\,\sin^2\tfrac{1}{2}\eta}{(1 + r^4 - 2r^2\cos\eta)^2}$$

oder indem wir den gemeinschaftlichen Faktor $2\sin^2\frac{1}{2}\eta$ heraussetzen und für $2\cos^2\frac{1}{2}\eta = 1 + \cos\eta$ schreiben

$$J = a^2 r^2\,\frac{2\sin^2\tfrac{1}{2}\eta\,\{(r^2 + 1)^2(1 - \cos\eta) + (r^2 - 1)^2(1 + \cos\eta)\}}{(1 + r^4 - 2r^2\cos\eta)^2}$$

oder schliefslich

$$J = \frac{4a^2r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\eta}{(1 - r^2)^2 + 4r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\eta}.$$

Dieser Ausdruck für die resultierende Intensität beweist, dafs dieselbe von der Dicke der Schicht und von der Neigung des einfallenden Lichtes abhängig ist, denn davon ist η abhängig, und je nach dem Werte von η

$$\eta = 2\pi\left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)$$

kann der Sinus zwischen 0 und 1 liegen. Ist der Sinus gleich 0, so folgt die resultierende Intensität ist gleich Null, ist der Sinus gleich 1, so wird

$$J = \frac{4a^2r^2}{(1 + r^2)^2}.$$

Um die Abhängigkeit des Wertes dieses Sinus von der Dicke der Schicht besser zu übersehen, sei die Dicke derselben bei C' (Fig. 130) $C'F$ gleich Δ. Die Strecke $B'C' = BC'$ ist dann

$$B'C' = \frac{C'F}{\cos B'C'F}.$$

Der Winkel $B'C'F$ ist, da $C'F$ dem Einfallslote bei B' parallel ist, gleich dem Brechungswinkel i', demnach ist

$$B'C' = \frac{\Delta}{\cos i'}.$$

Die Strecke BE, um welche der Strahl AB hinter $A'B'$ zurück ist, ist

$$BE = BB' \,.\, \sin BB'E.$$

Der Winkel $BB'E$, welchen die ankommende Wellenebene mit der brechenden Fläche bildet, ist gleich dem Winkel, den die ankommenden Lichtstrahlen mit dem Einfallslote bilden, somit

$$BE = BB' \,.\, \sin i.$$

Weiter ist, da $B'C' = C'B$,

$$BF = FB'; \quad BB' = 2B'F$$

und da

$$B'F = C'F \,.\, \operatorname{tang} B'C'F = \Delta \,.\, \operatorname{tang} i',$$

$$BE = 2\Delta \,.\, \operatorname{tang} i' \,.\, \sin i.$$

Nach dem Brechungsgesetz verhalten sich nun die Sinus der Einfalls- und Brechungswinkel zu einander wie die Wellenlängen im ersten und zweiten Mittel, demnach

$$\sin i : \sin i' = \lambda : \lambda',$$

$$\sin i = \frac{\sin i' \,.\, \lambda}{\lambda'}.$$

Fig. 130.

Demnach ist

$$\frac{BE}{\lambda} = \frac{2\Delta \,.\, \operatorname{tang} i' \,.\, \sin i'}{\lambda'}$$

und somit

$$\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} = \frac{2\Delta}{\cos i'}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin^2 i'}{\lambda'}\right) = \frac{2\Delta \cos i'}{\lambda'}.$$

Damit wird

$$\tfrac{1}{2}\eta = 2\pi \frac{\Delta \cos i'}{\lambda'}$$

und die resultierende Intensität

$$J = \frac{4a^2r^2 \sin^2 2\pi \dfrac{\Delta \cos i'}{\lambda'}}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 2\pi \dfrac{\Delta \cos i'}{\lambda'}}.$$

Es ergibt sich daraus unmittelbar, dafs die resultierende Intensität eine periodische Funktion ist, welche bei gegebenem Einfallswinkel i und gegebener Wellenlänge λ nur abhängt von der Dicke der Schicht. Nehmen wir zunächst an, der Einfallswinkel sei gleich Null, das Licht falle senkrecht auf die Schicht, so ist auch $i' = 0$, $\cos i' = 1$ und J erhält immer dann seinen gröfsten Wert

$$J = \frac{4ar^2}{(1+r)^2}, \text{ wenn } \sin 2\pi \frac{\Delta}{\lambda'} = \pm 1,$$

wenn also

$$\sin 2\pi \frac{\Delta}{\lambda'} = \sin (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

oder wenn

$$\frac{\Delta}{\lambda'} = (2n-1)\frac{1}{4} \quad \Delta = (2n-1)\frac{\lambda'}{4}.$$

Wenn also die Dicke der Schicht gleich einem ungeraden Vielfachen einer viertel Wellenlänge ist, der von dem Strahl $A'B'$ also durchlaufene Weg um eine halbe Wellenlänge oder ein ungerades Vielfaches derselben gröfser ist als der Weg des Strahles AB, gibt das Zusammenwirken der beiden Strahlen die gröfste Helligkeit.

Der Wert von J wird dagegen am kleinsten, er wird gleich Null, wenn

$$\sin 2\pi \frac{\Delta}{\lambda'} = 0,$$

wenn also

$$\sin 2\pi \frac{\Delta}{\lambda'} = \sin 2n \frac{\pi}{2}$$

oder wenn

$$\Delta = 2n \frac{\lambda'}{4},$$

wenn also die Dicke der Schicht ein gerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge oder Null ist, wenn also der von $A'B'$ mehr zurückgelegte Weg gleich Null oder ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt.

Man übersieht dieses Resultat sofort, wenn man bedenkt, dafs allein durch die verschiedenen Reflexionen an der obern und untern Grenze der Schicht zwischen den beiden Strahlen die Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge eintritt. Kommt dann durch die Wegedifferenz

$$A'B' + B'C' + C'B + BR - AB - BR$$

die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge hinzu, so ist bei der Interferenz in dem reflektierten Strahlenkomplexe die Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge oder was dasselbe ist, gleich Null, die Strahlen müssen sich also verstärken. Ist dagegen die Wegedifferenz gleich Null oder einer Anzahl von ganzen Wellenlängen, so ist die schliefsliche Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge, die Strahlen müssen sich also gegenseitig schwächen, oder wie wir durch die ausgeführte Rechnung fanden, sich ganz und gar aufheben.

Hat nun die Schicht, wie bei der Anordnung für die Newtonschen Ringe an verschiedenen Stellen eine verschiedene Dicke, so wird überall dort, wo

$$\Delta = 0, \quad 2\frac{\lambda'}{4}, \quad 4\frac{\lambda'}{4}, \quad 6\frac{\lambda'}{4} \ldots$$

ist, sich volle Dunkelheit finden, da überall dort die reflektierten Strahlen mit der durch die Reflexion entstandenen Phasendifferenz zusammentreffen. Dort aber, wo

$$\Delta = \frac{\lambda}{4}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \quad 5\frac{\lambda}{4}, \quad 7\frac{\lambda}{4} \ldots$$

findet sich das Maximum der Helligkeit.

Wie wir sahen, traten bei den Newtonschen Ringen unter Anwendung homogenen Lichtes die dunklen Ringe hervor, wo die Dicke der Schicht 0,

2, 4, 6... war, die hellen jedoch bei den Dicken 1, 3, 5, 7..., also gerade an den Stellen, wo sie die Undulationstheorie erwartet.

Die Dicken der Schichten für die Maxima und Minima der verschiedenen Farben müssen nach der Undulationstheorie verschieden und zwar den Wellenlängen proportional sein, der erste helle Ring im Roten mufs dort auftreten, wo

$$\varDelta = \tfrac{1}{4}\lambda_r$$

und bei den übrigen Farben dort, wo die Dicke der Schicht gleich einer viertel Wellenlänge dieser Farben ist. Newtons Messungen haben diese Forderung experimentell nachgewiesen, die von Fresnel hiernach durch Multiplikation mit 4 berechneten Wellenlängen stimmen, soweit es bei der Unbestimmtheit der Bezeichnung Rot etc. möglich ist, vollkommen mit Fraunhofers § 28 bereits erwähnten Messungen für die dunklen Linien überein.

Fällt das Licht nicht senkrecht auf unsere Vorrichtung zur Erzeugung der Newtonschen Ringe, d. h. sehen wir schräg auf dieselbe, so werden die Durchmesser der Ringe, also die Dicken der Schicht, wo sie erscheinen, andere, und zwar soll $\varDelta$, die Dicke, wo ein Ring, welcher bei senkrechtem Hinabsehen bei der Dicke d erscheint, sich bildet, gleich sein

$$\varDelta = \frac{d}{\cos i'},$$

worin i' der Winkel ist, den der im Innern der Schicht reflektierte Strahl mit dem Einfallslote bildet.

Auch diese Thatsache folgt aus der Undulationstheorie, denn nach unserem Ausdrucke für J

$$J = \frac{4\,a^2 r^2 \sin^2 2\pi \dfrac{\varDelta \cos i'}{\lambda'}}{(1 - r^2)^2 + 4\,r^2 \sin^2 2\pi \dfrac{\varDelta \,.\, \cos i'}{\lambda'}},$$

worin i' die eben angegebene Bedeutung hat, erhält J seinen gröfsten Wert, wenn

$$\sin \frac{\varDelta \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi = \sin\,(2n - 1)\,\frac{\pi}{2} = \pm 1$$

$$\varDelta = \frac{2n - 1}{\cos i'} \cdot \frac{\lambda'}{4}.$$

Dagegen erhält J seinen kleinsten Wert, wenn jener Sinus gleich Null ist, also

$$\varDelta = \frac{2n}{\cos i'} \cdot \frac{\lambda'}{4}.$$

Diese Werte für J verhalten sich daher zu den bei senkrechter Incidenz erhaltenen, wie 1 zu $\cos i'$, wie es nach den Versuchen de la Provostayes und Desains in der That der Fall ist.

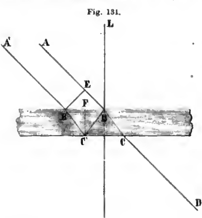
Die vorhin erwähnte von Feussner bei keilförmigen Blättchen, von Sohnke und Wangerin speciell bei den Newtonschen Ringen untersuchte Abweichung der Dimensionen der Streifen und Ringe von diesem Gesetze hat ihren Grund darin, dafs bei schiefer Incidenz die Voraussetzungen unserer Ableitung nicht genau erfüllt sind. Wir nahmen an, dafs sämtlicher zu

Interferenz kommende Strahlen vor dem Eintritt in das Blättchen einander parallel waren, dafs also in jeder Richtung BR nur solche Strahlen zur Interferenz kommen, die vorher der Richtung AB Fig. 129 parallel waren. Das ist strenge richtig nur bei senkrechter Incidenz; bei schiefer Incidenz dagegen wirken Strahlen zusammen, welche vorher gegen einander geneigt waren. Feussner hat für den Fall keilförmiger Blättchen, Wangerin für den der Newtonschen Ringe die gesamten zur Interferenz kommenden Strahlen berücksichtigt; die sich dann ergebenden Ausdrücke stellen die Beobachtungen vollständig dar.

Schliefslich ist der Durchmesser der Ringe ein anderer, wenn zwischen den Gläsern anstatt Luft eine andere Substanz ist, und zwar verhalten sich die Dicken der Schichten in zwei Fällen dort, wo ein bestimmter Ring auftritt, umgekehrt wie die Brechnngsexponenten der Substanzen; als anstatt Luft Wasser zwischen die Gläser gebracht wurde, war die Dicke der Schicht $\frac{3}{4}$ von derjenigen, welche sie war, als sich Luft zwischen den Gläsern befand.

Nach der Undnlationstheorie ist der Brechungsexponent gleich dem Verhältnis der Wellenlängen in beiden Mitteln, die Wellenlänge für mittlere Strahlen im Wasser ist also $\frac{3}{4}$ von derjenigen in Luft. Ist nun zwischen den Gläsern Wasser anstatt Lnft, so tritt in die Gleichungen für Δ anstatt der Wellenlänge in Luft diejenige in Wasser. Da nun aber Δ der Wellenlänge λ' direkt proportional ist, so mufs die Dicke der Schicht bei Anwendung von Wasser in demselben Verhältnisse kleiner werden, wie die Wellenlänge im Wasser kleiner ist als in Luft.

Fig. 131.



Sowie sich die Ringe im reflektierten Lichte nach allen ihren Einzelnheiten ans der Undulationstheorie herleiten lassen, so auch diejenigen im durchgelassenen Licht. In der Richtung CD (Fig. 131) treten aus ein Teil des Strahles AB, der in B und C gebrochen ist, und der Teil des Strahles $A'B'$, der in B' gebrochen, bei C' und B reflektiert und schliefslich in C gebrochen ist.

Behalten wir ganz die vorhin angewandte Bezeichnung bei, so wird die Verschiebung eines um x' von C in der Richtung CD entfernten Ätherteilchens infolge der nach AB ankommenden Lichtbewegung ausgedrückt sein durch

$$y_0 = d\delta a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda}\right)$$

und infolge des von $A'B'$ dorthin gelangenden Teiles der Lichtbewegung

$$y_1 = d\varrho^2\delta a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C'}{\lambda'} - \frac{1}{2} - \frac{C'B}{\lambda'} - \frac{1}{2} - \frac{BC}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda}\right),$$

wie man unmittelbar erhält, wenn man die einzelnen Schwächungen der

Amplitude, die durchlaufenen Wege und Phasenverluste des Strahles bei den Reflexionen, wie sie in der Gleichung in der Reihenfolge, in welcher sie eintreten, dargestellt sind, in Betracht zieht.

Indem wir die Glieder in den Klammern passend ordnen, wird

$$y_0 = d\delta a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'}\right)$$

$$y_1 = d\varrho^2 \delta a \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda'} - \left(\frac{3BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right) - 1\right]$$

oder da

$$\sin 2\pi = 0, \ \cos 2\pi = 1,$$

$$y_1 = d\varrho^2 \delta a \,.\, \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - \left(\frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right].$$

Zu diesen beiden kommen nun wieder unendlich viele von weitern Strahlen rührende Anteile, deren jeder zweimal mehr reflektiert ist als der ihm unmittelbar vorhergehende und deren jeder gegen den vorhergehenden dieselbe Wegedifferenz hat, welche der Strahl y_1 gegen den Strahl y_0 besitzt. Der dritte Strahl ist deshalb

$$y_2 = d\varrho^4 \delta a \,.\, \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - 2\left(\frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right]$$

und der n. Strahl

$$y_n = d\varrho^{2n} \delta a \,.\, \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - n\left(\frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right].$$

Die resultierende Verschiebung zur Zeit t ist dann

$$Y = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots\cdots y_n,$$

oder wenn wir jetzt

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'}\right) = \vartheta \text{ und wieder } \frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} = \eta$$

setzen,

$$Y = d\delta a \{\sin\vartheta + \varrho^2 \sin(\vartheta - \eta) + \varrho^4 \sin(\vartheta - 2\eta) + \cdots\cdots \varrho^{2n} \sin(\vartheta - n\eta)\}.$$

Behandeln wir die in der Klammer stehende Reihe ganz wie vorhin die für das reflektierte Licht erhaltene Reihe, so wird

$$2\cos\eta \,.\, R = \sin(\vartheta + \eta) + \varrho^2 \sin\vartheta + \varrho^4 \sin(\vartheta - \eta) + \cdots\cdots \varrho^{2n+2} \sin(\vartheta - n\eta)$$
$$+ \sin(\vartheta - \eta) + \varrho^2 \sin(\vartheta - 2\eta) + \cdots\cdots \varrho^{2n} \sin(\vartheta - [n - 1]\eta)$$

oder

$$2\cos\eta\, R = \varrho^2 R + \sin(\vartheta + \eta) + \frac{R - \sin\vartheta}{\varrho^2}$$

und daraus schliefslich

$$R = \frac{\varrho^2 \sin(\vartheta + \eta) - \sin\vartheta}{2\varrho^2 \cos\eta - \varrho^4 - 1}.$$

Setzen wir diesen Wert von R in die Gleichung für Y, so wird

$$Y = d\delta a \cdot \frac{\sin\vartheta - \varrho^2 \sin(\vartheta + \eta)}{1 + \varrho^4 - 2\varrho^2 \cos\eta}$$

und wenn wir nach $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ zerlegen

$$Y = d\delta a\,\frac{1-\varrho^2\cos\eta}{1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta}\cdot\sin\vartheta - d\delta a\,\frac{\varrho^2\sin\eta}{1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta}\cdot\cos\vartheta.$$

Auch hier haben wir somit den gesamten durch die Schicht hindurchgegangenen Strahlenkomplex auf zwei Wellen reduciert, welche die Phasendifferenz von einer viertel Wellenlänge haben. Nach den Interferenzgesetzen ist deshalb die resultierende Intensität J_1 gleich der Summe der Quadrate der Teilamplituden, also

$$J_1 = (d\delta a)^2\,\frac{(1-\varrho^2\cos\eta)^2+(\varrho^2\sin\eta)^2}{(1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta)^2}$$

$$J_1 = (d\delta a)^2\,\frac{1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta}{(1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta)^2}$$

oder schliefslich

$$J_1 = \frac{(d\delta a)^2}{(1-\varrho^2)^2+2\varrho^2\sin^2\frac{1}{2}\eta}$$

und wenn wir wieder setzen

$$d\delta = 1-r^2,\quad \varrho = r,$$

so wird

$$J_1 = a^2\,\frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\frac{1}{2}\eta}.$$

Da in diesem Ausdrucke η denselben Wert hat wie vorhin

$$\eta = 2\pi\left(\frac{2BC}{\lambda'}-\frac{BE}{\lambda}\right) = 2\pi\,\frac{2\varDelta\,.\cos i'}{\lambda'},$$

so erhalten wir schliefslich für die resultierende Intensität

$$J_1 = a^2\,\frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2 2\pi\,\dfrac{\varDelta\cos i'}{\lambda'}}.$$

Auch hier ist somit bei gegebenem Einfallswinkel und gegebener Wellenlänge die resultierende Helligkeit eine periodische Funktion der Schichtdicke. Es erhält J_1 seinen gröfsten Wert

$$J_1 = a^2,\ \text{wenn}\ \sin 2\pi\,\frac{\varDelta\cos i'}{\lambda'} = 0$$

$$\varDelta\cos i' = 2n\,\frac{\lambda'}{4}.$$

Dagegen erhält J_1 seinen kleinsten Wert

$$J_1 = \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2},\ \text{wenn}\ \sin 2\pi\,\frac{\varDelta\cos i'}{\lambda'} = 1$$

$$\varDelta\cos i' = (2n+1)\,\frac{\lambda'}{4}.$$

Man sieht, im durchgelassenen Lichte treten die dunklen Ringe an den Stellen auf, an welchen im reflektierten die hellen sich zeigen und umgekehrt; um die helle Mitte legt sich zunächst ein dunkler Ring, um diesen ein heller u. s. f.

Im weifsen Lichte müssen daher alle Ringe komplementär zu denjenigen gefärbt sein, welche man bei dem Hinabsehen auf die Vorrichtung wahrnimmt. Die sonstigen Sätze über Lage und Ausdehnung der Ringe bleiben genau dieselben.

Auch dieses Resultat übersieht man sofort, da hier durch die Reflexion zweimal der Verlust einer halben Wellenlänge, oder wenn man die Anteile der folgenden Strahlen mit beachtet, 4, 6 . . . überhaupt $2n$ mal ein solcher Verlust eintritt; die durch die verschiedenen Reflexionen eintretenden Phasendifferenzen betragen also immer eine Anzahl ganzer Wellenlängen oder sind gleich Null.

Die Interferenzen hängen also lediglich von den Wegedifferenzen ab, die Strahlen müssen sich schwächen, wenn diese ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge betragen, die Dicke der Schicht also ein ungerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge ist, sie müssen das Maximum der Helligkeit geben, wenn die Wegedifferenz ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, wie es unsere Entwicklung zeigt.

Wir bemerkten vorhin, dafs die Farben im durchgelassenen Lichte sich von denen im reflektierten Lichte dadurch unterscheiden, dafs sie weniger intensiv und brillant sind. Es liegt das nicht etwa darin, dafs die Differenz der Helligkeiten der hellen und dunklen Ringe im reflektierten Lichte gröfser ist als im durchgelassenen, denn diese Differenz ist in beiden gleich, nämlich $\frac{4a^2r^2}{(1+r^2)^2}$, sondern daran, dafs im reflektierten Licht die dunklen Ringe in der That ganz dunkel sind, während in dem durchgelassenen Licht die dunklen Ringe nur um diesen Betrag dunkler sind als die hellen Ringe. Der Kontrast zwischen ganz dunkel und einer gewissen Helligkeit erscheint uns aber gröfser als zwischen zwei Wellen, deren eine hell und deren andere weniger hell erscheint. Dieser Unterschied zwischen den beiden Ringsystemen beruht also nur in unserer subjektiven Empfindung.

§ 68.

Farben dicker Platten. Interferentialrefraktoren. Ähnliche Interferenzerscheinungen, wie sie dünne Blättchen liefern, kann man unter gewissen Umständen auch durch dicke Platten erhalten; so erhielt Newton[1]) solche, als er in den Mittelpunkt eines gläsernen Hohlspiegels, der auf der Rückseite, also der konvexen Fläche belegt war, und dessen Glasdicke mehr als zwei Centimeter betrug, einen Schirm aufstellte, welcher an der Stelle des Mittelpunktes eine kleine Öffnung hatte, und dann durch diese Öffnung ein Bündel Sonnenstrahlen auf den Spiegel fallen liefs. Er beobachtete dann auf der dem Spiegel zugewandten Seite des Schirms ein die Öffnung umgebendes System farbiger Kreise, ganz ähnlich den Ringen im durchgegangenen Licht. Brewster[2]) beobachtete Interferenzstreifen denen ähnlich, welche bei dem Fresnelschen Spiegelversuch auftreten, als er zwei gleich dicke Glasplatten unter einem sehr kleinen Winkel gegen einander neigte und dann

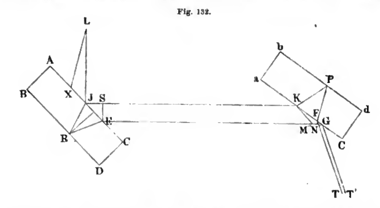
[1]) *Newton*, im 2. Buche der Optik. *Herschel*, On light. art. 676 ff.

[2]) *Brewster*, Edinburg Philos. Transactions. vol. VIII. p. 435. *Herschel*, On light. art. 688 ff.

durch dieselben eine enge Öffnung betrachtete, welche diffuses Tageslicht auf die Platte fallen liefs. Die Theorie dieser Erscheinungen hat Herschel[1]) gegeben. Es würde zu weit führen, wollten wir dieselben hier besprechen; wir wollen nur etwas ausführlicher auf die Modifikation des Brewsterschen Versuches eingehen, welche Jamin[2]) angegeben hat, da dieselbe die Konstruktion eines Apparates möglich gemacht hat, mit Hülfe dessen man die geringsten Unterschiede in der Brechbarkeit zweier verschiedener Körper konstatieren und messen kann.

Wenn man eine etwa drei Centimeter dicke Glasplatte, deren Flächen möglichst eben und genau parallel geschliffen sind, in zwei Stücke schneidet, die eine fest aufstellt und auf sie Licht von einer breiten Lichtquelle, etwa Wolkenlicht fallen läfst, die andere dann in einer beliebigen Entfernung von der ersten so aufstellt, dafs sie von dem Lichte getroffen wird, welches von der ersten Platte reflektiert wird, und zugleich, dafs ihre Flächen sehr wenig gegen einander geneigt sind, so erhält man eine Reihe von Interferenzstreifen, welche parallel der Linie sind, in welcher die Plattenebenen bei hinreichender Verlängerung sich schneiden würden. Man sieht diese Interferenzstreifen schon mit freien Augen das von der zweiten Platte gelieferte Spiegelbild der Lichtquelle durchschneiden. Besser sieht man sie aber, wenn man mit einer Lupe in der Richtung des reflektierten Lichtes auf die zweite Platte sieht. Fig. 132 zeigt die Anordnung der Platten,

Fig. 132.



und deutet an, in welcher Weise die Strahlen geteilt werden, welche zur Interferenz kommen. Ist LJ ein die Vorderfläche der ersten Platte treffender Strahl, so wird derselbe zum Teil bei J reflektiert, nach JK, zum Teil in die Platte hineingebrochen nach JR, dann bei R nach E reflektiert, und bei E nach EG gebrochen, von wo er schliefslich nach T' zurückgeworfen wird. Der bei J nach JK reflektierte Strahl wird bei K in die zweite Platte nach P gebrochen, von dort nach F reflektiert, wo er dann nach FT austritt. Jeder Strahl LJ wird also so in zwei zerlegt FT und GT',

[1]) *Herschel,* On light. III. Abschn. § V. art. 676—694.

[2]) *Jamin*, Comptes Rendus. XLII. p. 482. Poggend. Annal. Bd. XCVIII. Man sehe auch *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 50 ff.

welche die zweite Platte verlassen, von denen der erste an der vordern Fläche der ersten und der Hinterfläche der zweiten Platte, der zweite an der Hinterfläche der ersten und der Vorderfläche der zweiten Platte reflektiert ist, von denen der eine zwischen den Platten den Weg JK, der andere den Weg EG zurückgelegt hat. Aufser diesen beiden Strahlen treten noch weitere auf, welche vielfache Reflexionen erfahren haben; dieselben sind indes so lichtschwach, dafs sie vernachlässigt werden dürfen. Wenn die Platten gegen einander geneigt sind, so sind die Wege, welche die Strahlen, bis sie nach der zweiten Reflexion sich parallel fortpflanzen, zurücklegen, nicht gleich; die Strahlen FT und GT haben demnach eine bestimmte Phasendifferenz, die wir aus der Wegedifferenz ableiten können.

Der Strahl GT' hat den Weg $JR + RE + EG$, der Strahl FT den Weg $JK + KP + PF$ und dann bis er in die durch G zu den Strahlen gelegte senkrechte Ebene GN eintritt den Weg FN zurückgelegt. Die Wegedifferenz der Strahlen ist somit

$$JK + KP + PF + FN - JR - RE - EG.$$

Um aus dieser Wegedifferenz die Phasendifferenz $\varDelta$ zu erhalten, ist zu beachten, dafs die Wege JR, RE, KP, PF nicht in der Luft, sondern in Glas zurückgelegt sind. Bezeichnen wir den Brechungsexponenten des Glases mit n, so verhält sich die Anzahl der Wellen auf der Längeneinheit in Glas zu der in Luft wie $n : 1$; der in Glas zurückgelegte Weg enthält also soviel Wellen wie der $n$fache in der Luft zurückgelegte Weg. Wir müssen somit, um den Unterschied in Wellenlängen zu erhalten, die im Glas zurückgelegten Wege mit n multiplicieren. Die Phasendifferenz wird demnach, wenn wir zugleich beachten, dafs $RE = JR$ und $KP = PF$,

$$\varDelta = JK + 2n \,.\, KP + FN - 2nJR - EG$$

und legen wir $KM \parallel AC$, so dafs $EM = JK$,

$$\varDelta = 2nKP + FN - 2nJR - MG.$$

Bezeichnen wir die Dicke der Platten mit d, den Einfallswinkel an der ersten Platte mit i, an der zweiten mit i', den Brechungswinkel in der ersten Platte mit r, in der zweiten mit r' und den Winkel MKG mit α, so erhalten wir zunächst

$$KP = \frac{d}{\cos r'},\ JR = \frac{d}{\cos r}.$$

Zur Bestimmung von MG haben wir in dem Dreieck MGK

$$MG : KM = \sin MKG : \sin MGK.$$

Darin ist

$$KM = JE = 2d \,.\, \operatorname{tang} r,\ MKG = \alpha$$

$$MGK = EMK - MKG = CEM - MKG = 90 - i - \alpha,$$

somit wird

$$MG = 2d \,.\, \operatorname{tang} r \frac{\sin \alpha}{\cos (i + \alpha)}.$$

Für FN haben wir zunächst

$$FN = FG \,.\, \cos NFG = FG \,.\, \sin i'$$

$$FG = GK - FK = GK - 2d \,.\, \operatorname{tang} r'.$$

Den Wert von GK erhalten wir wieder aus dem Dreieck GKM

$$GK = 2d \,.\, \text{tang}\, r \frac{\cos i}{\cos(i+\alpha)}$$

und damit

$$FN = 2d \left\{ \text{tang}\, r \frac{\cos i}{\cos(i+\alpha)} - \text{tang}\, r' \right\} \sin i'.$$

Daraus wird dann $\varDelta$

$$\varDelta = 2d \left\{ n \left(\frac{1}{\cos r'} - \frac{1}{\cos r} \right) + \text{tang}\, r \frac{\cos i \sin i'}{\cos(i+\alpha)} - \text{tang}\, r' \sin i' - \text{tang}\, r \frac{\sin\alpha}{\cos(i+\alpha)} \right\}$$

$$\varDelta = 2d \left\{ n \left(\frac{1}{\cos r'} - \frac{1}{\cos r} \right) + \frac{\sin r}{\cos r} \cdot \frac{\cos i \,.\, \sin i' - \sin\alpha}{\cos(i+\alpha)} - \frac{\sin r' \,.\, \sin i'}{\cos r'} \right\}.$$

Wenn nun, wie wir bisher angenommen, die Einfallsebenen beider Flächen zusammenfallen, ist $i' = i + \alpha$, wo dann α den Neigungswinkel der beiden Platten bedeutet. Das mittelste Glied der Klammer können wir dann schreiben

$$\frac{\sin r}{\cos r} \cdot \frac{\cos i \sin(i+\alpha) - \sin\alpha}{\cos(i+\alpha)} = \frac{\cos i \,.\, \sin i \,.\, \cos\alpha + \cos^2 i \sin\alpha - \sin\alpha}{\cos(i+\alpha)} \cdot \frac{\sin r}{\cos r}$$

$$\frac{\sin r}{\cos r} \cdot \frac{\sin i (\cos i \cos\alpha - \sin i \sin\alpha)}{\cos(i+\alpha)} = \frac{\sin r}{\cos r} \cdot \sin i.$$

Damit wird $\varDelta$

$$\varDelta = 2d \left\{ \frac{n - \sin r' \,.\, \sin i'}{\cos r'} - \frac{n - \sin r \sin i}{\cos r} \right\}.$$

Beachten wir nun, dafs

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}, \quad \cos r = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

und dafs dieselbe Beziehung zwischen r' und i' besteht, so erhält man leicht schliefslich

$$\varDelta = 2d \left\{ \sqrt{n^2 - \sin^2 i'} - \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \right\}.$$

Die Phasendifferenz der aus einem einfallenden Strahl sich ergebenden Strahlen hängt also aufser von der Dicke der Platten von dem Einfallswinkel des Strahls an der ersten und zweiten Platte und mit dem letztern von dem Neigungswinkel der Platten ab. Für einen Strahl LX ist sie also eine ganz andere als für den Strahl LA.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dafs die Einfallsebenen beider Strahlen zusammenfallen. Wenn indes, wie wir annahmen, von einer ausgedehnten Lichtquelle Licht auf die erste Platte fällt, so ist das nicht für alle Strahlen der Fall. Ein Strahl LA z. B., für den der Punkt L vor der Ebene der Zeichnung liegt, würde so reflektiert, dafs der Punkt K hinter der Ebene der Zeichnung liegt; da E, der Punkt, wo der an der Hinterfläche reflektierte Strahl die Platte verläfst, dann ebenfalls hinter der Ebene der Zeichnung liegt, so ist der Punkt G noch weiter hinter die Ebene der Zeichnung verschoben, und KG würde von vorn nach hinten gegen die Einfallsebene geneigt sein. Da aber die Einfallslote der beiden Flächen nicht parallel sind, fällt dann die Einfallsebene an der zweiten Fläche nicht mit der Ebene

$JKGE$ zusammen, der Punkt F rückt weniger weit hinter die Ebene der Zeichnung, so daſs KF mit KG einen gewissen Winkel β bildet. Auch dann führt die Berechnung der Phasendifferenz zwischen den beiden aus einem einfallenden entstehenden Strahlen zu genau demselben Ausdruck, den wir oben ableiteten. Wenn man sich die Lage der Ebenen im Raume konstruiert, sind die Rechnungen nicht schwierig; wir übergehen sie hier als zu weitläufig, da wir aus dem Bisherigen bereits das Verständnis der Erscheinung erhalten können[1]).

Gerade so nämlich, wie jeder einfallende Strahl in zwei zerlegt wird, deren Phasendifferenz die soeben berechnete ist, so pflanzen sich in der Richtung jedes austretenden Strahles zwei fort, welche die soeben bestimmte Phasendifferenz haben, und welche die erste Platte in benachbarten Punkten treffen. Man erkennt das sofort, wenn man sich in Fig. 132 die eben als zweite Platte betrachtete als erste denkt, und TF resp. $T'G$ als einfallende Strahlen annimmt. Es pflanzt sich dann in der Richtung AL der Teil des Strahles $T'G$ fort, der in der ersten Platte an der vordern, in der zweiten an der hintern Fläche reflektiert ist, von TF der in der ersten Platte an der hintern, in der zweiten an der vordern Fläche reflektierte Teil. Gleiches gilt von allen Strahlen LX, welche die zweite Fläche verlassen. Denken wir uns deshalb in L ein Auge, so wird das in jeder Richtung LX die aus der Phasendifferenz der in der betreffenden Richtung gleichzeitig sich fortpflanzenden Wellen resultierende Intensität wahrnehmen. Da nun bei gegebenem Neigungswinkel der Platten die Phasendifferenz von dem Winkeln i und i' abhängt, so müssen sich helle und dunkle Streifen zeigen. Die Gestalt dieser Streifen ist, wenn man sie vollständig verfolgt, eine ziemlich verwickelte[2]); wenn man aber das Auge in der Ebene der beiden Einfallslote hält, und dann, wie es meist geschieht, nur einen kleinen Teil des ganzen Systems übersieht, so erscheinen dieselben als geradlinige Streifen, welche parallel sind der Schnittlinie der beiden Platten. Stehen also die Flächen beider Platten vertikal, und ist die zweite Platte um eine vertikale Axe gegen die erste gedreht, so sind die Streifen vertikal; steht die erste Platte vertikal und ist die zweite um eine horizontale Axe gegen die erste geneigt, so sind die Streifen horizontal. Man sieht also je nach der Neigung der Platten das Spiegelbild der Lichtquelle von horizontalen oder vertikalen Interferenzstreifen durchsetzt.

Ein wesentlicher Umstand dieser Methode, Interferenzen hervorzurufen, ist der, daſs die interferierenden Strahlen zwischen den beiden Platten in einem ziemlich weiten Abstande sich von einander befinden. Dieser Abstand ist

$$ES = EJ \,.\, \sin EJS = 2d \operatorname{tang} r \,.\, \cos i,$$

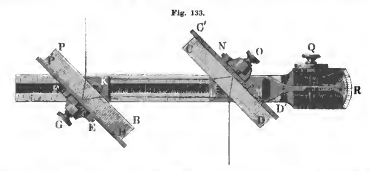
er ist also proportional der Dicke der Platten. Gerade dieser Umstand macht diese Methode zu manchen Untersuchungen besonders brauchbar, indem man die interferierenden Strahlen durch verschiedene Medien gehen läſst, und die Phasendifferenz miſst, welche den Strahlen auf diesen Wegen erteilt wird. Dieselbe gibt sich durch eine Verschiebung der Interferenzstreifen zu erkennen. Erhalten z. B. die Strahlen auf den verschiedenen

[1]) Man sehe *Ketteler*, Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.
[2]) *Ketteler* a. a. O.

Wegen die Differenz einer halben Wellenlänge, so treten an Stelle der vorber hellen Streifen jetzt dunkle und umgekehrt, und der Effekt ist, dafs das ganze beobachtete System um den halben Abstand der dunklen Streifen verschoben erscheint. Wird dann durch irgend eine Manipulation die Phasendifferenz stetig vergröfsert, so werden die Streifen immer weiter verschoben, ist die Differenz eine ganze Wellenlänge, so ist das System um den ganzen Abstand der dunklen Streifen verschoben, indem jetzt wieder an derselben Stelle die Streifen erscheinen und so fort.

Die Form, welche Jamin dem zu solchen Untersuchungen dienenden Apparate, dem Interferentialrefraktor gab[1]), zeigt Fig. 133. Auf einer mit

Fig. 133.



Schienen versehenen eisernen Fufsplatte sind die beiden Platten *PB* und *CD* aufgestellt, so dafs man dieselben beliebig einander nähern oder von einander entfernen kann. Die Platten sind mit ihren hintern Flächen auf geschwärzten Messingplatten befestigt. Die erste wird fest so aufgestellt, dafs ihre Ebene senkrecht zur Verschiebungsebene der Platten und um 45° gegen die Axe des Instruments geneigt ist. Sie ist um eine horizontale Axe drehbar, und die Schraube *G* dient dazu, sie genau aufzustellen. Die zweite Platte *CD* ist um eine horizontale Axe *NM* durch die Schraube *O* und um eine vertikale Axe *L* drehbar, so dafs man sie in jede beliebige kleine Neigung gegen die erste Platte bringen kann. Die Bewegung um die Axe *L* geschieht mit der Schraube *Q*, welche auf die mit der Platte *CD* fest verbundene Albidade *MR* einwirkt. Man beobachtet die entstehenden Interferenzstreifen mit einer Lupe, welche mit einem Fadenkreuz versehen ist, an welchem man einen bestimmten Streifen einstellt.

Jamin hat diesen Apparat unter andern benutzt, um den Brechungsexponenten von Wasser in verschiedener Temperatur mit einander zu vergleichen[2]). Zwischen die beiden Spiegel wurden genau gleich lange Röhren, deren Länge *L* gemessen wurde, gelegt, so dafs der eine der interferierenden Strahlen durch die eine, der andere durch die andere Röhre hindurchging. Beide Röhren wurden zunächst mit Wasser von 0° gefüllt, und das Fadenkreuz der Lupe auf einen Streifen eingestellt. Dann wurde die eine der Röhren erwärmt und die Verschiebung der Streifen beobachtet. Trat bei

[1]) *Jamin*, Cours de physique. T. III. p. 544. Duboscq in Paris verfertigt die Apparate in dieser Form.

[2]) *Jamin*, Comptes Rendus. XLIII. p. 1191. Poggend. Annal. Bd. C.

einer bestimmten Temperaturdifferenz eine Verschiebung um μ Streifenbreiten ein, und ist die Wellenlänge des angewandten Lichtes in der Luft gleich l, so ist die infolge der Temperaturdifferenz eingetretene Phasendifferenz gleich $\mu \,.\, l$. Ist die Wellenlänge des Lichtes im kalten Wasser λ_1, im warmen Wasser λ_2, so ist die Anzahl der auf die Länge der Röhre kommenden Wellen im kalten Wasser $\frac{L}{\lambda_1}$, im warmen Wasser $\frac{L}{\lambda_2}$ und die Differenz dieser Zahlen ist gleich der Anzahl der verschobenen Streifen oder

$$L\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \mu.$$

Multiplicieren wir auf beiden Seiten mit l, so wird

$$L\left(\frac{l}{\lambda_1} - \frac{l}{\lambda_2}\right) = \mu l.$$

Wie wir sahen, ist $\frac{l}{\lambda_1}$, der Brechungsexponent des Wassers von 0°, gleich n_0, $\frac{l}{\lambda_2}$, der des warmen, gleich n, somit wird

$$n = n_0 - \frac{\mu l}{L}.$$

Auf diese Weise erhielt Jamin den früher angegebenen Wert von n

$$n = n_0 - 0{,}000\,012\,573\, t - 0{,}000\,001\,929\, t^2.$$

Ebenso hat Jamin nach dieser Methode die Brechungsexponenten des Wassers unter gewöhnlichem und verstärktem Drucke verglichen. Sind die Brechungsexponenten des Wassers bei dem Drucke einer Atmosphäre n', bei verstärktem Drucke n, und ist die Dichtigkeit des Wassers im ersten Falle 1, im zweiten d, so fand er

$$\frac{n^2 - 1}{d} = n'^2 - 1,$$

also das specifische Brechungsvermögen im Sinne der Emissionstheorie konstant. Ist $\varkappa$ der Kompressionskoefficient des Wassers für eine Atmosphäre, so ist bei einem Drucke von P Atmosphären

$$d = 1 + \varkappa \,.\, P.$$

Er konnte deshalb aus der Gleichung

$$\frac{n^2 - 1}{n'^2 - 1} = 1 + \varkappa P$$

den Wert von $\varkappa$ berechnen, und erhielt so den von Grassi gefundenen Wert[1]).

Dieselbe Methode benutzten Ketteler, Mascart und Lorentz zu ihren § 32 mitgeteilten Versuchen über die Brechungsexponenten der Gase. Die soeben entwickelte Gleichung

$$n_0 - n = \mu \frac{\lambda}{L}$$

ist es, die wir bei der Besprechung der Mascartschen Versuche als Ausgangspunkt nahmen.

[1]) *Jamin*, Comptes Rendus. XLV. p. 892.

§ 69.

Interferenz bei grofsen Gangunterschieden. Bei allen den bisher besprochenen Interferenzerscheinungen haben wir die Interferenzen immer nur bei einem Gangunterschiede der interferierenden Strahlen von einer geringen Anzahl Wellenlängen wahrgenommen; bei den Farben dünner Blättchen zeigen sich die Newtonschen Ringe nur in begrenzter Zahl, und in einiger Entfernung von der dunklen Mitte im reflektierten Licht verschwinden auch bei Anwendung von fast homogenem Lichte die Ringe und machen einer gleichmäfsigen Beleuchtung Platz. Bei den Newtonschen Ringen verlangt aber unser Ausdruck für die Lichtstärke

$$J = \frac{4\,a^2\,r^2 \sin^2 2\pi \dfrac{\Delta \cos i'}{\lambda'}}{(1 - r^2)^2 + 4\,r^2 \sin^2 2\pi \dfrac{\Delta \cos i'}{\lambda'}}$$

bei homogenem Lichte die Periodicität der Erscheinung, welches auch der Wert von Δ sei. Ähnlich ist es in allen Fällen.

Der Grund dieser scheinbaren Abweichung der Erscheinung von den Forderungen der Undulationstheorie liegt darin, dafs im allgemeinen auch das homogenste Licht, welches wir zu derartigen Versuchen benutzen, nicht aus Licht von in der That nur einer Wellenlänge besteht; es ist vielmehr zusammengesetzt aus Wellen, deren Länge zwischen λ und $d\lambda$ liegt, worin zwar der Wert von $d\lambda$ sehr klein, aber nicht gleich 0 werden kann. Ist nun bei den Newtonschen Ringen z. B. Δ gleich einem nur kleinen Vielfachen von $\frac{1}{4}\lambda$, so ist es auch noch ein Vielfaches von $\frac{1}{4}(\lambda + d\lambda)$. Die Wellen gleicher Farbe werden sich also alle noch gleichzeitig stärken und schwächen. Wird aber $\Delta = m \cdot \frac{\lambda}{4}$, worin m einen grofsen Wert hat, so erhält auch $m \cdot \frac{d\lambda}{4}$ einen merklichen Wert und es wird die Dicke ein anderes Vielfaches von $\frac{\lambda + d\lambda}{4}$, oder

$$\Delta = m\,\frac{\lambda}{4} = n\,\frac{\lambda + d\lambda}{4},$$

worin m eine andere Zahl ist als n. Dabei tritt dann auch der Fall ein, dafs wenn m eine gerade Zahl, n eine ungerade wird, so dafs die Wellen von der Länge λ an der Stelle sich schwächen, wo die von der Länge $\lambda + d\lambda$ sich verstärken; an nebenliegenden Stellen tritt das Umgekehrte ein, so dafs an allen Stellen unter den Strahlen, die auf das Auge den gleichen Eindruck machen, solche sind, welche das Maximum der Intensität haben; deshalb müssen die hellen und dunklen Ringe aufhören.

Ist diese Erklärung richtig, so mufs man z. B. bei dem Fresnelschen Spiegelversuch die Interferenzen wieder sichtbar machen können, wenn man eine Stelle neben den Streifen, wo sie infolge des eben bemerkten Umstandes aufhören sichtbar zu sein, mit dem Prisma betrachtet. In dem von dem Prisma entworfenen Spektrum müssen alle die Farben, für welche die Wegedifferenz an der betrachteten Stelle ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, verschwunden sein; es mufs deshalb an der betreffenden Stelle eine, den Fraunhoferschen Linien ähnliche, dunkle Linie

auftreten, welche sich von den eigentlichen Fraunhoferschen Linien dadurch unterscheidet, dafs von der Mitte der dunklen Linie die Helligkeit nach beiden Seiten allmählich zunimmt.

In der That haben Fizeau und Foucault[1]) auf diese Weise nachweisen können, dafs die Interferenzen noch bei einer Phasendifferenz von 4000 Wellenlängen des blauen Lichtes stattfinden. Sie erzeugten zu dem Ende die Interferenzstreifen auf einem Schirm, der einen schmalen Spalt hatte, und dirigierten sie zunächst so, dafs der mittlere weifse Streifen auf den Spalt fiel. Darauf wurde der eine der beiden Spiegel mit einer Mikrometerschraube in der Richtung seiner Normale vorwärts geschoben, aber so, dafs seine Ebene der ursprünglichen Lage immer parallel blieb. Da auf diese Weise der Weg der von diesem Spiegel reflektierten Wellen kürzer wurde, so wurden die Streifen dadurch verschoben, und je weiter der Spiegel vorgeschoben wurde, ein um so weiter von der Mitte entfernter Teil des Interferenzbildes fiel auf den Spalt. Indem man dann an einer bestimmten Stelle des Spektrums, z. B. im Rot beobachtete, wie oft ein Interferenzstreifen auftrat und verschwand, konnte man die Phasendifferenz, welche ein bestimmtes Mal den Streifen hervorrief, erhalten. Wenn der Streifen zum ersten Male auftritt, ist die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge, beim zweiten Auftreten $\frac{3}{2}$, beim $n$ten $\frac{2n+1}{2}\lambda$.

Bei dem nächstfolgenden Interferenzstreifen im Spektrum gegen die brechbare Seite hin ist dann die Phasendifferenz, da die Wellenlänge dort kleiner ist, um eine Wellenlänge gröfser und so bei jedem folgenden Streifen, so dafs wenn zwischen zwei bestimmten Streifen p andere liegen, die Phasendifferenz des mit der kleinern Wellenlänge p Wellenlängen mehr beträgt, als des Streifens mit der gröfsern Wellenlänge. Diese Bemerkung gestattet auch direkt, wenn die Wellenlänge der beiden Streifen bekannt ist, aus der Zählung der zwischenliegenden Streifen die Phasendifferenz zu bestimmen. Nennen wir die Wegedifferenz zu dem Punkte des Interferenzbildes, welches gerade auf den Spalt fällt, d, die gröfsere Wellenlänge λ, die kleinere λ', so ist für beide Streifen die Phasendifferenz in Wellenlängen

$$\frac{d}{\lambda} = m + \tfrac{1}{2}; \quad \frac{d}{\lambda'} = n + \tfrac{1}{2},$$

da die Wegedifferenz jedenfalls einer ungeraden Anzahl von halben Wellenlängen gleich sein mufs. Die eben gemachte Bemerkung liefert dann weiter die Beziehung

$$n - m = p.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$m = p\,\frac{\lambda'}{\lambda - \lambda'} - \tfrac{1}{2}; \quad n = p\,\frac{\lambda}{\lambda - \lambda'} - \tfrac{1}{2}.$$

Man kann daraus auch direkt die Wegedifferenz d und aus dieser dann die Wellenlänge von andern Linien des Spektrums bestimmen.

Noch in anderer Weise hat Fizeau[2]) gezeigt, dafs bei einer Phasen-

[1]) *Fizeau* und *Foucault*, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. XXVI. Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

[2]) *Fizeau*, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. LXVI. Poggend. Annal. Bd. CXIX.

differenz von 50 000 Wellenlängen noch die Interferenzen ganz ungestört auftreten. Wir haben im § 47 gezeigt, dafs eine Alkoholflamme, deren Docht mit Kochsalz eingerieben ist, oder welche von verbrennendem Alkohol geliefert wird, welcher Kochsalz aufgelöst enthält, die sogenannte Brewstersche Lampe nur Licht von der Wellenlänge der Doppellinie D, also von zwei ganz bestimmten Wellenlängen aussendet, die nur sehr wenig von einander verschieden sind. Ruft man daher mit einer solchen Lichtquelle das Phänomen der Newtonschen Ringe hervor, so müssen dieselben noch bei sehr grofsen Dicken der Schicht auftreten, sie können erst dann verschwinden, wenn die Dicke der Schicht $\varDelta$ so grofs geworden ist, dafs

$$\varDelta = m\,\frac{\lambda}{4} = (m+1)\,\frac{\lambda'}{4}$$

wird, wenn wir mit λ die Wellenlänge der weniger brechbaren, mit λ' die der brechbarern der beiden Linien bezeichnen. Denn erst dann fallen die Maxima der einen mit den Minimis der andern Welle zusammen. Wenn man aber dann die Dicke der Schicht noch weiter vergröfsert, so müssen, da wir hier in der That nur zwei Wellen haben, die Maxima und Minima der einzelnen Wellen wieder neben einander fallen, es müssen wieder Ringe auftreten, welche wieder dieselbe Schärfe haben müssen als bei geringer Dicke, also aus scharfen hellen und dunkeln Streifen bestehen müssen, wenn

$$\varDelta_1 = 2m\,\frac{\lambda}{4} = 2\,(m+1)\,\frac{\lambda'}{4}$$

wird, denn dann fallen wieder die Minima beider Wellen auf genau dieselbe Stelle. Bei einer weitern Vergröfserung der Dicke der Schicht müssen die Streifen wieder allmählich mehr verwaschen werden und ist

$$\varDelta_2 = 3m\,\frac{\lambda}{4} = 3\,(m+1)\,\frac{\lambda'}{4},$$

wieder verschwunden sein u. s. f.

Fizeau stellte zwischen einer ebenen Platte und einer schwach konvexen Linse, welche mit einer Mikrometerschraube parallel der Axe der Linse von der ebenen Platte entfernt werden konnte, mit Hülfe der Natronflamme Newtonsche Ringe her. Indem er durch eine Lupe auf die Vorrichtung hinsah, konnte er die ganze Fläche der Linse übersehen, und beobachtete, wenn er zunächst Linse und Platte sich berühren liefs, die ganze Fläche der Linse mit Kreisen von gröfster Schärfe bedeckt. Dreht man die Mikrometerschraube so, dafs sich die Linse von der Platte entfernt, so ziehen sich die Ringe zusammen, bewegen sich gegen die Mitte hin, verschwinden dort, während vom Rande her immer neue Ringe auftreten, ein Verhalten, welches sich unmittelbar aus der Theorie der Ringe ergibt. Versieht man die Lupe mit einem Fadenkreuz, oder bringt man auf der Linse ein Merkzeichen an, so kann man die Anzahl der vorübergegangenen Streifen zählen. Jedem vorübergegangenen Streifen entspricht eine Vergröfserung des Abstandes von Linse und Platte von einer halben Wellenlänge. Vergröfsert man den Abstand stetig, so fangen die Streifen, nachdem gegen 400 vorübergegangen, an undeutlich zu werden, gegen 500 verschwinden sie fast gänzlich, gegen 600 werden sie wieder

deutlich, und wenn etwa 1000 vorübergegangen sind, werden sie wieder mit voller Schärfe sichtbar. Die Erscheinung wiederholte sich in dieser Weise, bis etwa 10000 Ringe vorübergegangen, dann wurden die Interferenzen undeutlich und es liefsen sich keine weitern Ringe zählen, ein Beweis, dafs die so hergestellte Natronflamme noch nicht lediglich die angenommenen beiden Wellen aussendet, sondern auch noch geringe Mengen anderer mit wenig verschiedenen Wellenlängen. Viel weiter gelang es das Phänomen zu verfolgen mit einer Flamme, welche ein Gemisch von vier Teilen rektificierten käuflichen Methylalkohols mit einem Teil absoluten Alkohols lieferte. Die geringe Menge des in beiden vorhandenen Kochsalzes färbte bei der niedrigen Temperatur die Flamme rein gelb, so dafs nur die Wellen λ und λ' darin auftraten, und man konnte so 52 Reihen deutlicher Ringe vorübergehen lassen, ohne dafs die Interferenzen aufhörten.

Die Vergröfserung des Abstandes von einem vollen Verschwinden bis zum nächstfolgenden betrug nach mehrfachen Messungen $0^{mm},289\,45$. Diese Vergröfserung ist mit den vorhin gewählten Zeichen

$$\Delta_2 - \Delta = 2m\frac{\lambda}{4},$$

somit

$$m = \frac{2(\Delta_2 - \Delta)}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0,289\,45}{0,000\,588} = 983.$$

Der 52. Periode entspricht also eine Differenz von mehr als 50000 Wellenlängen. Für das Verhältnis der beiden Wellenlängen ergibt sich daraus

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{m+1}{m} = 1,001\,02.$$

Ganz ebenso gelang es Fizeau, diese Interferenzstreifen bei Anwendung von Platten fester Körper, wie Glas, Krystalle etc. zu beobachten. Sind solche Platten auch möglichst eben und parallel geschnitten, so sind doch an einzelnen Stellen immer kleine Unebenheiten vorhanden. Betrachtet man nun solche Platten bei Beleuchtung mit der zuletzt erwähnten Flamme, indem man senkrecht auf dieselbe herabsieht, so sieht man selbst bei Dicken, die nahe ein Centimeter betragen, an diesen Stellen Streifen oder Ringe auftreten, welche je nach der Form der Flächen verschiedene Gestalt haben. Fast stets kann man an einzelnen Stellen geradlinige Streifen wahrnehmen, ein Beweis, dafs dort die Platten schwach prismatisch sind.

Diese Beobachtung hat Fizeau in den Stand gesetzt, die äufserst geringen Änderungen in dem Brechungsvermögen der festen Körper messend zu verfolgen. Man erzeugt bei einer bestimmten Temperatur in einer solchen Platte die Streifen, und versieht die Platte an der Stelle eines Streifens mit einer Marke. Man erwärmt dann die Platte bis zu einer andern höhern Temperatur, und beobachtet die Anzahl Streifen, welche an der Marke vorübergehen. Kennt man die Dicke der Platte und den Brechungsexponenten bei der ersten Temperatur, ferner den Ausdehnungskoefficienten der Platte, so kann man aus der Zahl der vorübergegangenen Streifen die Änderung des Brechungsexponenten bestimmen. Ist die Dicke der Platte gleich E, der Brechungsexponent bei der niedrigern Temperatur gleich n, die Wellenlänge des Lichtes in Luft gleich λ, somit diejenige im Glase

gleich $\frac{\lambda}{n}$, so ist nacb der Theorie der Newtonschen Ringe an der Stelle, wo wir einen bestimmten dunklen Streifen seben,

$$E = (2m + 1)\frac{\lambda}{4n}$$

$$4nE = (2m + 1)\lambda.$$

Wird die Platte um t^0 erwärmt, so wird die Dicke der Platte dadnrch $E(1 + \alpha t)$, wenn wir mit α den Ausdehnungskoefficienten der Platte bezeichnen. Ist der Brecbnngsexponent der Platte dann n' geworden, somit die Wellenlänge in der Platte gleich $\frac{\lambda}{n'}$, so wird, wenn infolge der Erwärmung f Streifen an der Platte vorübergegangen sind, jetzt

$$4n'E(1 + \alpha t) = (2m + 2f + 1)\lambda.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$f = \frac{2n'E(1 + \alpha t) - 2nE}{\lambda}$$

und weiter

$$n' = \frac{2nE + f.\lambda}{2E(1 + \alpha t)}.$$

Würde sich der Brechungsexponent nicht ändern, also $n = n'$ sein, so würde die Anzahl der verschobenen Streifen sein müssen

$$f' = \frac{2nE.\alpha t}{\lambda}$$

und ans dieser und der Gleichung für f ergibt sich

$$n' - n = \frac{\lambda(f - f')}{2E(1 + \alpha t)}.$$

Für eine Spiegelglasplatte von St. Gobain, deren Dicke $E = 6^{mm},8175$, n bei 18^0 C. gleich 1,5033 nnd $\alpha = 0,000008613$ für jeden Grad Temperaturerhöhung war, fand Fizean für eine Temperaturerhöhung von $38^0,82$ C. $f = 13,1$. Für f' findet sich aus obigen Angaben $f' = 11,64$. Daraus folgt

$$n' - n = 0,000063$$

oder der Brechungsexponent für gelbes Licht wird mit steigender Temperatur gröfser, und zwar, wenn die Temperatur um $38^0,82$ C. wächst, um sechs Einheiten anf der fünften Decimale. Für eine Temperaturerhöhung von 100^0 C. folgt daraus

$$(n' - n)_{100} = 0,000162.$$

Für andere Substanzen erbielt Fizeau folgende Werte:

Anderes Glas von St. Gobain $(n' - n)_{100}$ =	0,0000997
Kronglas (Zinkglas von Maïs)	0,0000000
Flufsspath, parallel den Spaltungsfl. gescbn.	0,00136
Flintglas, gewöhnliches	0,00026
Flintglas, schweres	0,000687.

Bei festen Körpern nehmen also die Brechungsexponenten mit steigender

Temperatur nicht, wie bei Flüssigkeiten, stetig ab, sondern zum Teil sogar zu, ein neuer Beweis, dafs die § 30 besprochene Annahme von Hoek, aus der sich die Konstanz des specifischen Brechungsvermögens im Sinne der Emissionstheorie auch nach den Grundsätzen der Undulationstheorie ergab, nicht begründet ist.

Ein weiteres Mittel, um Interferenzen bei grofsen Gangunterschieden zu erzeugen, ist zuerst von Talbot angewandt[1]), und später von Esselbach benutzt worden, um die Wellenlängen der ultravioletten Strahlen zu messen[2]). Schiebt man, ein Spektrum im Fernrohr betrachtend, eine dünne Platte einer durchsichtigen Substanz, etwa ein mikroskopisches Deckgläschen, von der violetten Seite her zwischen Okular und Auge, bis es die halbe Pupille verdeckt, so sieht man das Spektrum mit Interferenzstreifen bedeckt, in ganz ähnlicher Weise wie bei der ersten Methode von Fizeau und Foucault. Am bequemsten ist es, wenn man das Gläschen vor dem Okular befestigt, so dafs dasselbe zur Hälfte bedeckt ist. Man sieht die Interferenzen auch dann schon, wenn man durch ein Prisma direkt auf eine feine Lichtlinie hinsieht und dann das Blättchen vor das Auge hinschiebt.

Diese Streifen entstehen dadurch, dafs von den Strahlen gleicher Wellenlänge, welche auf der Retina in einem Punkte vereinigt werden, die eine Hälfte durch das Gläschen, die andere durch Luft gegangen ist. Ist der Brechungsexponent des Glases n, die Wellenlänge einer bestimmten Farbe in Luft gleich λ, so ist die Wellenlänge im Glase gleich $\frac{\lambda}{n}$. Ist nun die Dicke der Glasplatte gleich d, so ist die Phasendifferenz der durch Glas und Luft gegangenen Strahlen

$$\varDelta = n\frac{d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} = \frac{d}{\lambda}(n-1).$$

Mit dieser Phasendifferenz treffen somit die Strahlen auf der Retina zusammen, diejenigen Stellen des Spektrums, für welche dieselbe ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, müssen somit ausgelöscht werden, es müssen dort dunkle Streifen entstehen. Bei einer Dicke der Platte von etwa $0^{mm},2$ sieht man so im Spektrum gegen 100 Interferenzstreifen.

Geht man von einem Streifen zu dem nächstfolgenden nach der brechbarern Seite über, so ist die Phasendifferenz um eine ganze Wellenlänge gewachsen, gerade so, wie bei den Versuchen von Fizeau und Foucault. Denn ist für eine bestimmte Wellenlänge $\frac{d}{\lambda}(n-1)$ gleich einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge, so wächst mit abnehmendem λ die Phasendifferenz, hat dann aber λ soweit abgenommen, dafs jener Ausdruck um den Wert 1 gröfser geworden, so löschen sich die Wellen wieder

[1]) *Talbot*, Philosophical Magazine. (2) vol. X. 1831. Die Theorie dieser Linien nebst Erklärung des Umstandes, dafs man bei Betrachtung des Spektrums durch ein Fernrohr die Linien nicht erhält, wenn man das Blättchen von Seite des Roten vorschiebt, gibt *Airy*, Poggend. Annal. Bd. LIII und LVIII. Man sehe auch den I. Anhang von *Esselbach* in der unten citierten Abhandlung und *Stefan*, Poggend. Annal. Bd. CXXIII, der eine Reihe Modifikationen des Versuches angibt, bei denen man die Streifen sieht.

[2]) *Esselbach*, Poggend. Annal. Bd. XCVIII.

aus, es tritt also wieder ein dunkler Streifen auf. Liegt also zwischen zwei beobachteten Streifen eine Anzahl p Streifen, so ist die Phasendifferenz des zweiten um p Wellenlängen gröfser. Man kann demnach nach dieser Methode, wenn zwei Wellenlängen im Spektrum bekannt sind, die übrigen bestimmen.

Diese Methode ist, wie Esselbach hervorhebt, zur Messung der Wellenlängen im Ultravioletten ganz ausgezeichnet. Wenn man nämlich zur Erzeugung des Spektrums Quarzprismen und Quarzlinsen anwendet, und alles fremde Licht abblendet, so kann man das ultraviolette Licht direkt sehen, ohne eine fluorescierende Substanz zu Hülfe zu nehmen. Wendet man dann als dünnes Blättchen ebenfalls eine dünne senkrecht zur krystallographischen Axe geschliffene Quarzplatte an, die von Esselbach benutzte hatte eine Dicke von $0^{mm},195$, so kann man die Interferenzstreifen und mit ihnen die Fraunhoferschen bis zur dunklen Linie R deutlich sehen. Esselbach setzte bei seinen Versuchen die von Fraunhofer für C und H gegebenen Wellenlängen als bekannt voraus, berechnete aus diesen, den direkt gemessenen Brechungrexponenten für die senkrecht zur Axe durch den Quarz gehenden Strahlen und der Anzahl p der zwischen C und H liegenden Streifen den Wert von d, und dann mit diesem die Werte der übrigen Wellenlängen. Die Art der Berechnung ist folgende. Für einen bei C liegenden dunklen Streifen ist, wenn λ_1 die Wellenlänge von C bedeutet,

$$\frac{d}{\lambda_1}(n_1 - 1) = r + \tfrac{1}{2}.$$

Für einen bei H liegenden, wenn λ_2 und n_2 Wellenlänge und Brechungsexponenten von H sind,

$$\frac{d}{\lambda_2}(n_2 - 1) = s + \tfrac{1}{2}.$$

Da nun $s - r = p$, so folgt

$$d = \frac{p}{\frac{n_2 - 1}{\lambda_2} - \frac{n_1 - 1}{\lambda_1}}.$$

Für irgend einen Streifen, zwischen dem und $C\,q$ Streifen liegen, dessen Wellenlänge und Brechungsexponent λ und n ist, haben wir ebenso

$$d = \frac{q}{\frac{n - 1}{\lambda} - \frac{n_1 - 1}{\lambda_1}},$$

woraus

$$\lambda = \frac{n - 1}{\frac{n_1 - 1}{\lambda_1} + \frac{q}{d}} = \frac{(n - 1)\,p}{(p - q)\frac{n_1 - 1}{\lambda_1} + q\,\frac{n_2 - 1}{\lambda_2}}.$$

Die von Esselbach so erhaltenen Resultate werden wir in § 76 mit den übrigen Messungen zusammenstellen.

§ 70.

Wredes Theorie der Absorption des Lichtes. Eine interessante Anwendung der im § 67 entwickelten Sätze über die Interferenz der Strahlen in den durchgelassenen Ringen ist die Theorie der Absorption des Lichtes,

welche Baron Wrede aufgestellt hat[1]), besonders um die eigentümlichen Absorptionserscheinungen aus der Undulationstheorie abzuleiten, welche Brewster beim untersalpetersauren Gase und beim Joddampfe beobachtet hat, und welche dieser für unvereinbar mit der Undulationstheorie hielt. Wrede geht dabei von der Hypothese aus, das Licht werde beim Durchgange durch die Körper in deren Innerm an den Atomen teilweise reflektiert, ehe es aus dem Körper austritt, in ganz ähnlicher Weise, wie an den beiden Grenzen der Schicht bei den Farben dünner Blättchen. Es entsteht somit im Innern eine unendliche Menge von Wellensystemen, und an jeder Stelle der zweiten Grenzfläche treten in der Richtung des austretenden Lichtes eine unendliche Anzahl von Strahlen hervor. Die austretenden Strahlen sind aber verschiedener Phase. Denken wir uns z. B., um die Sache leicht zu übersehen, ein solcher Körper bestehe aus einer Anzahl von n Schichten parallel gelagerter Atome, und der Abstand dieser Schichten sei gleich d. Ein Lichtstrahl, welcher an der vordern Fläche unserer durchsichtigen Platte ankommt, wird dort zum Teil reflektiert, zum Teil dringt er in das Innere ein und pflanzt sich zur zweiten Schicht fort. Dort tritt eine zweite Teilung ein, ein Teil pflanzt sich zur dritten Schicht fort, ein Teil wird reflektiert, und kehrt zur ersten Schicht zurück, dort wieder zum Teil reflektiert, pflanzt sich auch ein Teil dieses Strahles zur dritten Schicht fort. An dieser wird dann ein Teil des ersten Strahles reflektiert, ein Teil geht zur vierten Schicht; der reflektierte Anteil wird an der zweiten Schicht nochmals reflektiert und geht dann durch die dritte Schicht teilweise zur vierten Schicht. Man sieht, wenn wir so fortfahren, dafs aus der untern Grenze des durchsichtigen Körpers zunächst ein Teil des einfallenden Lichtes austritt, der keine innere Reflexion erfahren hat. Ferner aber wird eine Gruppe von Strahlen austreten, welche im Innern zweimal reflektiert ist, da von dem an der zweiten und ersten Schicht, an der dritten und zweiten, an der vierten und dritten Schicht etc., zurück und dann wieder in der Richtung des durchgehenden Lichtes reflektierten Anteile wieder ein Teil die folgenden Schichten durchsetzt, ohne reflektiert zu werden. Die Strahlen dieses Anteiles haben einen Weg $2d$ mehr zurückgelegt als das direkt durchgehende Licht. Zu diesen beiden Lichtmengen kommen dann noch eine unendliche Zahl anderer, welche noch mehr Reflexionen erfahren haben. Das zwischen den beiden ersten Schichten hin- und hergesandte Licht erfährt an der zweiten Schicht eine neue Teilung; ein Teil wird nochmals hin- und hergeworfen und dringt dann teilweise ohne weitere Reflexion durch die Platte hindurch, der andere Teil erfährt an der dritten Schicht eine neue Teilung, indem er partiell zur zweiten Schicht und dann wieder teilweise von dieser zurückgeworfen wird, und dann nach vielfachen weitern Teilungen zum Teil ohne neue Reflexion anstritt. Ähnliche Strahlen entstehen in allen folgenden Schichten, dieselben sind viermal reflektiert und haben einen um $4d$ weitern Weg als das direkt durchgehende Licht zurückgelegt.

Weiter entstehen Strahlen, die nach

6facher Reflexion mit einer Wegedifferenz $6d$
8 " " " " " $8d$
$2n$ " " " " " $2nd$

austreten.

[1]) *Wrede*, Poggend. Annal. Bd. XXXIII.



Die Intensität dieser Wellensysteme nimmt mit den vielfachen Reflexionen ab, so daſs die beiden ersten die hellsten sind. Die Reflexionen geschehen alle an den Atomschichten, sie sind somit alle gleichartig, es kann also durch diese keine Phasendifferenz oder nur eine Phasendifferenz von ganzen Wellenlängen entstehen, da nur solche Wellensysteme austreten, welche 2, 4 . . $2n$ mal reflektiert sind, also, wenn durch die Reflexionen Verluste an Wellenlängen eintreten, immer eine gerade Anzahl von halben Wellenlängen verloren haben.

Die Phasendifferenzen, mit welchen die Lichtstrahlen austreten, sind daher gleich den Wegedifferenzen.

Betrachten wir nun zunächst die beiden ersten Wellensysteme, deren Wegedifferenz $2d$ ist, so sieht man, daſs für alle Lichtstrahlen, deren Wellenlänge derart ist, daſs

$$d = \frac{\lambda}{4};\quad 3\,\frac{\lambda}{4};\quad 5\,\frac{\lambda}{4}\,\ldots$$

die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge ist, da für diese

$$2d = \frac{\lambda}{2};\quad 3\,\frac{\lambda}{2};\quad 5\,\frac{\lambda}{2}\,\ldots$$

ist. Gleiches gilt für alle folgenden Systeme, denn das dritte und vierte, ebenso das fünfte und sechste haben eine Wegedifferenz $2d$. Für Lichtstrahlen von den angegebenen Wellenlängen schwächen sich also je zwei dieser Systeme am meisten, die resultierende Lichtstärke aller Systeme muſs daher ein Minimum sein, das Licht dieser Wellenlängen wird absorbiert.

Ist dagegen für Lichtstrahlen anderer Art

$$d = 2\,\frac{\lambda}{4};\quad 4\,\frac{\lambda}{4};\quad 6\,\frac{\lambda}{4}\,\ldots$$

so ist die Phasendifferenz der beiden ersten Systeme

$$2d = 2\,\frac{\lambda}{2};\quad 4\,\frac{\lambda}{2};\quad 6\,\frac{\lambda}{2}$$

und ebenso aller Systeme eine gerade Anzahl von halben Wellenlängen. Alle Systeme von Lichtwellen dieser Arten verstärken sich somit, sie treten im Maximum der Intensität aus, sie werden nicht absorbiert.

Untersucht man die durch die Platte hindurchgegangenen Lichtmengen mittels des Prisma, so müssen in dem Spektrum derselben die Strahlen der ersten Arten fehlen.

Für das diffus zurückgeworfene Licht gelten natürlich ganz ähnliche Schlüsse, und man sieht, wie in demselben eben das Licht absorbiert sein muſs, als im durchgegangenen, da hier nur solches Licht interferiert, welches 1, 3, 5, . . . $2n - 1$ mal an den Atomschichten reflektiert ist, und den Abstand d der Schichten entweder gar nicht oder zweimal oder viermal etc. durchlaufen hat.

Wrede hat nun in der That den Nachweis geliefert, daſs bei passender Annahme der Entfernungen d sich die verschiedenen Absorptionserscheinungen, die natürlichen Farben der Körper, sowie die verschiedenen Grade der Durchsichtigkeit ableiten lassen. Er hat ferner gezeigt, daſs die eigentümlichsten Absorptionserscheinungen sich herleiten lassen, wenn man annimmt, daſs zugleich Schichten in verschiedenen Abständen in den absorbierenden Mitteln

vorhanden sind; so die dunklen Linien im Jodgas durch die Annahme, dafs in demselben Schichten vorhanden sind, deren Entfernungen d gleich der halben und andere, deren Abstäude d' gleich der 75fachen Wellenlänge des roten Lichtes sind. Das Spektrum des durch oxalsaures Chromoxd-Kali hindurchgegangenen Lichtes wird ebenfalls durch zwei Gruppen von Schichten erklärt, deren Abstände sind $d = \frac{1}{2}\lambda_r$ und $d' = 5\lambda_r$.

Es gelang Wrede selbst auf künstlichem Wege seiner Theorie gemäfs die eigentümlichsten Absorptionserscheinungen herzustellen. Er bog ein dünnes Glimmerblatt so, dafs es einen aufrechtstehenden Cylinder bildete, und liefs das Licht einer Kerzenflamme von demselben reflektieren. Die feine im reflektierten Licht entstehende Lichtlinie untersuchte er mit dem Prisma. Ist die Dicke des Glimmerblättchens nicht kleiner als $0^{mm},025$, so erscheint das reflektierte Licht, welches die Summe des an der vordern und hintern Fläche reflektierten ist, weifs; mit dem Prisma untersucht zeigt es aber eine Reihe von schwarzen Streifen, die um so zahlreicher sind, je gröfser d ist. Mit zwei Glimmerblättchen verschiedener Dicke, und indem er auf das zweite das vom ersten reflektierte Licht fallen liefs, erzeugte er Spektra, die den Brewsterschen des Jodgases ganz ähnlich waren.

So vollständig indes die Theorie des Baron Wrede die Erscheinungen der Absorption auch zu erklären scheint, eine Thatsache widerspricht ihr, wie Stokes[1]) und schon Rudberg[2]) bemerkte, auf das entschiedenste und liefert den Beweis für die Richtigkeit der neuern Absorptionstheorie. Bei dem Durchgange des Lichtes durch einen durchsichtigen Körper wird alles Licht geschwächt, es geht in der That Licht verloren, es wird eine gewisse Quantität von Bewegung zurückgehalten. Das dürfte nach der Theorie von Wrede nicht der Fall sein. Denn durch Interferenz geht in der That niemals ein Anteil der Lichtbewegung verloren, durch diese tritt nur eine andere Verteilung der Lichtintensitäten ein. Wird durch Interferenz die Bewegung des Äthers an einer Stelle geschwächt, so wird sie dafür an einer andern verstärkt, die lebendige Kraft der resultierenden Bewegung ist immer gleich derjenigen der Teilbewegungen. Dafs die Wredesche Absorptionstheorie auch diese Konstanz der gesamten Lichtmenge liefert, zeigt schon die vorgetragene Theorie der Newtonschen Ringe, wie dort, so liefert auch die Wredesche Theorie für die Summe des durchgelassenen und reflektierten Lichtes immer die Intensität des einfallenden Lichtes, und für alle jene Wellenlängen, für welche d ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$ ist, ergibt diese Theorie die Intensität des durchgegangenen Lichtes gleich jener des einfallenden Lichtes, also gar keine Schwächung. Die Thatsache, dafs kein Licht ohne Schwächung einen Körper durchsetzt, beweist, dafs die Absorption durch eine Abgabe der Lichtbewegung an die Moleküle der Körper erfolgt.

Es bleibt indes Wredes unleugbares Verdienst, zuerst die Möglichkeit gezeigt zu haben, jene rätselhaften Erscheinungen der Absorption in Gasen aus der Undulationstheorie zu erklären, in denen Brewster den unüberwindlichsten Einwurf gegen dieselbe erblickte.

1) *Stokes*, Poggend. Annal. Ergänzungsband IV.

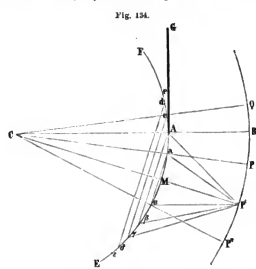
2) Ebendort Anmerkung von Poggendorff zu Stokes' Einwürfen gegen Wrede. Man sehe auch *Wüllner*, Die Absorption des Lichtes in isotropen Medien. Marburg 1862.

§ 71.

Beugung des Lichtes[1]). Bei der Darstellung der Principien der Wellenbewegung haben wir den Nachweis geliefert, dafs bei ungestörter Ausbreitung eine Wellenbewegung in einem isotropen Punktsystem sich auf den Radien einer Kugel fortpflanzen mufs, deren Mittelpunkt der Ursprung der Wellenbewegung ist. Die geradlinige Ausbreitung hat ihren Grund darin, dafs die von den verschiedensten Punkten einer Welle nach dem Huyghensschen Princip zu einem aufserhalb derselben liegenden Punkte sich fortpflanzenden Wellenbewegungen durch Interferenz sich so aufheben, dafs nur die Bewegung übrig bleibt, welche von dem Elemente der ursprünglichen Welle ausgeht, das auf dem Radius liegt, der den Mittelpunkt der Welle mit dem aufserhalb liegenden Punkte verbindet.

Ist C (Fig. 134) der Mittelpunkt einer Welle FAE, so ist die Bewegung in den Punkten P, P', P'' einer abgeleiteten Welle überall gleich-

Fig. 134.



mäfsig so, als hätte sich die Bewegung in der Richtung CAB, CaP, CMP'... von FAE aus zur abgeleiteten Welle fortgepflanzt, als wäre nur von dem unmittelbar um A, a.. liegenden Elemente der primären Welle Bewegung nach B, P.. übertragen.

Denn denken wir uns die primäre Welle z. B. von einem Punkte M aus in einzelne Zonen zerlegt, so dafs die von dem Zonenrande $a\alpha$ nach P' gezogenen Geraden um eine halbe Wellenlänge gröfser sind als MP' und ebenso dafs

$$\beta P' \text{ oder } AP' = \alpha P' + \tfrac{1}{2}\lambda$$

und weiter $\gamma P'$ oder cP' gleich $\beta P' + \frac{1}{2}\lambda$ ist u. s. f., so haben alle Elementar-

[1]) *Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. franç. Tome V. Poggend. Annal. Bd. XXX. Oeuvres complètes. T. I.

wellen, welche von einer Zone $\alpha\beta$ nach P' gelangen, eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge gegen die Wellen der vorhergehenden Zone $a\alpha$ und der nachfolgenden Zone $\beta\gamma Ac$. Da nun die Gröfse der Zone $\alpha\beta aA$ gleich ist der halben Summe der Zone $a\alpha$ und $\beta\gamma Ac$, somit von ihr halb soviel Wellen nach P' gelangen als von jenen beiden zusammen, so wird die von dieser Zone nach P gelangende Wellenbewegung zerstört durch die halbe Summe der von $a\alpha$ und von $\beta\gamma Ac$ nach P' gelangenden Wellen. Gleiches gilt von allen übrigen weiter von M entfernten Zonen; es werden vernichtet die Bewegungen, welche ausgehen:

von $\alpha\beta aA$ durch die halbe Summe derjenigen von $a\alpha$ und $\beta\gamma Ac$
„ $\gamma\delta cd$ „ „ „ „ „ „ $\beta\gamma Ac$ „ $\delta\varepsilon de$

und so, wenn die Welle unbegrenzt ist, bis ins Unendliche fort, so dafs nur die von der halben um M liegenden Zone $a\alpha$ nach P' gelangende Bewegung in der That übrig bleibt.

Damit also die Bewegung sich geradlinig fortpflanze, ist nötig, dafs dieselbe sich ungestört fortpflanze, denn nur dann treten diese Interferenzen auf. Wird aber die Fortpflanzung der Welle gestört, wird ein Teil durch einen vorgestellten, für die Wellenbewegung undurchdringlichen Schirm AG aufgehalten, so mufs auch in der Bewegung der abgeleiteten Welle eine Störung eintreten, die Bewegung der Punkte B, P, P' . ., zu denen sich der eine Teil der Welle ungestört ausbreiten kann, mufs eine andere werden, als wenn die ganze Welle sich ungehindert ausbreiten kann.

Betrachten wir z. B. die Bewegung des Punktes P'. Dadurch, dafs der Schirm AG ungefähr die Hälften aller Zonen von der dritten $\beta\gamma Ac$ an gerechnet auffängt, wird bewirkt, dafs die Bewegung, welche von der Zone $\alpha\beta aA$ ausgeht, nicht zur Hälfte von der folgenden Zone geschwächt wird, während die Bewegung der folgenden alle nahe zur Hälfte fortgenommenen Zonen gerade so sich aufhebt wie früher. Der übrigbleibende Teil der zweiten Zone wird daher mehr als die halbe Zone $a\alpha$ kompensieren, oder die Bewegung P' mufs schwächer sein wie vorhin. Beschränken wir zur deutlicheren Übersicht unsere Deduktion auf den in der Abbildung gezeichneten Durchschnitt durch die Wellen, so sieht man die Bewegung, welche ausgeht von den Bögen

$\alpha\beta$, wird vernichtet durch die halbe Summe $M\alpha + \beta\gamma$
$\gamma\delta$, „ „ „ „ „ „ $\beta\gamma + \delta\varepsilon$,

und so nach dieser Seite ins Unendliche fort. Dagegen wird von dem Bogen aA kein Teil durch einen folgenden kompensiert, da von A an die Welle an der Fortpflanzung gehindert wird. Jede von aA nach P' gelangende Wellenbewegung hat aber gegen die von Ma dorthin kommenden Bewegungen die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge. Da nun die Bögen Ma und aA merklich gleiche Gröfse haben, so hebt sich die Wirkung der Bögen Ma und aA auf P' ganz auf. Während also bei ungehinderter Verbreitung der Wellen die Bewegung in P' durch die Hälfte der von $a\alpha$ ausgehenden Bewegung bestimmt ist, wird sie jetzt nur durch die Hälfte von $M\alpha$ oder $\frac{1}{4}a\alpha$ erregt, sie mufs also schwächer sein als bei ungestörter Ausbreitung. Anders verhält es sich bei P, welches auf dem Radius Ca liegt.

Haben jetzt die Punkte A, c, d; M, α, β die Lage, dafs

$$AP - aP = cP - AP = MP - aP = \alpha P - MP \cdots\cdots = \tfrac{1}{2}\lambda$$

ist, so sind jetzt nach der einen Seite von a alle Zonen aufser der ersten fortgenommen. An der untern Seite von a interferieren die von den verschiedenen Bögen ausgehenden Bewegungen gerade wie bei ungestörter Verbreitung der Wellen, es bleibt also in P die Hälfte der von aM ausgehenden Bewegung. Die von dem Bogen aA ausgehende Bewegung wird, da von A an die ganze Welle aufgefangen ist, gar nicht gestört, dieselbe erregt den Punkt P vollständig. In diesem Falle wird also die Bewegung des Punktes P durch $aA + \frac{1}{2}aM$ oder $\frac{3}{4}MA$ veranlafst, sie ist stärker als bei P' und auch stärker, als wenn die Welle sich ungestört verbreitet hätte.

Nach P'' gelangt, wie man auf ähnliche Weise findet, bei ungehinderter Ausbreitung der Welle nur Bewegung von $\frac{1}{2}M\beta$, nach Vorsetzung des Schirmes AG aber von

$$\frac{1}{2}M\beta + \frac{1}{2}\alpha A$$

und da die von αA ausgehenden Wellen mit den von $M\beta$ ausgehenden eine Phasendifferenz von einer ganzen Wellenlänge haben, so wird die Bewegung in P'' wieder stärker sein, als wenn der Schirm nicht da wäre.

Bei weiterer Ausführung findet man allgemein, dafs von B an die Bewegungen auf der abgeleiteten Welle bald stärker bald schwächer werden, dafs sie von B an gerechnet erst wachsen bis zu einem Maximum, dann abnehmen bis zu einem Minimum bei P', wieder wachsen bis zu einem Maximum u. s. f. Die Maxima werden aber schwächer, je weiter man sich von B entfernt, weil die Neigungen der verstärkenden gegen die direkten Strahlen immer stärker werden. In einem gewissen Abstande von B hören sie daher auf bemerkbar zu sein.

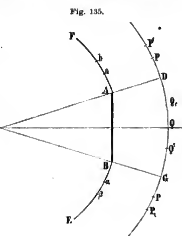
Auch auf der andern Seite von B, z. B. bei Q, wohin nach Vorsetzung des Schirmes direkt keine Bewegung sich fortpflanzt, gelangt von dem unterhalb A liegenden Teile der Welle Bewegung, welche jetzt nicht durch Interferenz vernichtet wird, wie es der Fall sein würde, wenn der Schirm AG nicht vorgestellt wäre. Diese Bewegung zeigt jedoch keine Maxima und Minima, sondern von B an eine stetige Abnahme.

Man sieht leicht, dafs von dem halben Bogen Aa, der jedoch für die verschiedenen Punkte Q verschiedene Werte hat, Bewegung dorthin gelangt, welche immer schwächer wird, weil die Neigung der Strahlen immer stärker wird.

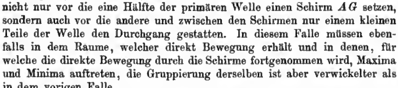
Anders verhält sich jedoch die Bewegung hinter dem Schirme, wenn derselbe nur schmal ist und so nur einen schmalen Teil aus der primären Welle ausschneidet, also an beiden Seiten Bewegung fortgepflanzt wird. Ist AB ein solcher Schirm, den wir uns als einen kleinen Kreis denken wollen, und der aus der Welle $FABE$ ein Stück fortnimmt, so wird die Bewegung in G, P, $P_{,}$, ferner in D, P, P', also aufserhalb des Raumes, für welchen der Schirm AB die direkt fortgepflanzte Bewegung fortnimmt, dieselbe sein wie in dem vorigen Falle. In den Raum DG gelangen aber jetzt Bewegungen von der halben Zone Aa, welche eine von D nach G abnehmende Bewegung hervorbringt, und von der halben Zone $B\alpha$, welche eine von G nach D abnehmende Bewegung erzeugt. Die Bewegung irgend eines Punktes Q' hinter dem Schirme mufs daher die Resultierende aus diesen beiden dorthin gelangenden Bewegungen sein. Da die Phase der von den beiden Bogen ausgehenden Bewegung dieselbe und zwar nahezu

die eines von ihrer Mitte ausgehenden Strahles sein wird, so hängt die Resultierende aus beiden nur ab von der Wegedifferenz, mit welcher die Bewegungen zusammentreffen. In der Mitte des Raumes Q haben beide gleiche Strecken zurückgelegt, dort werden sich daher die Bewegungen stets summieren. Von der Mitte an nach beiden Seiten nehmen die Wege verschiedene Werte an, und in einem gewissen Abstande bei Q' oder $Q_,$ wird die Differenz derselben gerade eine halbe Wellenlänge, die Bewegung wird ein Minimum sein.

Fig. 135.



Bei andern Punkten wird die Wegedifferenz gleich λ, $\frac{3}{2}\lambda$, 2λ etc. sein; dort mufs sich also die Bewegung abwechselnd stärken oder schwächen. Im Innern des Raumes, für welchen der Schirm AB die direkte Bewegung aufhält, mnfs demnach die Bewegung von der Mitte Q an abwechselnd ein Minimnm und ein Maximum werden.



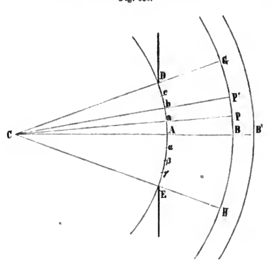
Noch ein dritter Fall der Störung ist möglich, der nämlich, dafs wir nicht nur vor die eine Hälfte der primären Welle einen Schirm AG setzen, sondern auch vor die andere und zwischen den Schirmen nur einem kleinen Teile der Welle den Durchgang gestatten. In diesem Falle müssen ebenfalls in dem Raume, welcher direkt Bewegung erhält und in denen, für welche die direkte Bewegung durch die Schirme fortgenommen wird, Maxima und Minima auftreten, die Gruppierung derselben ist aber verwickelter als in dem vorigen Falle.

Die Mitte B Fig. 136 des Raumes, welcher direkte Bewegung erhält, kann je nach ihrem Abstande von DE ein Maximum oder Minimum der Bewegung zeigen, und dem entsprechend können daneben erst Minima, dann Maxima, oder umgekehrt erst Maxima, dann Minima auftreten. Ist die dnrch DE dringende Welle in Bezug auf B wie früher geteilt, und sind bei dieser Teilung $2n$ Zonen (in der Zeichnung 4) entstanden, so wird die zweite von der halben ersten und halben dritten, die vierte aber von dem Reste der dritten nur ungefähr zur Hälfte aufgehoben. Nun ist die Phasendifferenz der ersten und vierten Zone in B gleich $\frac{3}{2}\lambda$, die Bewegung in B also die Differenz der von der ersten und vierten Zone nach B gelangenden Bewegung; dieselbe ist also ein Minimum. Für P findet man dann nach beiden Seiten, dafs die Bewegung ein Maximum wird, bei P' wieder ein Minimum nnd so über G und H hinaus mit allmählicher Abnahme der Lichtstärke und der Unterschiede zwischen Minimis und Maximis.

Für weiter von A entfernte Punkte B' stellt sich die Sache anders. Je weiter B' rückt, um so weiter rücken auf DE die Punkte α, a; β, b; .. auseinander, für welche die Wegedifferenz $aB' - AB' = bB' - aB'$ gleich einer halben Wellenlänge wird. Es werden daher bei einer Teilung der Welle DE in der vorhin angewandten Weise für B' weniger Zonen ent-

stehen. Es seien für B' gerade $2n - 1$, in unserer Zeichnnng also drei Zonen. Dann würde die Wirkung der 2, 4, 6 durch die halbe Summe der ersten und dritten, dritten und fünften, fünften nnd siebenten vernichtet, also die halbe erste und halbe $(2n - 1)$ übrigbleiben. Die Phasendifferenz


Fig. 136.



beider ist in B' eine gerade Anzahl halber Wellenlängen, die resultierende Bewegung also die Summe der von beiden Zonen ausgehenden Bewegungen. In B' entsteht also ein Maximum der Bewegung, daneben dann ein Minimum, weiter ein Maximnm u. s. f.

In der Entfernung AB' haben daher gegen AB die Maxima und Minima ihre Stellen vertauscht; die Lage der Maxima und Minima hängt also wesentlich ab von der Entfernung AB des betrachteten Punktes von der Öffnung. Sie hängt aber noch in einer andern Weise davon ab, denn überdies werden anch die Entfernungen der Maxima und Minima von einander andere. Letzteres findet anch in den frühern beiden Fällen statt, und eine genauere mathematische Betrachtung, welche die Lage der einzelnen Maxima und Minima kennen lehrt, zeigt, dafs dieselben in verschiedenen Entfernungen von dem anfhaltenden Schirme auf Hyperbeln liegen müssen.

§ 72.

Fresnelsche Beugungserscheinungen. Wenden wir die vorigen Betrachtungen auf das Licht an, so fordert die Undulationstheorie, dafs an den Rändern des Schattens eines in einen Lichtkegel gestellten Schirmes Änderungen der Belenchtung sich zeigen müssen und zwar abwechselnde Maxima und Minima der Helligkeit, es müssen bei Anwendung homogenen Lichtes helle und dunkle Streifen parallel dem Rande des geometrischen Schattens auftreten. Denn unsere Dednktion, welche wir nur auf einen

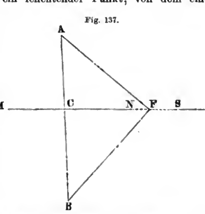
Horizontaldurchschnitt durch die Welle beschränkten, gilt ebenso für alle ähnlichen Durchschnitte, und die in dem betrachteten Falle auftretenden hellen und dunklen Stellen müssen sich zu hellen und dunklen Streifen zusammenfügen, welche der Begrenzung des schattengebenden Körpers parallel sind.

Diese Erscheinungen lassen sich leicht beobachten; zuerst wurden sie beobachtet von dem Pater Grimaldi[1]) zu Bologna; er fand, daſs, wenn ein schmaler undurchsichtiger Körper in den Lichtkegel gestellt wurde, welchen man durch eine sehr kleine Öffnung in ein finsteres Zimmer treten lieſs, sein Schatten bedeutend gröſser war als seine geometrische Projektion, so daſs das Licht eine Abweichung von seinem geradlinigen Laufe erlitt, wenn es am Rande des Körpers vorbeiging. Bei genauerer Untersuchung fand er, daſs der Schatten von drei regenbogenfarbigen Fransen eingefaſst war, welche dem Rande des Schattens parallel und von denen die dem Schatten zunächst liegenden am hellsten und breitesten waren.

Die ausführlichsten Untersuchungen verdanken wir dem französischen Physiker Fresnel[2]), der in einer musterhaften theoretischen Untersuchung die Lage der einzelnen Maxima und Minima der Lichtstärke für Licht verschiedener Wellenlänge berechnete und durch genaue Messungen die vollkommene Übereinstimmung der Theorie und Erfahrung nachwies.

Den Gang der theoretischen Untersuchung können wir nur in groſsen Zügen andeuten. Ist A Fig. 137 ein leuchtender Punkt, von dem eine Welle ausgeht, welche durch den Schirm MN zum Teil aufgehalten wird, so können wir die Welle im Momente, in welchem sie die Ebene des Schirmes MS passiert, als den Ausgangspunkt der Lichtbewegung betrachten, welche zu irgend einem Punkte B diesseits des Schirmes gelangt. Die von einem bei F liegenden Elemente do der Welle nach B gesandte Bewegung ist dann, wenn wir do so klein voraussetzen, daſs die Verbindungslinien seiner Punkte mit B alle gegen das Element gleich geneigt sind, der Gröſse des Elements proportional; wir erhalten deshalb für die Bewegung zur Zeit t bei B

Fig. 137.



$$y = k do \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AF + BF}{\lambda} \right),$$

worin k die Amplitude bedeutet, welche die Flächeneinheit der Welle in MS bei B erregen würde. Setzen wir nun

[1]) *Grimaldi*, Physico Mathesis de Lumine. Bologna 1665.

[2]) *Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. franç. Tome V. Poggend. Annal. Bd. XXX. Oeuvres complètes T. I.

$$AF = AC + \Delta, \quad BF = BC + \Delta',$$

so wird

$$y = kdo \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda} - \frac{\Delta + \Delta'}{\lambda}\right)$$

oder

$$y = kdo \cdot \cos 2\pi \frac{\Delta + \Delta'}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right)$$

$$- kdo \cdot \sin 2\pi \frac{\Delta + \Delta'}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right).$$

Um die Lichtbewegung im Punkte B, welche von der ganzen übrigbleibenden Welle erregt wird, zu erhalten, haben wir den entsprechenden Ausdruck für jedes Element der Öffnung zu bilden und dann alle diese Ausdrücke zu summieren. Wir können diese Summe schreiben:

$$Y = \left(\int kdo \cdot \cos 2\pi \frac{\Delta + \Delta'}{\lambda}\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right)$$

$$- \left(\int kdo \cdot \sin 2\pi \frac{\Delta + \Delta'}{\lambda}\right) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right).$$

Die Bewegung im Punkte B können wir hiernach auffassen als die Resultierende zweier im Punkte B zusammentreffender Wellen, deren Amplitude durch die in Klammern eingeschlossenen Faktoren auf der rechten Seite gegeben ist, und deren Phasendifferenz, da

$$- \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right) = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda} - \frac{1}{4}\right)$$

ist, eine Viertel Wellenlänge beträgt. Die resultierende Intensität ist aber, wie wir früher nachgewiesen haben, bei der Interferenz solcher Wellen gleich der Quadratsumme der Amplituden. Wir erhalten somit für dieselbe

$$J = \left(\int kdo \cdot \cos 2\pi \frac{\Delta + \Delta'}{\lambda}\right)^2 + \left(\int kdo \cdot \sin 2\pi \frac{\Delta + \Delta'}{\lambda}\right)^2.$$

Der Wert dieser Summen hängt für einen bestimmten Punkt B ab von der Ausdehnung und Gestalt des übrigbleibenden Wellenstückes, bei gegebener Welle von der Lage des Punktes B, denn mit der Lage desselben ändert sich sowohl Δ als Δ'.

Eine Darstellung dieser Summe in geschlossener Form ist nicht möglich. Fresnel berechnete deshalb für die hauptsächlichsten Fälle die numerischen Werte dieser Summe, und zeigte, dafs je nach der Lage des Punktes B der Wert von J zwischen Minimis und Maximis hin und herschwankt, somit dafs im allgemeinen helle und dunkle Streifen auftreten müssen. Indem er die Lage der dunklen Streifen berechnete und sie dann durch den Versuch bestimmte, konnte er die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachweisen.

Um die Erscheinungen zu erhalten, leitet man mittels des Heliostaten in ein dunkles Zimmer ein Bündel Sonnenstrahlen und stellt in dieses eine Linse kurzer Brennweite, um in dem kleinen im Brennpunkte der Linse

gebildeten Sonnenbildchen einen leuchtenden Pnnkt zu erhalten. In den von diesem ausgehenden Lichtkegel stellt man in einiger Entfernung, etwa zwei Meter, einen weifsen Schirm, auf dem dann eine runde beleuchtete Fläche entsteht. Bringt man nun zwischen den Lichtpunkt und den Schirm, etwa in die Mitte, einen undurchsichtigen Körper, der vielleicht die Hälfte der beleuchteten Fläche verdunkelt, so sieht man der Grenze des Schattens parallel, also wenn diese Grenze eine vertikale Linie ist, eine Anzahl vertikaler farbiger Streifen, deren Färbung derjenigen der Newtonschen Ringe analog ist. Wenn man durch ein vorgehaltenes möglichst homogenes Glas das Licht färbt, so werden die Streifen einfach hell und dunkel; der Abstand der hellen und dunklen Streifen ändert sich aber je nach der Farbe des vorgehaltenen Glases, er ist am gröfsten, wenn das Glas rot, am kleinsten, wenn es violett ist. Die Farben im weifsen Licht rühren also daher, dafs die Maxima und Minima der verschiedenen Farben an verschiedenen Stellen auftreten. Das dem Schatten am nächsten liegende Maximnm ist das des violetten Lichtes, das am weitesten entfernte das des roten; die Streifen sind daher an dem dem Schatten zugewandten Rande violett oder blau, an dem abgewandten rot gesäumt.

Innerhalb des Schattens nimmt man keine Streifen wahr, man erkennt jedoch, dafs er nicht lichtlos ist, sondern dafs auch in den Schatten Licht hineingebeugt ist, welches sehr rasch an Intensität abnimmt, wenn man sich von dem Rande des Schattens nach dem Innern entfernt.

Zur Messung der Lage der dunklen Streifen ist die bereits § 65 erwähnte Diffraktionsbank von Duboscq ganz vorzüglich geeignet. Anstatt der Fresnelschen Spiegel setzt man zwischen Lichtlinie und Lupe den Schirm, der einen Teil der Welle auffängt, oder einen dünnen Draht, oder Schirme mit verschiedenen Öffnungen, wie sie von Duboscq zu diesem Apparate geliefert werden. Man beobachtet dann die Lage der dunklen Streifen ganz in derselben Weise wie bei dem Fresnelschen Spiegelversuch.

Um eine genauere Einsicht in die Erscheinung zu geben, folgt hier eine Reihe von Fresnels Messungen der dunklen Streifen, bei Anwendung eines roten Lichtes, dessen Wellenlänge nach dem Versuche mit zwei geneigten Spiegeln gleich $0^{mm},000\,638$ war, zugleich mit den Werten, welche die Rechnung nach einer weitern Ausführung der im Vorigen angedeuteten Theorie ergab.

Abstand des schattenwerfenden Körpers vom leuchtenden Punkte	Abstand des schattenwerfenden Körpers vom Schirme	Ordnung des dunklen Streifens	Abstand des dunklen Streifens vom Rande des geometr. Schattens Berechnet	Abstand des dunklen Streifens vom Rande des geometr. Schattens Beobachtet	Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung
Meter	Meter		Millimeter	Millimeter	
		1	0,92	0,92	0,00
		2	1,35	1,34	— 0,01
	0,502	3	1,68	1,66	— 0,02
		4	1,93	1,93	0,00
		5	2,15	2,16	+ 0,01
		1	1,49	1,49	0,00
		2	2,18	2,18	0,00
1,011	0,996	3	2,70	2,69	— 0,01
		4	3,12	3,13	+ 0,01
		5	3,51	3,51	0,00
		1	2,59	2,59	0,00
		2	3,79	3,79	0,00
	2,010	3	4,68	4,69	+ 0,01
		4	5,45	5,45	0,00
		5	6,10	6,11	+ 0,01

Der erste dunkle Streifen entspricht dem Punkte P' Fig. 134. Man sieht, mit welcher Genauigkeit Rechnung und Beobachtung einander entsprechen.

Ebenso genaue Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zeigt sich bei den Fresnelschen Messungen der Beugungserscheinungen der zweiten Art. Wendet man anstatt des Schirmes in dem vorigen Versuche einen dünnen geraden Draht an, den man vertikal und der Schirmebene parallel hält, so sieht man auf dem Schirme aufser den Streifen am Rande des Schattens auch deren im Innern desselben. In der Mitte des Schattens erscheint immer ein scharfbegrenzter heller Streifen, an seinen beiden Seiten zwei dunkle, dann wieder helle; und es gelingt leicht, an jeder Seite des mittlern hellen Streifens mit homogenem Lichte noch zwei helle Streifen zu erhalten. Der schattenwerfende Körper mufs recht dünn genommen werden, wegen der grofsen Kleinheit der Lichtwellen.

Ein eigentümlicher Fall dieser Beugungserscheinungen ist der, dafs man als schattengehenden Körper einen kleinen kreisrunden Schirm anwendet. Die Helligkeit in der Mitte des Schattens mufs dann genau dieselbe sein, als wenn das Licht ganz ohne Schirm dorthin gelangt sei. Man übersieht das leicht mit Hülfe der Entwicklungen des vorigen Paragraphen. Wir sahen, dafs die an den Schirm grenzende letzte halbe Zone Licht in den Schatten sendet; bei einem kreisrunden Schirme, der aus der kugelförmigen Lichtwelle ein Stück herausschneidet, sendet nun in der That diese halbe Zone ihr Licht vollständig in den Schatten. Die Gröfse der Zonen bei der von uns angenommenen Teilung der Welle ist merklich gleich, also die Gröfse dieser halben gleich derjenigen der halben Centralzone,

welche ohne Schirm die Mitte des Schattens beleuchten würde. Ist der Schirm klein genug, so dafs die Neigung der Strahlen nicht zu grofs ist, dann mufs die Mitte des Schattens ebensoviel Licht erhalten, als wenn der Schirm nicht da wäre. Um den Versuch anzustellen, klebt man ein konisch zugedrehtes Metallscheibchen mit ein wenig Wachs auf eine von genau parallelen Wänden begrenzte ebene Platte ganz reinen streifenlosen Glases und stellt dasselbe anstatt des Drahtes in den erwähnten Lichtkegel.

Um die Beugungserscheinungen durch eine enge Öffnung zu erhalten, ersetzt man den Draht bei den vorigen Versuchen durch eine enge Spalte. Man kann sich dieselbe, um den Einflufs der Weite der Öffnung zugleich kennen zu lernen, leicht aus zwei Metallstreifen herstellen, die man auf einem Stativ verschiebbar so neben einander befestigt, dafs zwischen ihnen nur eine schmale Spalte bleibt. Um überhaupt nur die Erscheinungen wahrzunehmen, genügt es, auf eine Glasplatte ein Staniolblättchen zu kleben und in dieses mit einem Messer oder einer Nadel einen Spalt zu ritzen. Man sieht dann bei Anwendung homogenen Lichtes eine Anzahl heller und dunkler, bei Anwendung weifsen Lichtes dagegen eine Anzahl farbiger Streifen in dem Raume, welcher durch den Spalt Licht erhält, und an beiden Seiten in dem Schatten der Schirme. Bei einer vorsichtigen Änderung des Abstandes von Schirm und Spalte kann man sich von der Umkehr der Maxima und Minima überzeugen. So fand Fresnel bei einer Breite der Spaltöffnung von $1^{mm},5$ und einem Abstande derselben von der Lichtquelle von $2^{m},010$ die Mitte hell, wenn der Schirm $0^{m},492$ von der Spaltöffnung entfernt war und das erste Minimum in einem Abstande von $0^{mm},42$ von der Mitte. Dagegen war die Mitte dunkel, als der Schirm $0^{m},276$ von der Spaltöffnung entfernt war. Die Wellenlänge des zu diesen Versuchen angewandten Lichtes war wie bei den frühern $0^{mm},000\,638$.

Bei diesen Versuchen ist die Benutzung einer kleinen kreisförmigen Öffnung ebenso interessant als die eines kreisförmigen Schirmes in dem vorigen.

Ein Punkt B (Fig. 136), der so vor der Mitte der Öffnung liegt, dafs die in Bezug auf ihn vorgenommene Teilung der durch die kreisförmige Öffnung dringenden Welle in Zonen, deren Randstrahlen in B die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge haben, eine ungerade Anzahl von Zonen ergibt, erhält Licht von der halben Centralzone und der halben Randzone. Die Strahlen haben eine Phasendifferenz einer geraden Anzahl halber Wellenlängen; die resultierende Amplitude in B ist daher, wenn die Neigung der Randstrahlen nicht zu grofs ist, die doppelte, die Lichtstärke also die vierfache, als wenn das Licht durch eine unbegrenzte Öffnung zu B gedrungen wäre. Ein näherer oder entfernterer Punkt B' ist aber ganz dunkel, denn eine in Bezug auf ihn vorgenommene Teilung der Welle ergibt dann eine gerade Anzahl von Zonen, die von der halben centralen und halben Randzone nach B' gelangenden Strahlen haben eine Phasendifferenz von einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen, sie vernichten sich.

Bei Anwendung des mehrerwähnten roten Lichtes fand Fresnel in der That in den letztern Abständen den Mittelpunkt der kreisrunden Öffnung

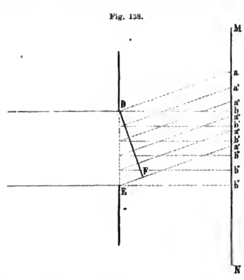
wie einen Tintenfleck aussehend, in erstern dagegen sehr hell. Bei Anwendung nicht homogenen Lichtes dagegen war die Mitte anstatt hell und dunkel nach und nach verschieden gefärbt, wie es auch der Fall sein mufs, da die Maxima und Minima der verschiedenen Farben in verschiedenen Entfernungen liegen.

§ 73.

Fraunhofers Beugungserscheiuungen. Eine andere Methode zur Beobachtung der Bengungserscheinungen wurde von Fraunhofer angewandt, welche scheinbar komplicierter ist, deren Resultate aber viel einfacher theoretisch bestimmt werden können als die der Fresnelschen Beugungserscheinungen, und welche überdies, da bei ihnen fast nur Winkelmessungen vorkommen, viel leichter genau messend verfolgt werden können. Fraunhofer[1]) untersuchte hauptsächlich die Beugungserscheinungen durch enge Öffnungen, indem er dieselben vor das Objektiv eines Fernrohrs befestigte, welches auf einen entfernten leuchtenden Punkt eingestellt war.

Der Unterschied dieser beiden Methoden wird leicht aus folgendem klar sein. Ist DE der Durchschnitt durch eine enge Öffnung, z. B. einen

Fig. 138.



schmalen Spalt, nnd kommt zu demselben eine Lichtwelle, die wir der Einfachheit wegen als eben voraussetzen wollen, so erhält man nach der Fresnelschen Methode auf einem der Öffnung gegenüber gestellten Schirme in jedem Punkte die Resultierende aller Lichtwellen, welche von allen Punkten der die Öffnung treffenden Lichtwelle nach dem betrachteten Punkte hin konvergieren. Gehen wir daher von dem vor der Mitte der Öffnung liegenden Punkte nach den beiden Seiten, so wird die Beleuchtung eines be-

[1]) *Fraunhofer,* Neue Modifikationen des Lichtes in den Denkschriften der Münchener Akademie. Bd. VIII.

stimmten Punktes nicht allein von seinem Abstande von der Mitte abhängen, sondern auch von der Entfernung des Schirmes von der Öffnung. Rückt der Schirm nun immer weiter von der Öffnung weg, so werden die an einer bestimmten Stelle des Schirmes sich schneidenden Strahlen immer weniger konvergent sein müssen, und ist schließlich der Schirm in unendliche Entfernung gerückt, so werden die an einer Stelle zusammentreffenden Strahlen alle parallel sein, da die konvergierenden Strahlen sich alle in endlicher Entfernung vor dem Schirme schneiden. In unendlicher Entfernung von der Öffnung würde daher die Beleuchtung einer Stelle des Schirmes die Resultierende der parallel nach dieser Richtung hin gebeugten Strahlen Da, Ea^V oder Db_1 Eb^V sein.

Was eine Entfernung des Schirmes ins Unendliche bewirken würde, das leistet bei der Fraunhoferschen Methode die Vorsetzung der Spaltöffnung vor das Objektiv eines Fernrohrs. Wie wir sahen, werden alle unter einander parallel auf eine Linse auftreffenden Strahlen gleicher Brechbarkeit hinter der Linse genau in einem Punkte vereinigt, welcher auf der mit der Richtung des einfallenden Lichtes parallelen Haupt- oder Nebenaxe der Linse liegt. Es werden daher in den einzelnen hinter der Linse liegenden Vereinigungspunkten nur die einander parallelen Strahlen zusammenwirken; es wird in der Brennweite des Objektivs ein reelles Beugungsbild entstehen, dessen auf der Hauptaxe liegender Punkt durch die der Hauptaxe, dessen auf den verschiedenen Nebenaxen liegenden Punkte durch das Zusammenwirken der den einzelnen Nebenaxen parallel gebeugten Strahlen erzeugt werden. Dieses im Fokus des Objektives erzeugte Beugungsbild ist daher auch unabhängig von dem Abstande der beugenden Öffnung von dem Objektiv des Fernrohrs, da der Ort, wo die von dem Objektiv aufgenommenen Strahlen vereinigt werden, nur von dem Winkel abhängt, den diese Strahlen mit der Axe des Objektives bilden, welches auch der Abstand der beugenden Öffnung sei. Auf einer bestimmten Nebenaxe des Objektivs tritt nur die resultierende Beleuchtung sämtlicher parallel dieser Axe gebeugten Strahlen auf.

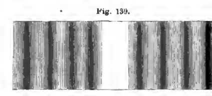
Um die Beugungserscheinungen nach der Fraunhoferschen Methode zu beobachten, stellt man das Fernrohr auf den von der konvexen Seite eines innen geschwärzten Uhrglases oder eines glänzenden metallischen Knopfes im Sonnenlicht erzeugten Lichtpunkt, wenn man die Beugungserscheinungen kleiner rechteckiger oder parallelogrammatischer Öffnungen beobachten will, oder auf die von einer innen geschwärzten Röhre im Sonnenlichte erzeugte Lichtlinie ein, wenn man die Beugungserscheinungen durch einen Spalt beobachten will. Die beugende Öffnung, die man in den meisten Fällen leicht aus Staniol herstellen kann, wird dann in einen passenden Holzring gefaßt, und so vor dem Objektiv des Fernrohrs befestigt. Will man messende Versuche machen, so wendet man das Fernrohr eines Theodolithen an, oder befestigt die Öffnung vor dem Objektiv des Kollimatorrohres eines Spektrometers, da wie erwähnt bei dieser Beobachtungsmethode nur Winkel zu messen sind.

Die nach dieser Methode beobachteten Beugungserscheinungen zeichnen sich durch besondere Schönheit und Regelmäßigkeit vor den Fresnelschen aus; je nach der Gestalt der Öffnung zeigen sie die mannigfachsten Gestalten. Eine vollständige Beschreibung und Entwicklung derselben ist hier

nicht möglich; wir verweisen deshalb auf das klassische Werk von Schwerd[1]), in welchem die durch eine grofse Zahl von Öffnungen bewirkten Beugungserscheinungen beschrieben und abgebildet und aus der Undulationstheorie entwickelt sind. Wir müssen uns hier darauf beschränken, einen einfachen Fall etwas vollständiger abzuleiten, die Erscheinungen durch einen engen Spalt.

Befestigt man vor dem Objektive des Fernrohrs einen engen Spalt, und färbt das Licht, ehe es den Spalt trifft, homogen, so erhält man als Beugungsbild eine Anzahl heller und dunkler Streifen (Fig. 139). Sind die einfallenden Lichtstrahlen senkrecht zur beugenden Ebene, und ist die Fernrohraxe denselben parallel, so sieht man zunächst in der Mitte ein breites helles Feld, welches nach beiden Seiten hin allmählich dunkler wird und in einem gewissen, an beiden Seiten ganz gleichen Abstande einem ganz dunklen Streifen Platz macht. Auf den dunklen Streifen folgen an beiden Seiten wieder helle Felder, welche jedoch nur halb so breit und viel weniger hell sind als das mittlere Feld. Auf die beiden Felder folgen wieder dunkle Streifen und auf diese wieder helle Felder, welche den vorigen an Breite gleich, an Helligkeit aber viel geringer sind. Dann folgen wieder dunkle Streifen, helle Felder u. s. f.

Fig. 139.



Die Breite der hellen Felder und ihre Abstände ändern sich mit der Wellenlänge des einfallenden Lichtes, und zwar sind die Breiten sowohl wie die Abstände der Felder von einander den Wellenlängen des angewandten Lichtes proportional. Für rotes Licht sind dieselben am gröfsten, für violettes Licht am kleinsten. Wendet man daher bei dem Versuche anstatt einfarbigen Lichtes weifses Licht an, so erscheinen anstatt der hellen und dunklen Streifen farbige Spektralstreifen, deren violettes Ende der Mitte zugekehrt ist, deren Farbenfolge denen der Newtonschen Ringe im reflektierten Lichte gleich ist.

Ändern wir die Breite der Spaltöffnung, so ändert sich ebenfalls die Breite des Beugungsbildes; die Felder werden breiter und ihre Abstände gröfser in demselben Verhältnisse, als die Spaltöffnung schmaler wird, zugleich aber wird die ganze Erscheinung lichtschwächer.

Um diese Erscheinungen aus der Undulationstheorie abzuleiten, haben wir die resultierende Intensität der nach einer und derselben Richtung gebeugten Strahlen abzuleiten. Es genügt dazu, wenn wir die Intensität berechnen, welche das Zusammenwirken aller Schwingungen in einer zur Richtung der gebeugten Strahlen senkrechten Ebene MN oder auch in der Ebene CG, welche wir durch den Rand des Spaltes gelegt denken, um welchen die Strahlen gebeugt sind, sich ergibt. Denn von da ab pflanzen sich die gebeugten Lichtstrahlen als ein paralleles Strahlenbündel mit konstanter Phasendifferenz fort. Und da alle Strahlen bei dem Durchgange durch das Objektiv dieselben Einflüsse erfahren, so interferieren sie mit der Phasendifferenz, welche sie in dieser Wellenebene besitzen. Wir erhalten

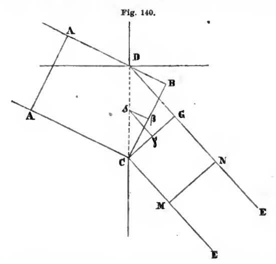
[1]) *Schwerd,* Die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.



daher die resultierende Intensität der nach der Richtung DE gebeugten Strahlen, wenn wir die Resultierende sämtlicher mit DE paralleler in die Ebene CG eintretenden Strahlen bestimmen, wenn sie alle zugleich denselben Punkt beleuchten würden.

Zur Berechnung dieser Resultierenden haben wir ganz ähnlich zu verfahren, wie zur Berechnung der Fresnelschen Beugungserscheinungen[1]). Ist AA eine gegen die Öffnung sich hinbewegende ebene Lichtwelle, deren Normale, also die einfallenden Strahlen, mit der zur Spaltöffnung senkrechten Richtung den Winkel α bildet, so können wir die Welle in dem

Fig. 140.



Momente, in welchem sie den Spalt passiert, als den Ausgangspunkt der Lichtbewegung betrachten, welche die gebeugte ebene Welle CG erzeugt. Wir denken uns bei s einen so schmalen Streifen des Spaltes, daſs in demselben alle Schwingungen gleicher Phase sind; ist h die Höhe des Spaltes und ist dx die Breite dieses Streifens, so ist die Gröſse des Streifens gleich $h\,.\,dx$. Bezeichnen wir mit k die Amplitude, welche die Flächeneinheit der Welle in CG erregen würde, wenn die Schwingungen dort alle gleicher Phase wären, und rechnen wir die Zeit t etwa von dem Momente ab, in welchem die einfallende Welle die Lage AA hat, so können wir die zur Zeit t in CG von dem bei s liegenden Streifen, also die bei γ erregte Bewegung durch die Gleichung darstellen:

$$y = k\,.\,h\,.\,dx\,.\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AC - s\beta + s\gamma}{\lambda}\right),$$

denn alle Punkte des betrachteten Streifens haben von der Ebene CB, die wir als Wellenebene des einfallenden Lichtes durch den Rand des Spaltes, um welchen das Licht gebeugt ist, legen, den Abstand $s\beta$ und von der gebeugten Wellenebene den Abstand $s\gamma$.

[1]) *Wüllner,* Poggend. Annal. Bd. CIX.

Die Summe aller von den einzelnen Streifen des Spaltes bedingten Werte y gibt uns dann die resultierende Bewegung. Um diese Snmme bilden zu können, bezeicbnen wir den Abstand des Streifens s vom Rande des Spaltes mit x. Dann erhalten wir, wenn wir mit α den Winkel der einfallenden Wellenebene mit der Ebene des Spaltes bezeichnen, also $DCB = \alpha$ setzen,

$$s\beta = Cs \,.\, \sin sC\beta = x \,.\, \sin \alpha.$$

Ist der Winkel, welcben die gebeugte Welle mit der Ebene des Spaltes bildet, $GCD = \alpha'$, so ist weiter

$$s\gamma = Cs \,.\, \sin \gamma Cs = x \,.\, \sin \alpha'.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für y, so wird

$$y = khdx \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda} - \frac{x(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda}\right)$$

oder

$$y = khdx \,.\, \cos 2\pi \frac{x(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right)$$

$$- khdx \cdot \sin 2\pi \frac{x(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right).$$

Die den einzelnen Streifen s entsprechenden Werte von y erhalten wir nun, indem wir für x in dieser Gleicbung nacb und nacb alle Werte einsetzen von $x = 0$ bis $x = b$, wenn wir mit b die Breite des Spaltes bezeichnen. Die Summe aller dieser Werte können wir demnach scbreiben

$$Y = \left(\int_0^b khdx \,.\, \cos 2\pi \frac{x(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda}\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right).$$

$$- \left(\int_0^b khdx \,.\, \sin 2\pi \frac{x(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda}\right) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right).$$

Die resultierende Bewegung in der gebeugten Welle CG können wir also auffassen als die Resnltierende zweier Wellen, deren Amplituden dnrch die in den Klammern eingeschlossenen Faktoren auf der recbten Seite der Gleichnng für Y gegeben sind, und deren Phasendifferenz, da

$$- \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right) = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right)$$

eine viertel Wellenlänge ist. In dem Falle ist aber nach dem Interferenzgesetz die resultierende Intensität gleich der Summe der Quadrate der Teilamplituden, wir erhalten somit für die Intensität J des nach der Richtung DG gebeugten Liebtes, wenn wir scbreiben

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right) - B \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right)$$

$$J = A^2 + B^2.$$

Setzen wir

$$2\pi \frac{\sin \alpha' - \sin \alpha}{\lambda} = m,$$

so haben wir demnach nur die beiden Summen

$$A = \int_0^b khdx \cos mx \qquad B = \int_0^b khdx \sin mx$$

zu bilden. Der unter dem ersten Summenzeichen stehende Ausdruck $dx \cos mx$ ist das Differential von $\frac{1}{m} \sin mx$, deshalb ist die erste Summe, da kh konstant ist,

$$A = kh \int_0^b dx \cos mx = \frac{ka}{m} \cdot \sin mb.$$

Der unter dem zweiten Summenzeichen stehende Ausdruck ist das Differential von $- kh \frac{1}{m} \cos mx$. Daraus folgt

$$B = kh \int_0^b dx \sin mx = -\frac{kh}{m}\{\cos m \,.\, b - \cos m \,.\, o\} = \frac{kh}{m}(1 - \cos mb).$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für J, so wird

$$J = \frac{k^2h^2}{m^2}(\sin^2 mb + [1 - \cos mb]^2)$$

$$J = \frac{k^2h^2 \,.\, b^2}{m^2b^2}(2 - 2\cos mb) = 4\frac{k^2h^2 \,.\, b^2}{m^2b^2} \cdot \sin^2 \frac{mb}{2}$$

oder schliefslich

$$J = k^2h^2b^2 \left(\frac{\sin \frac{mb}{2}}{\frac{mb}{2}}\right)^2 = k^2h^2b^2 \left(\frac{\sin \pi \frac{b\,(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda}}{\pi \frac{b\,(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda}}\right)^2.$$

Dieser für die Intensität des gebeugten Lichtes erhaltene Ausdruck zeigt, dafs die Intensität sich periodisch mit der Gröfse des Beugungswinkels ändert, indem der Wert des Zählers mit wachsendem α' zwischen 0 und 1 hin- und hergeht.

Zunächst wird der Zähler gleich Null, wenn $\alpha' = \alpha$, also für die ungebeugten Strahlen; in diesem Falle wird aber auch der Nenner gleich Null, und J erhält seinen gröfsten Wert

$$J = k^2h^2b^2.$$

Denn da der zweite Faktor für J im Zähler den Sinus des Bogens hat, welcher den Nenner bildet, so ist die Grenze, welcher sich dieser Faktor bei abnehmendem Bogen annähert, gleich 1, weil je kleiner der Bogen ist, der Sinus in seinem Werte sich dem Bogen immer mehr annähert.

Der Zähler des Ausdruckes für J wird ohne den Nenner gleich Null jedesmal wenn

$$\sin \pi \frac{b\,(\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda} = 0 = \sin n\pi$$

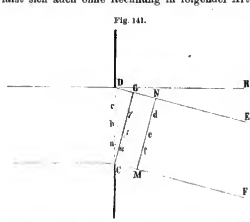
oder

$$b\,(\sin \alpha' - \sin \alpha) = \lambda,\ 2\,\lambda,\ 3\,\lambda \ldots\ldots n\lambda.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist gleich $DG - DB$ (Fig. 140), es ist also die Wegstrecke, welche die an dem Rande D der beugenden Öffnung vorüber gegangenen Schwingungen mehr zurückgelegt haben als die an dem Rande C, um welchen die Strahlen gebeugt sind, vorübergegangenen Schwingungen, es ist kurz die Wegedifferenz der Randstrahlen. Wir erhalten somit in dem gebeugten Lichte überall dort Dunkelheit, wo die Wegedifferenz der Randstrahlen irgend ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge ist.

Dafs an diesen Stellen die gebeugten Strahlen sich auslöschen müssen, läfst sich auch ohne Rechnung in folgender Art beweisen. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, die einfallende Welle sei der Spaltöffnung parallel, und sei dann CG oder MN Fig. 141 die gebeugte Welle. Wir teilen die einfallende Welle in eine Anzahl Streifen parallel der Längsausdehnung der Spaltöffnung, deren Durchschnitte durch die Ebene der Zeichnung Ca, ab, bc, cD sind, so dafs die Wegeunterschiede der von den Rändern dieser Streifen in die Wellenebene des gebeugten Lichtes gezogenen Strahlen CM, af, be, cd, DN jedesmal eine halbe Wellenlänge ist. Diese Streifen werden dann eine ganz gleiche Breite haben, jeder also dieselbe Anzahl von Lichtstrahlen in die gebeugte Wellenebene senden. Denn wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ist:

Fig. 141.



$$bC : aC = b\beta : a\alpha.$$

Nun ist aber nach unserer Teilung

$$b\beta = 2a\alpha,$$

demnach auch

$$bC = 2aC; \;\; ba = aC$$

und ebenso für alle übrigen Streifen.

Jeder Strahl des ersten Streifens hat daher in dem nächstfolgenden einen ihm entsprechenden, und zwar da der erste Strahl des zweiten gegen den ersten Strahl des ersten Streifens eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge hat, ist jeder Strahl des zweiten gegen den entsprechenden Strahl des ersten Streifens um eine halbe Wellenlänge verschoben. Bei dem Zusammenwirken werden sich daher diese beiden Streifen und ebenso der dritte und vierte u. s. f. aufheben, je zwei solcher Streifen werden daher immer zusammen Dunkelheit geben. Wenn also bei dieser Art der Teilung die Spaltöffnung in eine gerade Anzahl von Streifen geteilt wird, mufs die Wirkung aller durch die Öffnung dringenden Strahlen Dunkelheit geben.

Entsteht dagegen bei derselben eine ungerade Anzahl von Streifen, so wird schliefslich die Wirkung eines solchen Streifens nicht durch einen andern aufgehoben; die Resultierende dieses Streifens bleibt übrig und die resultierende Intensität aller nach dieser Richtung gebeugten Strahlen ist die resultierende Intensität dieses Streifens.

Die Anzahl Teile, in welche die Spaltöffnung auf diese Weise zerlegt werden kann, hängt ab von der Neigung der gebeugten Strahlen, der Länge der Wellen und der Breite der Öffnung, sie ist einfach gleich der Anzahl halber Wellenlängen, welche auf die Wegedifferenz der Randstrahlen kommt. Denn wir erhalten

$$DC : aC = DG : a\alpha.$$

Ist also $DG = n \,.\, a\alpha$, so ist auch $DC = n \,.\, aC$.

Für den Fall deshalb, dafs

$$DG = b \,.\, \sin \alpha' = 2n \,.\, a\alpha = 2n \frac{\lambda}{2}$$

löschen sich die Strahlen aus, wie wir es auch vorhin aus unserer Gleichung für die Intensität entwickelten.

Diese Betrachtungsweise läfst uns auch sofort erkennen, wann die Intensität des gebeugten Lichtes ein Maximum ist. Bleibt bei der vorgenommenen Teilung ein Rest, so tritt in dem Beugungsbilde wieder Licht auf; die Intensität dieses Lichtes mufs um so gröfser sein, je gröfser dieser Rest ist. Wächst von einem solchen Werte α', bei dem gerade

$$b \,.\, \sin \alpha' = 2n \frac{\lambda}{2},$$

die Neigung des gebeugten Lichtes, so wächst der Rest so lange, bis

$$b \,.\, \sin \alpha' = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

wird, in welchem Falle ein ganzer Streifen übrig bleibt. Sowie α' über diesen Wert wächst, wird der Rest kleiner, da dann sofort ein Teil des nächstfolgenden Streifens auftritt, der den entsprechenden Teil des übriggebliebenen Streifens auslöscht.

Dafs in diesem Falle das Maximum der Intensität des gebeugten Lichtes auftreten mufs, zeigt auch unsere Gleichung für die Intensität des gebeugten Lichtes

$$J = k^2 h^2 b^2 \left(\frac{\sin \pi \dfrac{b (\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda}}{\pi \dfrac{b (\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda}} \right)^2.$$

Denn wenn die Differenz der Randstrahlen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, also

$$b \,.\, (\sin \alpha' - \sin \alpha) = (2n + 1) \frac{\lambda}{2},$$

wird

$$\sin \pi \frac{b (\sin \alpha' - \sin \alpha)}{\lambda} = \sin (2n + 1) \frac{\pi}{2} = \pm 1,$$

somit erhält der Zähler seinen gröfsten Wert, und da der Nenner gleichmäfsig wächst, wird damit die Intensität ein Maximum.

Dafs dieser für die Intensität des gebeugten Lichtes aus der Undulationstheorie abgeleitete Ausdruck das Beugungsbild in der vorher beschriebenen Weise wiedergibt, läfst sich leicht übersehen. Wir setzen bei der Beschreibung voraus, dafs das Licht parallel zur Normale des Spaltes eintrat, also $\alpha = 0$ ist. Dann wird

$$J = k^2 h^2 b^2 \left(\frac{\sin \pi \frac{b \cdot \sin \alpha'}{\lambda}}{\pi \frac{b \cdot \sin \alpha'}{\lambda}} \right)^2$$

und es ergibt sich, dafs rechts und links von den ungebeugten Strahlen das erste Minimum auftritt, wenn

$$b \cdot \sin \alpha' = \lambda$$

$$\sin \alpha' = \frac{\lambda}{b},$$

das zweite Minimum dagegen, wenn

$$\sin \alpha' = 2 \frac{\lambda}{b}.$$

Da b gegen λ immer sehr grofs ist, können wir die Bögen dem Sinus proportional setzen, es folgt dann, dafs der Abstand der ersten Minima von der Mitte gleich ist dem Abstande der folgenden Minima, oder die beiden ersten Minima rechts und links sind von einander doppelt so weit entfernt als die folgenden, das helle Feld der Mitte ist doppelt so breit als die hellen Felder der Seiten. Die Intensität in der Mitte ist

$$J = k^2 h^2 b^2,$$

die Intensität der Mitte der Seitenfelder ist, da dort

$$\frac{b \cdot \sin \alpha'}{\lambda} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \cdots$$

$$J_1 = \frac{k^2 h^2 b^2}{9 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \qquad J_2 = \frac{k^2 h^2 b^2}{25 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \cdots$$

Die Intensität der Seitenfelder ist somit viel kleiner, sie nimmt rasch ab, und zwar ist sie dem Quadrate der ungeraden Zahlen umgekehrt proportional.

Ferner sieht man direkt, dafs der Abstand der seitlichen Maxima und Minima von der hellen Mitte der Wellenlänge des angewandten Lichtes direkt, der Breite der Öffnung dagegen umgekehrt proportional ist. Bei Anwendung weifsen Lichtes müssen daher statt der hellen und dunklen farbige Streifen auftreten, und bei Verbreiterung des Spaltes mufs das ganze Beugungsbild schmaler werden.

Das Beugungsbild ist in Bezug auf die Richtung der ungebeugten Strahlen nur symmetrisch, wenn die Richtung der einfallenden und ungebeugten Strahlen mit der Normale der Spaltöffnung zusammenfällt. Ist das nicht der Fall, so liegen die Minima an der Seite der Normale, an welcher das ungebeugte Licht sich befindet, weiter auseinander als an der andern Seite. Unsere Gleichung für J ergibt das unmittelbar. Denn setzen

wir den Winkel α positiv, so ist α' positiv zu setzen, wenn die gebeugten Strahlen an derselben Seite der Normalen liegen wie die ungebeugten, dagegen negativ, wenn sie an der andern Seite der Normalen liegen. Für die erstere Seite ist daher die Lage der Minima durch die obige Gleichung gegeben, welche für die letztere, wenn wir mit α_1 die Gröfse des negativen Winkels bezeichnen, übergeht in

$$- b\,(\sin \alpha_1 + \sin \alpha) = 2n\,\frac{\lambda}{2};$$

während also auf der einen Seite die Differenz der Sinus die Lage der Maxima und Minima bestimmt, geschieht das auf der andern Seite durch die Summe der beiden Sinus.

Hat die Öffnung eine andere Form, so wird auch das Beugungsbild ein anderes, und eine der oben für einen Spalt durchgeführten ganz analoge mathematische Entwicklung gibt einen andern Ausdruck für J, der dasselbe auf das vollständigste darstellt. Wendet man eine kleine quadratische Öffnung an, so erscheint ein helles Kreuz, dessen Arme senkrecht sind auf den vier Seiten des Quadrates, und welche im homogenen Lichte aus hellen und dunklen, im weifsen Lichte aus farbigen, den Quadratseiten parallelen Streifen bestehen. In den von den Armen gebildeten Winkeln zeigen sich helle Felder. Durch eine dreieckige Öffnung betrachtet erscheint ein Lichtpunkt als sechsstrahliger Stern, in dessen Winkeln eine Anzahl heller Felder sich finden; durch einen kleinen Kreis angesehen erscheint derselbe Punkt als leuchtender Kreis von einer Anzahl heller und dunkler Ringe umgeben. Alle diese Formen lassen sich durch einen Ausdruck für J aus der Undulationstheorie ableiten, wenn auch die Form der Gleichung zum Teil ziemlich verwickelt wird.

§ 74.

Beugungserscheinungen durch mehrere Öffnungen. Wenn man vor das Objektiv des Fernrohrs bei der Fraunhoferschen Methode der Beobachtung einen Schirm bringt, in welchem anstatt einer Öffnung mehrere sich befinden, so ist der Charakter des Beugungsbildes nicht geändert; dasselbe unterscheidet sich jedoch von dem durch eine einfache Öffnung erzeugten Bilde dadurch, dafs aufser den dunklen Feldern bei einfacher Öffnung noch neue hinzutreten, an Stellen, welche vorher hell waren, und dadurch, dafs die Intensität an den hellen Stellen jetzt eine viel gröfsere ist. Dafs beides der Fall sein mufs, läfst sich nach denselben Principien ableiten, aus welchen wir die Beugungserscheinungen einer Öffnung herleiteten. Nehmen wir an, dafs vor dem Objektiv ein Schirm mit zwei parallelen Spalten angebracht sei, und dafs Licht von der Wellenlänge λ parallel der Axe des Fernrohrs, also senkrecht zur Ebene des Schirmes, durch die Spaltöffnungen eindringe.

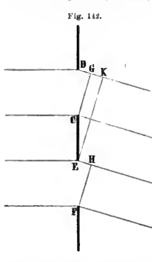
Zunächst ist klar, dafs an den Stellen des Beugungsbildes, wo die Strahlen, welche durch jede einzelne Öffnung hindurchdringen, sich vernichten, ebenso Dunkelheit sein mufs, als wenn vor dem Objektiv nur eine beugende Öffnung wäre. Die Minima, welche bei einer Öffnung auftreten, bleiben also auch bei zweien oder mehreren Öffnungen ganz ungeändert.

Sind demnach CD und EF zwei gleich breite Öffnungen (Fig. 142), so werden auch jetzt dort Minima auftreten, wo DG oder EH irgend eine Anzahl ganzer, oder eine gerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, wo also, mit Beibehaltung unserer vorigen Bezeichnung

$$\frac{b \cdot \sin \alpha'}{\lambda} = 1, 2, 3, 4 \ldots .$$

An den Stellen aber, wo durch das Zusammenwirken der Strahlen einer Öffnung Helligkeit ist, kann durch das Zusammenwirken der Strahlen beider Öffnungen Dunkelheit eintreten. Es wird das dort der Fall sein, wo die Resultierenden beider Öffnungen eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge haben. Dies wird überall dort eintreten, wo die Phasendifferenz der an entsprechenden Stellen durch jede der Öffnungen tretenden Strahlen eine halbe Wellenlänge beträgt, wo also die Differenz der von D und von E, der von der Mitte der Öffnungen und der von C und F ausgehenden Strahlen gleich $\frac{1}{2}\lambda$ oder ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Denn die Resultierende der durch jede der Öffnungen dringenden Strahlen mag sein welche sie will, da die Öffnungen gleiche Breite haben, wird jeder durch die Öffnung CD dringende Strahl durch den entsprechenden aus EF hervorgehenden Strahl vernichtet.

Fig. 142.



Da die Öffnungen ganz gleich sind, ist die Phasendifferenz aller entsprechenden Strahlen gleich einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge, wenn die Differenz der von den gleichliegenden Rändern D und E ausgehenden Strahlen oder DK ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Bezeichnen wir den Abstand DE mit a, den Beugungswinkel DEK jetzt mit α, so ist

$$DK = a \cdot \sin \alpha$$

und somit treten die neuen Minima auf, wo α solche Werte hat, dafs

$$a \cdot \sin \alpha = \tfrac{1}{2}\lambda,\ \tfrac{3}{2}\lambda,\ \tfrac{5}{2}\lambda \ldots \frac{2n-1}{2}\lambda$$

oder wo

$$\frac{2a \cdot \sin \alpha}{\lambda} = 1, 3, 5 \ldots 2n - 1$$

ist.

An den Stellen der frühern Maxima der Lichtstärke aber, wo zugleich die Phasendifferenz der durch die einzelnen Öffnungen dringenden Randstrahlen ein ungerades, die Differenz der von D und E ausgehenden Strahlen, oder DK ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, wirken jetzt zwei Streifen, einer aus jeder Öffnung, wo vorhin nur ein Streifen wirkte; die resultierende Amplitude mufs also die doppelte, die resultierende

Lichtintensität die vierfache sein. Nehmen wir z. B. an, dafs der Abstand a der gleichliegenden Ränder gleich $2b$, also der Abstand der einander nächsten Ränder der Spalten gleich ist der Breite der Öffnung gleich b, so ist in der Mitte des Beugungsbildes die Helligkeit viermal so grofs als bei einer Spalte. Die ersten Minima sind dann dort, wo

$$\frac{2a \sin\alpha}{\lambda} = \frac{4b \sin\alpha}{\lambda} = 1,$$

also

$$b \, . \, \sin\alpha = \tfrac{1}{4}\lambda.$$

Dann folgt ein Maximum, wo $b \, . \, \sin\alpha = \frac{1}{2}\lambda$ ist, denn dort ist $DK = 2b \, . \, \sin\alpha = \lambda$, also die Phasendifferenz der durch beide Öffnungen dringenden Strahlen eine ganze Wellenlänge; die Intensität an dieser Stelle ist die vierfache jener, welche für den gleichen Wert von α bei einfacher Öffnung sich findet.

Ein ähnliches Maximum zeigt sich dort, wo $b \, . \, \sin\alpha = \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda$ u. s. f. ist, kurz an den Stellen der Maxima bei einfacher Öffnung, da dort immer zugleich DK gleich einer geraden Anzahl halber Wellenlängen ist; die Intensität an diesen Stellen ist die vierfache derjenigen bei einer Öffnung. Wir nennen nach Fraunhofer[1]) diese Maxima solche zweiter Klasse, um sie von den viel breitern Maximis erster Klasse bei einer Öffnung zu unterscheiden.

Zwischen den neuen Minimis, die wir, zum Unterschiede der schon durch eine Öffnung entstehenden, Minima zweiter Klasse nennen wollen, treten nun auch neue Maxima dritter Klasse auf und zwar immer in der Mitte zwischen einem Maximum erster und einem zweiter Klasse.

Wir können in derselben Weise fortschreitend die Lage der Maxima und Minima für eine gröfsere Zahl von Öffnungen erhalten, kommen aber rascher zum Ziel, wenn wir in ähnlicher Weise, wie wir es für eine Öffnung gethan haben, die Intensität des gebeugten Lichtes für beliebig viele Öffnungen berechnen. Wir setzen voraus, dafs wir p Spalten haben, alle von der Höhe h und der Breite b, die Spalten sind alle parallel und ihre untern Grenzen sowie die obern liegen auf je einer geraden Linie, wie wir es eben auch für die zwei Spalten annahmen. Der Abstand der gleichliegenden Ränder der Spalten sei gleich a.

Durch genau dieselben Entwicklungen wie im vorigen Paragraphen erhalten wir auch jetzt die resultierende Bewegung in der gebeugten Wellenebene als die Summe aller in den einzelnen Streifen γ Fig. 141 erregten Bewegungen. Wir haben aber hier nicht nur die Summe aller Streifen γ, die der ersten Öffnung, also den Werten von $x = 0$ bis $x = b$ entsprechen, zu bilden, sondern zu dieser Summe noch jene der Streifen γ für die übrigen Öffnungen, für die zweite also von $x = a$ bis $x = a + b$, für die dritte von $x = 2a$ bis $x = 2a + b$ u. s. f. bis zur $p$ten von $x = (p-1)a$ bis $x = (p-1)a + b$ hinzuzufügen. Wir haben also nur in der Gleichung für die resultierende Bewegung des § 73

$$Y = A \, . \, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right) - B \, . \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda}\right)$$

[1]) *Fraunhofer*, Neue Modifikation des Lichtes. Denkschriften der Münchener Akademie. Bd. VIII.

für A und B folgende Summen einzusetzen

$$A = \int\limits_0^b khdx \cos mx + \int\limits_a^{a+b} khdx \cos mx + \cdots \int\limits_{(p-1)a}^{(p-1)a+b} khdx \cos mx$$

$$B = \int\limits_0^b khdx \sin mx + \int\limits_a^{a+b} khdx \sin mx + \cdots \int\limits_{(p-1)a}^{(p-1)a+b} khdx \sin mx.$$

Dann ist auch jetzt die Intensität des gebeugten Lichtes

$$J_p = A^2 + B^2.$$

Führen wir die Integrationen wie im vorigen Paragraphen aus, so wird

$$A = \frac{kh}{m} \sin mb + \frac{kh}{m} \sin m(a+b) - \frac{kh}{m} \sin ma + \cdots$$
$$\cdots \frac{kh}{m} \sin m\{(p-1)a + b\} - \frac{kh}{m} \sin m(p-1)a$$

$$B = \frac{kh}{m}(1 - \cos mb) + \frac{kh}{m} \cos ma - \frac{kh}{m} \cos m(a+b) + \cdots$$
$$\cdots \frac{kh}{m} \cos m(p-1)a - \frac{kh}{m} m\{(p-1)a + b\}.$$

Die Werte von A und B lassen sich leicht auf folgende Form bringen

$$A = \frac{kh}{m} \sin mb\{1 + \cos ma + \cos 2ma + \cdots \cos(p-1)ma\}$$
$$- \frac{kh}{m}(1 - \cos mb)\{\sin ma + \sin 2ma + \cdots \sin(p-1)ma\},$$

$$B = \frac{kh}{m}(1 - \cos mb)\{1 + \cos ma + \cos 2ma + \cdots \cos(p-1)ma\}$$
$$+ \frac{kh}{m} \sin mb\{\sin ma + \sin 2ma + \cdots\cdots\cdots \sin(p-1)ma\}.$$

Setzen wir

$$\frac{kh}{m} \sin mb = A_1 \qquad \frac{kh}{m}(1 - \cos mb) = B_1,$$

da die Summe $A_1^2 + B_1^2$ uns die Intensität des durch eine Öffnung gebeugten Lichtes gibt, und bezeichnen die Cosinusreihe mit R_1, die Sinusreihe mit R_2, so wird

$$A = A_1 R_1 - B_1 R_2$$
$$B = A_1 R_2 + B_1 R_1$$
$$A^2 + B^2 = (A_1^2 + B_1^2)(R_1^2 + R_2^2).$$

Bezeichnen wir die Intensität des durch eine Öffnung gebeugten Lichtes mit J_1, so wird hiernach die Intensität des durch p Öffnungen gebeugten Lichtes

$$J_p = J_1 (R_1^2 + R_2^2).$$

Es erübrigt demnach nur noch die Summen der Reihen R_1 und R_2 zu ermitteln. Um R_1 zu summieren, multiplicieren wir die Reihe mit $2 \cos ma$ und erhalten dann:

$$2\cos ma\, R_1 = 2\cos ma + 2\cos ma \cos ma + 2\cos ma \cos 2ma + \cdots\cdot 2\cos ma \cos (p-1)\, ma.$$

Das zweite Glied dieser Reihe ist

$$2\cos^2 ma = 1 + \cos 2ma,$$

das dritte, wie man leicht durch Umformung findet,

$$2\cos ma \cos 2ma = \cos 3ma + \cos ma,$$

und das $p$te

$$2\cos ma \cos (p-1)\, ma = \cos pma + \cos (p-2)\, ma.$$

Durch diese Umformung können wir schreiben

$$\begin{aligned} 2\cos ma\, R_1 &= 1 + \cos ma + \cos 2ma + \cdots\cdot \cos (p-2)\, ma \\ &\quad + 2\cos ma + \cos 2ma + \cdots\cdots\cdots \cos pma \end{aligned}$$

$$2\cos ma\, R_1 = R_1 - \cos (p-1)\, ma + R_1 - 1 + \cos ma + \cos pma$$

$$2 R_1 (1 - \cos ma) = 1 - \cos ma + \cos pma - \cos (p-1)\, ma$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1 - \cos ma + \cos pma - \cos (p-1)\, ma}{2\,(1 - \cos ma)} \\ &= \frac{(1 - \cos ma)\,(1 + \cos [p-1]\, ma) + \sin ma \sin (p-1)\, ma}{4\sin^2 \frac{ma}{2}} \\ &= \frac{2\sin \frac{ma}{2} \cos^2 \frac{p-1}{2}\, ma + 2\cos \frac{ma}{2} \sin \frac{p-1}{2}\, ma \cos \frac{p-1}{2}\, ma}{2\sin \frac{ma}{2}} \end{aligned}$$

und schliefslich

$$R_1 = \frac{\sin p \frac{ma}{2} \cos \frac{p-1}{2}\, ma}{\sin \frac{ma}{2}}.$$

Behandeln wir die Reihe R_2 ganz in derselben Weise, so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} 2\cos ma\, R_2 &= \sin ma + \sin 2ma + \cdots\cdot \sin (p-2)\, ma \\ &\quad + \sin 2ma + \sin 3ma + \cdots \sin pma \end{aligned}$$

also

$$R_2 = \frac{\sin pma - \sin ma - \sin (p-1)\, ma}{2\,(1 - \cos ma)}$$

ein Ausdruck, der durch ganz ähnliche Umformungen wie vorhin sich auf die Form

$$R_2 = \frac{\sin p \frac{ma}{2} \sin \frac{p-1}{2}\, ma}{\sin \frac{ma}{2}}$$

bringen läfst.

Damit wird

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{\sin^2 p \frac{m a}{2}}{\sin^2 \frac{m a}{2}}$$

und J_p

$$J_p = J_1 \frac{\sin^2 p \frac{m a}{2}}{\sin^2 \frac{m a}{2}} = p^2 J_1 \left(\frac{\sin p \frac{m a}{2}}{p \sin \frac{m a}{2}} \right)^2$$

oder die Intensität des durch p Öffnungen gebeugten Lichtes ist gleich der p^2fachen Intensität des durch eine Öffnung gebeugten Lichtes multipliciert mit dem Quadrate eines Quotienten, der im Zähler den Sinus des $p$fachen Bogens $\frac{m a}{2}$, im Nenner dagegen den $p$fachen Sinus des Bogens $\frac{m a}{2}$ hat. Der Quotient ist also nur abhängig von der Zahl der Öffnungen und dem Abstande a der homologen Seiten der Öffnungen, nicht von der Breite der Öffnung.

Setzen wir für J_1 und m seinen Wert ein, so wird unter Voraussetzung, dafs das Licht normal zur Ebene der Öffnungen einfällt,

$$J_p = p^2 k^2 h^2 b^2 \left(\frac{\sin \frac{b \sin \alpha}{\lambda} \pi}{b \frac{\sin \alpha}{\lambda} \pi} \right)^2 \left(\frac{\sin p \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \pi}{p \sin \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \pi} \right)^2$$

wenn wir jetzt den Beugungswinkel mit α bezeichnen.

Die Lage der Maxima und Minima läfst sich aus der Betrachtung des Faktors der infolge der Vermehrung der Öffnungszahl in den Intensitätsausdruck eingetreten ist, auch ohne weitere Rechnung ableiten. Der gröfste Wert, den dieser Faktor annehmen kann, ist eins, und denselben nimmt er an, wenn gleichzeitig der Zähler und der Nenner den Wert null erhalten. Denn einmal ist

$$\sin (n\pi \pm \varphi) = \pm \sin \varphi,$$

wird aber φ unmefsbar klein, so ist stets

$$\sin p \,.\, \varphi = p \,.\, \sin \varphi$$

und das um so genauer, je näher φ der Null rückt.

Zähler und Nenner werden gleichzeitig null, wenn

$$\sin \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \pi = 0 \qquad \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \pi = n\pi$$

$$a \sin \alpha = n\lambda,$$

worin n irgend eine Zahl der natürlichen Zahlenreihe ist.

An diesen Stellen ist die Intensität die p^2fache des durch eine Öffnung gebeugten Lichtes. Diese Maxima sind jene, welche Fraunhofer solche zweiter Klasse nannte. Ihre Lage hängt nicht ab von der Zahl der Öffnungen, sondern von dem Abstande der homologen Seiten der Öffnung.

Dieser Satz ergibt sich auch unmittelbar aus der einfachen Überlegung, dafs diese Maxima jene sind, wo die entsprechenden Strahlen in den ver-

schiedenen Öffnungen gleicher Phase sind. Da wir nun ausdrücklich die Abstände der homologen Seiten aller Öffnungen als gleich vorausgesetzt haben, so folgt, daſs wenn zwei entsprechende Strahlen der ersten und zweiten Öffnung gleicher Phase sind, es auch die entsprechenden aller übrigen Öffnungen sein müssen.

Da in diesen Maximis die Intensität die p^2fache des durch eine Öffnung gebeugten Lichtes ist, so folgt, daſs von denselben jene ausfallen müssen, welche an Stellen liegen, an denen das durch eine Öffnung gebeugte Licht ein Minimum hat, also ausgelöscht wird. Wir sahen im vorigen Paragraphen, daſs das dort der Fall ist, wo

$$b \sin \alpha = n\lambda;$$

wenn also

$$a = mb,$$

so fällt jedes Maximum $a \sin \alpha = n\lambda$ aus, wo $\frac{n}{m}$ eine ganze Zahl ist, da dann

$$\frac{a}{m} \sin \alpha = b \sin \alpha = \frac{n}{m} \lambda$$

ein Vielfaches von λ ist. Ist etwa $a = 2b$, so fällt das 2, 4, 6 ..., ist $a = 3b$, das 3, 6, 9 ... Maximum aus.

Stehen a und b in keinem einfachen rationalen Verhältnisse, so fällt kein der Mitte nahe liegendes Maximum aus, aber diejenigen, für welche $\frac{n}{m}$ einer ganzen Zahl nahe kommt, die also dem Minimum für eine Öffnung nahe liegen, haben eine sehr geringe Intensität. Ist z. B. $a = 1{,}77\,b$, so würden das 9. und 10. Maximum sehr wenig lichtstark sein, da sie den 5. Minimum der einzelnen Öffnung sehr nahe liegen.

Die durch die Anwendung mehrerer Öffnungen bedingten Minima liegen dort, wo der Zähler des letzten Faktors unseres Intensitätsausdrucks

$$\sin p \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \pi = 0$$

ohne daſs der Nenner gleich null ist. Das ist der Fall, wo

$$pa \frac{\sin \alpha}{\lambda} \pi = n\pi$$

$$a \sin \alpha = n \frac{\lambda}{p}$$

also dort, wo

$$a \sin \alpha = \frac{\lambda}{p},\ 2\frac{\lambda}{p},\ 3\frac{\lambda}{p} \cdots$$

Man erkennt leicht, daſs überall dort das durch die Hälfte der Öffnungen gebeugte Licht durch dasjenige, welches durch die andere Hälfte hindurchtritt, ausgelöscht wird, oder daſs das erste Viertel von dem zweiten Viertel, das dritte von dem vierten etc. ausgelöscht wird. Von diesen Minimis fallen indes jene aus, wo $\frac{n}{p}$ eine ganze Zahl ist, denn an diesen Stellen liegen die Maxima zweiter Klasse.

Von je einem Minimum aus wächst mit wachsendem α die Intensität bis zu einem Maximum und nimmt dann wieder bis zu dem nächstfolgenden

Minimum ab. Diese Maxima, welche wir vorhin schon als solche dritter Klasse bezeichneten, liegen dort, wo der Zähler des letzten Faktors des Intensitätsausdruckes seinen gröfsten Wert, nämlich den Wert eins erhält. Die Lage ist also durch

$$\sin p \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \pi = \pm 1$$

$$p \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \pi = (2n + 1) \frac{\pi}{2}; \quad a \sin \alpha = (2n + 1) \frac{\lambda}{2p}$$

gegeben.

Wir stellen hiernach in folgendem die Lage der einzelnen Minima und Maxima sowie die Intensitäten der letztern für 2 und für 4 Öffnungen zusammen, unter Voraussetzung $a = 1{,}5b$; die Intensität des durch eine Öffnung gehenden ungebeugten Lichtes ist dabei gleich 1 gesetzt. Es ist

für $a \sin \alpha =$	0			$\frac{\lambda}{2}$				λ	....	
$J_2 =$	4			0				0,684	....	
für $a \sin \alpha =$	0	$\frac{\lambda}{4}$	$3\frac{\lambda}{8}$	$2\frac{\lambda}{4}$	$5\frac{\lambda}{8}$	$3\frac{\lambda}{4}$	$7\frac{\lambda}{8}$	λ	$9\frac{\lambda}{8}$	$5\frac{\lambda}{4}$ ..
$J_4 =$	16	0	0,950	0	0,638	0	1,195	2,736	0,615	0 ..

Man sieht somit, dafs unserer vorigen Betrachtung des durch zwei Öffnungen gebeugten Lichtes entsprechend das erste Minimum bei zwei Öffnungen auftritt, wo die durch die erste Öffnung dringenden Strahlen mit den durch die zweite hinzutretenden die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge hat, das zweite, wo die Phasendifferenz dieser Wellen $\frac{3}{2}$ Wellenlängen beträgt und so fort. Bei 4 Öffnungen liegt das erste Minimum dort, wo die durch die erste und dritte Öffnung dringenden Strahlen die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge, die durch die erste und zweite somit nur die Phasendifferenz von einer viertel Wellenlänge haben, das zweite, dort, wo die Phasendifferenz der ersten und zweiten Öffnung eine halbe Wellenlänge ist. Das zweite bei 4 Öffnungen entspricht somit genau dem ersten bei zwei Öffnungen; es ist ja auch jenes, wo sich das durch die erste und zweite, und ebenso das durch die dritte und vierte Öffnung dringende Licht auslöschen.

Die Maxima dritter Klasse entstehen, wie man in der Zusammenstellung erkennt, zwischen den schon bei zwei Öffnungen vorhandenen Minimis und den neu hinzutretenden. Bei zwei Öffnungen nimmt die Lichtstärke stetig ab von $a \sin \alpha = 0$ bis $a \sin \alpha = \frac{\lambda}{2}$, bei 4 Öffnungen bildet sich in der Mitte dieses Feldes bei $a \sin \alpha = \frac{\lambda}{4}$ ein neues Minimum, zwischen diesem und dem folgenden schon bei zwei Öffnungen vorhandenen Minimum liegt deshalb das neue Maximum dritter Klasse. Bei 8 Öffnungen tritt das erste Minimum auf bei $a \sin \alpha = \frac{\lambda}{8}$, da dort die 4 ersten und die 4 zweiten Öffnungen sich auslöschen, das erste Maximum dritter Klasse bei $a \sin \alpha = 3\frac{\lambda}{16}$; das dritte Minimum bei $3\frac{\lambda}{8}$, dort also, wo bei zwei Öffnungen das erste

Maximum dritter Klasse liegt; zwischen diesem und $\frac{\lambda}{4}$ sowohl als $\frac{\lambda}{2}$ bildet sich je ein neues Maximum dritter Klasse und so fort.

Die Maxima zweiter Klasse liegen, wie schon vorher hervorgehoben wurde, bei gleichem Werte von a stets an derselben Stelle, dort wo $a \sin \alpha$ irgend ein Vielfaches von λ ist; an diesen Stellen sind aber alle durch die verschiedenen Öffnungen dringenden Strahlen gleicher Phase, und deshalb ist an diesen Stellen die Intensität stets die p^2fache von der des durch eine der Öffnungen gebeugten Lichtes. Der Abstand der zu beiden Seiten eines Maximums zweiter Klasse liegenden Minima von dem Maximum ist gleich dem Abstande zweier Minima, welche ein Maximum dritter Klasse einschliefsen, es folgt somit, dafs das einem Maximum zweiter Klasse angehörige helle Feld doppelt so breit ist, als das zu einem Maximum dritter Klasse gehörige.

§ 75.

Beugungsspektra. Wird die Zahl der parallelen Spalten eine sehr grofse und dem entsprechend der einzelne Spalt sehr schmal, so wird das Beugungsbild scheinbar ein ganz anderes als bei einer geringern Zahl von Spalten; man erhält dann bei Anwendung homogenen Lichtes nur eine Anzahl heller den Spaltöffnungen paralleler Linien, welche durch breite fast dunkle Zwischenräume von einander getrennt sind. Wendet man als Lichtquelle eine Linie weifsen Lichtes an, so erscheint als Mitte des Beugungsbildes eine helle weifse Linie, welche nicht merklich breiter ist als die Lichtquelle selbst, und an beiden Seiten kontinuierliche Spektra, welche ihr violettes Ende der Mitte zuwenden, und welche eine um so gröfsere Breite haben, je kleiner der Abstand der homologen Spaltränder ist. Man bezeichnet eine derartige grofse Anzahl von parallelen Spalten in der Regel als Gitter, und den Abstand der homologen Ränder der einzelnen Spalten, also den für die Lage der Maxima mafsgebenden Wert von a als die Spaltbreite. Derartige Gitter kann man sich herstellen, indem man eine grofse Zahl feiner Drähte einander parallel neben einander aufspannt, oder bequemer noch, indem man aus einer eine Glasplatte bedeckenden Rufs- oder Silberschicht mit einer feinen Spitze eine Anzahl paralleler Linien zieht, oder auch indem man solche Linien direkt auf einer Glasplatte mit einem Diamanten einritzt. In dem letztern Falle wird die Glasplatte an den geritzten Stellen undurchsichtig, die Spalten werden von den nicht geritzten Stellen des Glases gebildet.

Dafs durch ein solches Gitter das Beugungsbild das beschriebene werden mufs, läfst unsere Gleichung für die Intensität des gebeugten Lichtes sofort erkennen. Wie wir sahen, liegen die Maxima, wie grofs auch die Zahl der Öffnungen sein mag, immer an den Stellen, wo

$$a \sin \alpha = n\lambda \qquad \sin \alpha = n \frac{\lambda}{a}$$

ist, von denen nur jene ausfallen, für welche $n \frac{b}{a}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist. Jedem der Maxima zweiter Klasse ist aber bei grofser Zahl der Spalten an jeder Seite ein Minimum so nahe gerückt, dafs bei homogenem Licht

von demselben nur eine schmale Lichtlinie übrig bleibt. Denn die Lage der Minima ist gegeben durch die Gleichung

$$pa \sin \alpha = n\lambda \qquad \sin \alpha = n \frac{\lambda}{pa},$$

sie liegen also dort, wo

$$\sin \alpha = \frac{1}{p}\frac{\lambda}{a}, \ \frac{2}{p}\frac{\lambda}{a}, \ \frac{3}{p}\frac{\lambda}{a} \dots$$

Ist also etwa $p = 2000$, so liegt das erste Minimum rechts und links von der Mitte, wo

$$\sin \alpha = 0{,}0005 \frac{\lambda}{a};$$

würde das Gitter eine Breite von 20^{mm} haben, also $a = 0{,}01$, so würde für Natronlicht, für welches $\lambda = 0{,}000\,59$ ist, α einem Werte von etwa 6 Sekunden entsprechen. Ebenso nahe sind jedem Maximum von beiden Seiten die Minima gerückt. Die Maxima haben somit keine merklich gröfsere Breite als die Lichtlinie selbst, welche ihr Licht auf das Gitter sendet.

Ferner haben nur diese Maxima eine merkbare Intensität, da den Maximis dritter Klasse die Minima noch näher gerückt sind, und da die Maxima, wegen des kleinen Wertes, den der dritte Faktor an den betreffenden Stellen hat, nur eine sehr geringe Lichtstärke besitzen, wie man übersieht, wenn man sich erinnert, dafs diese Maxima an den Stellen auftreten, wo der Wert des Zählers jenes Faktors gleich 1 ist.

Es bleiben somit bei einer grofsen Zahl von Spaltöffnungen nur die hellen Linien übrig, welche an den Stellen liegen, wo

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a}, \ 2\frac{\lambda}{a}, \ 3\frac{\lambda}{a} \dots n\frac{\lambda}{a}$$

ist, so dafs also die durch die verschiedenen Öffnungen tretenden Schwingungen in gleicher Phase sind.

Bei Anwendung homogenen Lichtes mufs somit das ganze Beugungsbild aus diesen einzelnen hellen Linien bestehen.

Bei Anwendung weifsen Lichtes fallen die den einzelnen Wellenlängen entsprechenden Streifen neben einander; für violettes Licht, dessen Wellenlänge λ_v ist, liegt das erste Maximum bei

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_v}{a},$$

für blaues, gelbes, rotes Licht, dessen Wellenlänge λ_b, λ_g, λ_r ist, dort, wo

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_b}{a}, \ \frac{\lambda_g}{a}, \ \frac{\lambda_r}{a},$$

die einzelnen farbigen Linien liegen also, da für diese kleinen Winkel die Sinus den Bögen proportional sind, in dem Verhältnisse weiter von der Mitte, als ihre Wellenlängen gröfser sind. Das Gleiche gilt von den folgenden Maximis.

Jedes Maximum mufs uns somit ein vollständiges Spektrum des angewandten Lichtes liefern von derselben Vollständigkeit, wie sie das prismatische Spektrum zeigt, also auch mit sämtlichen Fraunhoferschen Linien.

Denn wenn in dem Lichte Schwingungen irgend einer Wellenlänge λ_x fehlen, so mufs in dem ersten Spektrum, an der Stelle, wo

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_x}{a},$$

sich ein dunkler Streifen zeigen, weil an diese Stelle hin kein Licht gebeugt wird. Diese Beobachtung Fraunhofers ist eine der wichtigsten Entdeckungen der Optik, da sie uns, wie wir § 77 sehen werden, das genaueste Mittel zur Messung der Wellenlängen liefert.

Das Beugungsspektrum unterscheidet sich in einer Beziehung von dem prismatischen Spektrum. In letzterm ist die Dispersion in den verschiedenen Teilen des Spektrums sehr verschieden, das heifst Schwingungen, denen gleiche Differenzen der Wellenlängen entsprechen, haben in den verschiedenen Teilen des prismatischen Spektrums sehr verschiedene Abstände, der Abstand wächst stetig, je mehr man sich dem brechbarern Ende des Spektrums nähert. Deshalb bilden keineswegs die Strahlen, deren Wellenlängen den mittlern Wert der Wellenlängen der sichtbaren Strahlen haben, die Mitte des prismatischen Spektrums. In dem Beugungsspektrum, besonders im ersten, ist die Ablenkung der Wellenlänge proportional, deshalb liegen die mittlern Strahlen gerade in der Mitte des Spektrums, überhaupt ist der Abstand irgend zweier Stellen des Spektrums der Differenz der Wellenlängen des an ihnen vorhandenen Lichtes proportional.

Die Wellenlänge des äufsersten sichtbaren Violett ist etwas mehr als die Hälfte des äufsersten sichtbaren Rot, daraus folgt, dafs

$$\frac{2\lambda_v}{a} > \frac{\lambda_r}{a},$$

somit dafs die Ablenkung des zweiten Maximums des Violett gröfser ist als diejenige des ersten Maximums des Rot. Das zweite Spektrum an jeder Seite ist somit von dem ersten durch einen dunklen Zwischenraum getrennt, oder das erste Spektrum ist ein ganz reines Spektrum. Das zweite Spektrum dagegen wird schon zum Teil von dem dritten überdeckt, letzteres beginnt etwa bei der Linie *D* des zweiten Spektrums, da der dreifache Wert der Wellenlängen der äufsersten sichtbaren violetten Strahlen etwa dem doppelten Werte der Wellenlängen der Linie *D* entspricht; gelb, orange und rot des zweiten Spektrums mischen sich somit mit violett und blau des dritten Spektrums.

§ 76.

Beugungserscheinungen bei Anwendung durchsichtiger Schirme. Wir haben bisher vorausgesetzt, dafs die bei den Fresnelschen Beugungserscheinungen angewandten Schirme, welche einen Teil der Welle anfhalten, oder die Umgebung der Öffnung bei den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen vollkommen undurchsichtig seien. Es zeigen sich indes ebenso Beugungserscheinungen, wenn man die Schirme von durchsichtigen Substanzen herstellt, so dafs der eine Teil der Lichtwellen sich ungestört, der andere nach dem Durchgang durch den durchsichtigen Schirm ausbreitet; die sich zeigenden Beugungserscheinungen unterscheiden sich aber in mehreren Punkten von den bisher betrachteten. Auf diese Erscheinungen

hat schon Fresnel[1]) hingewiesen, genauer untersucht sind dieselben zuerst von Quincke[2]). Wir können dieselben analog den bisher betrachteten Erscheinungen in zwei grofse Gruppen teilen, in die nach Fresnels Methode erzeugten und in die nach der Methode von Fraunhofer dargestellten.

Um die erstere zu erhalten, ersetzt man bei sonst ganz ungeänderter Anordnung des Versuches den zwischen Lichtpunkt und Fresnelscher Lupe aufgestellten Schirm durch eine ebene Spiegelglasplatte, welche zum Teil mit einer geradlinig begrenzten, recht dünnen Schicht von durchsichtigem Jodsilber bedeckt ist. Die Herstellung einer solchen Schicht ist nicht schwierig. Man überzieht zunächst die Glasplatte nach dem Liebigschen Verfahren mit einer dünnen Silberschicht, schneidet mit einem scharfen vorsichtig geführten Messerschnitt die Silberschicht entzwei und entfernt dann an der einen Seite des Schnittes das Silber vom Glase. Das zurückgebliebene Silber verwandelt man durch Auflegen von Jod in durchsichtiges Jodsilber. Die so hergestellte Platte stellt man so auf, dafs der Rand der Schicht dem Faden der Fresnelschen Lupe parallel ist. Ganz ebenso kann man enge Öffnungen in durchsichtigen Lamellen, oder schmale Streifen auf der Glasplatte herstellen, entsprechend den drei Arten von Schirmen, welche wir bei den Fresnelschen Versuchen besprachen.

Wendet man zu diesen Versuchen eine zur Hälfte mit einer geradlinig begrenzten Jodsilberschicht bedeckte Glasplatte an, so sieht man mit der Fresnelschen Lupe in der Nähe des geometrischen Schattens der Lamellengrenze (der durch den leuchtenden Punkt und die Grenzlinie der durchsichtigen Schicht gelegten Ebene) im weifsen Lichte eine Reihe schön gefärbter, im homogenen Lichte eine Reihe abwechselnd heller und dunkler Interferenzstreifen, die parallel der Lamellengrenze in verschiedenen Abständen von dieser und von einander verlaufen. Während aber bei Anwendung eines undurchsichtigen Schirmes solche Streifen nur in dem an dem Schirmrande vorübergehenden Lichte, nicht im Schatten des Schirmes sich zeigen, treten dieselben hier an beiden Seiten der Grenze, also auch im Schatten der als undurchsichtig gedachten Schicht auf. Besonders ausgezeichnet unter den verschiedenen Interferenzstreifen ist ein breiter Streifen, der zuweilen mit der geometrischen Grenze des Schattens zusammenfällt, immer aber in dessen Nähe liegt. Quincke bezeichnet denselben als erstes Minimum.

Die Lage der Streifen gegen den geometrischen Schatten der Lamellengrenze hängt aufser von dem Abstand des leuchtenden Punktes und der Fresnelschen Lupe von der Lamelle wesentlich ab von der Dicke und dem Brechungsexponenten der durchsichtigen Schicht. Sehr deutlich tritt das hervor, wenn man die durchsichtige Schicht anstatt von gleichförmiger Dicke von stetig geänderter Dicke wählt, indem man die Glasplatte mit einer keilförmigen Silberschicht bedeckt und den Schnitt senkrecht zur Schärfe des Keiles führt, so dafs längs der Grenze der Schicht etwa von oben nach unten die Dicke der Schicht stetig und regelmäfsig abnimmt. Die Gestalt, welche die im Schatten der Schicht liegenden Streifen annehmen,

[1]) *Fresnel*, Mémoire sur la diffraction. Mémoires de l'Acad. de France. T. V. p. 451. Oeuvres complètes. T. I. p. 359. § 82. Poggend. Annal. Bd. XXX.
[2]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 321 ff.



zeigt Fig. 143. An gewissen Stellen, a, b, c, sind die Interferenzstreifen am dunkelsten und liegen fast genau in der geometrischen Grenze des Schattens, von da aus nehmen sie nach oben und unten an Dunkelheit ab und krümmen sich gegen die Seite, nach welcher die Schicht dicker wird, gleichzeitig etwas von der Grenze fort, bis sie in einiger Entfernung von den Punkten a, b, c vollständig verschwinden.

Fig. 143.

g c b a g

Die Lage der Punkte a, b, c hängt ab von der Wellenlänge des angewandten Lichtes; wendet man deshalb statt des homogenen weifses Licht an, so ist die Grenze des Schattens verschieden gefärbt, die Farben folgen sich beim Fortschreiten zu dickern Stellen, wie die Farben der Newtonschen Farbenringe im durchgelassenen Licht. Das erste Minimum bildet breite, in der Mitte dunkel, an den Enden matter gefärbte Interferenzstreifen, welche gegen den geometrischen Schatten der Lamellengrenze geneigt sind.

Die Abhängigkeit der Lage der im Schatten liegenden Interferenzstreifen von der Dicke der durchsichtigen Schicht beweist unmittelbar, dafs dieselben durch die Wellen erzeugt werden, welche in der Nähe der Grenze durch Luft einerseits und andererseits durch die durchsichtige Schicht hindurchgegangen sind. Betrachten wir zunächst die Entstehung des ersten Minimums. Wenn wir die nach einem vor dem Schirme im geometrischen Schatten der Schirmgrenze liegenden Punkt sich fortpflanzende Lichtwelle, welche durch die Grenze halbiert wird, von dem betrachteten Punkte aus in Zonen zerlegt denken, welche gegen einander die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge haben, so werden auch jetzt alle Zonen aufser der halben Centralzone sich auslöschen, indem dasselbe, was von den ganzen Zonen bei ungestörter Ausbreitung gilt, auch von den halben Zonen gilt, welche einerseits an dem Schirm vorbeigehen, andererseits den Schirm durchdringen. In dem betreffenden Punkte wird also Licht nur von dieser halben Centralzone erregt, deren Schwingungen aber zur Hälfte durch Luft, zur Hälfte aber durch eine durchsichtige Schicht von der Dicke d hindurchgegangen sind. Dadurch ist zwischen den gleichzeitig in dem betrachteten Punkte ankommenden Schwingungen eine Phasendifferenz entstanden, und wenn dieselbe eine halbe Wellenlänge beträgt, so mufs der betreffende Punkt dunkel erscheinen. Die Phasendifferenz ist, wenn wir den Brechungsexponent der Schicht mit n bezeichnen, gerade wie bei den Talbotschen Linien

$$\varDelta = n\,\frac{d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} = \frac{d}{\lambda}\,(n-1).$$

Stets also, wenn dieser Ausdruck ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ wird, wenn also

$$\frac{2d}{\lambda}\,(n-1) = 2m+1,$$

$$d = (2m+1)\,\frac{\lambda}{2\,(n-1)},$$

mufs der geometrische Schatten dunkel sein. Bei einer keilförmigen Lamelle, bei der die Dicke der Schicht längs des Randes stetig wächst,

mufs also der geometrische Rand des Schattens abwechselnd hell und dunkel sein.

Ist die Dicke der Schicht etwas gröfser, als dem eben angegebenen Werte entspricht, so müssen die Streifen sich etwas von dem Rande entfernen, sie bilden sich dort, wo das in den Schatten, wie bei undurchsichtigem Schirme, gebeugte Licht und das durch die Schicht hindurchgegangene Licht die Differenz einer halben Wellenlänge hat. Gleichzeitig mufs, da die Intensität des in den Schatten gebeugten Lichtes dann kleiner ist als die Intensität des durch die Schicht gegangenen, der Interferenzstreifen immer heller werden, bis er gegen die Stelle hin, wo die Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge ist, verschwindet.

Ist die Dicke der Schicht etwas kleiner als ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, so rückt der Streifen vom Rande aus nach der entgegengesetzten Seite, also von der Schicht fort, er bildet sich, wo das Licht, welches nach dem Durchtritt durch die Schicht aus dem Schatten der Schicht gebeugt ist, mit dem direkt fortgepflanzten die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge hat.

Wie man sieht, mufs bei einer keilförmigen Schicht darnach die Gestalt des ersten Minimums die vorhin beschriebene werden, dasselbe mufs längs des Randes in mehrere Teile zerfallen, deren dunkelste Stellen mit dem Schatten des Randes zusammenfallen, deren Enden gegen die dickere Seite hin nach dem Innern der Schicht, gegen die dünnere Seite hin etwas nach aufsen gebogen sind. An den dunkelsten Stellen mufs die Dicke der Schicht gerade der Wegedifferenz eines ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge entsprechen. Letzteres hat Quincke durch seine Messungen bewiesen. Da die Jodsilberschicht, wenn man durch sie gegen eine weifse Wolke sieht, Farben dünner Blättchen zeigt, oder im homogenen Licht Interferenzstreifen, welche senkrecht zum Spaltrande stehen, so konnte er mit Hülfe derselben die Dicke der Schicht an den verschiedenen Stellen bestimmen, so auch für die dunkelsten Stellen der Interferenzstreifen. Ist die Wellenlänge des Lichtes im Jodsilber gleich λ_1, somit in der Luft $n \cdot \lambda_1$, so mufs für die dunkelsten Stellen

$$d = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\lambda_1}{2}, \quad 3\,\frac{n}{n-1} \cdot \frac{\lambda_1}{2}, \quad 5 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\lambda_1}{2} \cdots$$

oder setzen wir für n, den Brechungsexponenten des Jodsilbers, seinen Wert 2,25 für mittlere Strahlen ein,

$$d = 1{,}8\,\frac{\lambda_1}{2}, \quad 5{,}4\,\frac{\lambda_1}{2}, \quad 9{,}0\,\frac{\lambda_1}{2}$$

sein. Die von Quincke gefundenen Werte sind

$$d = 2{,}04\,\frac{\lambda_1}{2}, \quad 5{,}63\,\frac{\lambda_1}{2}, \quad 8{,}79\,\frac{\lambda_1}{2},$$

Zahlen, die mit den berechneten fast vollständig übereinstimmen.

Auch die übrigen im Schatten der Schicht liegenden Strahlen werden durch das in den Schatten derselben gebeugte und durch das durch die Schicht direkt hindurchgegangene Licht gebildet, ihre Lage, sowie die Veränderung der Lage der Streifen aufserhalb des Schattens gegenüber denen, welche bei undurchsichtigem Schirm entstehen, läfst sich ohne verwickelte

Rechnungen nicht bestimmen. Eine vollständige Theorie dieser Erscheinungen hat Jochmann gegeben [1]).

In ähnlicher Weise wie die Fresnelschen Beugungserscheinungen werden die Frannhoferschen durch durchsichtige Schirme geändert [2]). Man kann sich durchsichtige Beugungsgitter leicht in der Weise herstellen, dafs man eine planparallele Glasplatte nach der erwähnten Liebigschen Methode mit einer dünnen Silberschicht bedeckt, in diese ein Gitter einteilt, und dann durch Auflegen von Jod das Silber in Jodsilber verwandelt. In welcher Weise sich die Erscheinungen bei solchen Gittern von den früher angewandten unterscheiden, wird sich am besten übersehen lassen, wenn wir zunächst den Ausdruck für die Intensität des gebeugten Lichtes bei solchen Gittern ableiten. Wir gehen dabei aus von der Beugung in einer Öffnung. Ein Spalt von der Breite $2b$ sei zur Hälfte mit einer durchsichtigen Schicht von der Dicke d und dem Brechungsexponenten n bedeckt. Die durch den unbedeckten Teil der Öffnung dringende Welle gibt dann nach § 73 Anlafs zu einem Beugungsbild, dessen Intensität in einer Richtung, die mit der Schirmnormale den Winkel α bildet, gegeben ist durch

$$J = \left(\frac{\sin \frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \pi}{\frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \pi} \right)^2 .$$

Die durch den bedeckten Teil des Spaltes hindurchdringenden Strahlen modificieren das Beugungsbild so, dafs wenn die Phasendifferenz der Strahlen, welche in gleichem Abstande von dem Rande der unbedeckten Öffnung einerseits und dem entsprechend liegenden Rande der bedeckten andererseits durch den Schirm hindurchgehen, einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge gleich ist, Dunkelheit entsteht, dagegen an den Stellen, wo diese Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge beträgt, die Helligkeit die vierfache ist. Gerade wie wir bei undurchsichtigen Schirmen das Beugungsbild für zwei Öffnungen aus dem für eine Öffnung erhielten, indem wir den Ausdruck für eine Öffnung mit einem Faktor multiplicierten, welcher von der Phasendifferenz der durch die verschiedenen Öffnungen dringenden Strahlen abhängig war, so werden wir auch jetzt das modificierte Beugungsbild erhalten, wenn wir obigen für den unbedeckten Teil der Öffnung erhaltenen Ausdruck mit einem Faktor multiplicieren, der von der Phasendifferenz der entsprechend liegenden Strahlen in dem bedeckten und unbedeckten Teile der Öffnung abhängig ist, und gleich Null wird jedesmal, wenn die Phasendifferenz der entsprechenden Strahlen ein ungerades, gleich 4 wird, wenn sie ein gerades Vielfaches von einer halben Wellenlänge ist. Gerade wie oben ist die Phasendifferenz der durch die Schicht gegangenen Wellen gegen die nicht durch dieselbe getretenen infolge der Verzögerung in der Schicht

$$\Delta = \frac{d}{\lambda} (n - 1);$$

da der Abstand der in gleicher Entfernung von den entsprechend liegenden

[1]) *Jochmann*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVI.
[2]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 361 f.

Rändern des bedeckten einerseits, des unbedeckten Teiles andererseits durch die Öffnung gehenden Strahlen gleich b ist, so ist die Phasendifferenz der in der Richtung α gebeugten Strahlen infolge der Wegedifferenz

$$\varDelta' = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}.$$

Die ganze Phasendifferenz zwischen den durch den unbedeckten und bedeckten Teil hindurchgegangenen Lichtwellen ist somit $\varDelta + \varDelta'$. Multiplicieren wir den Ausdruck für das Beugungsbild des unbedeckten Teiles mit dem Faktor

$$2\left\{1 + \cos\left(\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b\sin\alpha}{\lambda}\right)\cdot 2\pi\right\},$$

so erhalten wir das Beugungsbild der ganzen Öffnung, denn wenn

$$\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda} = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots.$$

ist, wird der Cosinus jenes Faktors gleich $+1$, derselbe somit gleich 4. Wenn aber

$$\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda} = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{2}\ \ldots.$$

ist, wird der Cosinus gleich -1, somit der Faktor gleich $2\,(1-1) = 0$. Da nun

$$2\left\{1 + \cos\left(\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\right)2\pi\right\} = 4\cos^2\left\{\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\right\}\pi,$$

so erhalten wir schliefslich für das Beugungsbild

$$J_1 = J \,.\, 4 \,.\, \cos^2\left\{\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\right\}\pi.$$

Haben wir anstatt einer solchen halbbedeckten Öffnung p solche, die unmittelbar an einander grenzen, also ein in der durchsichtigen Substanz geteiltes Gitter, so erhalten wir den Ausdruck für die Intensität der gebeugten Strahlen ganz genau auf demselben Wege wie in § 74. Da hier die Phasendifferenz der entsprechend liegenden Strahlen in je zwei Öffnungen gleich

$$\delta = \frac{2b \,.\, \sin\alpha}{\lambda},$$

somit $a = 2b$ ist, so haben wir in dem von der Zahl der Öffnungen abhängigen Faktor der allgemeinen Intensitätsgleichung nur $a = 2b$ zu setzen. Schreiben wir deshalb für die Intensität des durch den unbedeckten Teil einer Öffnung dringenden Lichtes J, so ist

$$Jp = p^2 J \,.\, 4\cos^2\left\{\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\right\}\pi \cdot \left(\frac{\sin\dfrac{2pb\sin\alpha}{\lambda}\pi}{p \,.\, \sin\dfrac{2b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\pi}\right)^2.$$

Der Ausdruck ergibt unmittelbar, dafs das Beugungsbild solcher Gitter im wesentlichen dasselbe ist, wie bei Gittern mit undurchsichtigen Zwischenräumen, dafs indes infolge des Faktors, welcher die Dicke der Schicht enthält, neue Minima zu den frühern hinzukommen, während die Maxima

eine gröfsere Intensität haben; bei Anwendung von weifsem Licht werden deshalb an manchen Stellen des Beugungsbildes die Farben geändert.

Untersuchen wir zunächst die Mitte des Beugungsbildes; dort ist $\alpha = 0$, und nach den Bemerkungen des § 74 wird dort

$$Jp = p^2 J \,.\, 4 \,.\, \cos^2 \frac{d}{\lambda} (n-1) \pi.$$

Der Faktor von $p^2 J$ verschwindet dann für solche Werte von d, welche gleich sind

$$d = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{n-1},\ 3 \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{n-1},\ 5 \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots$$

Sieht man deshalb durch ein solches Gitter nach einer schmalen Lichtquelle, dessen Licht die Wellenlänge λ hat, etwa nach einer schmalen Flamme mit vorgesetztem homogen gefärbtem Glase, so erscheint die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel, an beiden Seiten dagegen, wo $\sin \alpha$ von Null verschieden ist, treten Maxima zweiter Klasse hervor.

Bei Anwendung weifsen Lichtes fehlen in der Mitte alle jene Farben, deren Wellenlänge so ist, dafs d einen jener obigen Werte hat; die Mitte ist also gefärbt. Die Farbe ist dieselbe wie bei den Newtonschen Ringen im durchgelassenen Licht, an den Stellen, wo die Dicke der Luftschicht D gleich ist

$$D = \tfrac{1}{2} (n-1)\, d;$$

denn dort fehlten auch alle die Farben, für welche $2D$ ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, und die übrigen Farben werden in derselben Weise verstärkt oder geschwächt.

Ganz dasselbe gilt für die Änderung der Farbe in den Seitenspektren, wo also $\sin \alpha$ nicht gleich Null ist, dort fehlen gegenüber einem gewöhnlichen Gitter alle Farben, für welche

$$d(n-1) + b \,.\, \sin \alpha = \frac{\lambda}{2},\ 3 \frac{\lambda}{2},\ 5 \frac{\lambda}{2} \cdots$$

Die Färbung ist also an der betreffenden Stelle gerade so, wie wenn das in der betreffenden Richtung gebengte Licht bei den Newtonschen Ringen durch eine Luftschicht gegangen wäre, deren Dicke D gegeben ist durch

$$D = \tfrac{1}{2} (d\,[n-1] + b \,.\, \sin \alpha).$$

Nur ist die Färbung hier reiner wie bei den Ringen im durchgelassenen Licht, da hier die dort störende Beimengung von weifsem Licht fehlt.

Alle diese Erscheinungen hat Quincke beobachtet und ihre vollständige Übereinstimmung mit der Theorie gezeigt.

Sehr bequem sind diese durchsichtigen Lamellen oder Gitter auch, um Beugungserscheinungen im reflektierten Lichte zu erhalten. Läfst man von einer dünnen auf Glas liegenden Lamelle, welche durch einen geradlinigen Rand begrenzt ist, oder von einem solchen Gitter Licht reflektieren, so interferiert das in verschiedener Tiefe auf der Vorderfläche der Lamelle oder auf dem Glase reflektierte Licht, und liefert Beugungserscheinungen, welche den vorhin beschriebenen analog sind. Wegen der Details dieser Erscheinungen verweisen wir auf die Arbeiten von Quincke und Jochmann.

§ 77.

Messung der Wellenlängen. Bei allen den in diesem Kapitel besprochenen Interferenzerscheinungen hängt die Lage der Interferenzstreifen wesentlich ab von der Wellenlänge des angewandten Lichtes; alle die vorgeführten Methoden, Interferenzen hervorzurufen, sind daher mehr oder weniger geeignet, um die Länge der Lichtwellen zu messen. Wir haben bereits bei Besprechung des Fresnelschen Spiegelversuchs die Messung erwähnt, welche Fresnel die Wellenlänge eines roten Lichtes ergab, und selbst aus den Versuchen mit Natronlicht die Wellenlänge derselben zu

$$\lambda = 5{,}895$$

berechnet, wenn als Einheit die zehntausendstel Millimeter genommen werden. Ganz in derselben Weise kann man die Wellenlängen mit dem Interferenzprisma oder den Billetschen Halblinsen messen. Auch die Newtonschen Farbenringe liefern uns die Wellenlängen aus den Dicken der Schicht, in welcher für eine bestimmte Farbe ein dunkler Ring sich bildet. Auf diesem Wege hat Fresnel aus den p. 411 angeführten Messungen die Wellenlängen der verschiedenen Farben berechnet.

Die Bestimmung der Wellenlängen auf diesen Wegen hat jedoch den Nachteil, daſs man bei ihnen kein Mittel hat, die Art des angewandten Lichtes direkt zu bestimmen, das heiſst, dessen Lage im Spektrum genau wiederzugeben, da bei diesen Methoden keine Fraunhoferschen Linien erscheinen. Sie sind deshalb nur geeignet, die Wellenlängen von homogenem Licht zu bestimmen, dessen Stelle im Spektrum man schon auf andere Weise kennt, wie des Natriumlichtes.

Bei den Versuchen mit Fresnelschen Spiegeln kann man die Lage der Interferenzstreifen nach den Fraunhoferschen Linien orientieren, wenn man nach der Methode von Fizeau und Foucault irgend eine Stelle des Interferenzbildes mit dem Prisma untersucht. Ebenso erhält man die Interferenzstreifen zwischen den Fraunhoferschen Linien bei der Methode von Talbot. Beide Methoden gestatten deshalb die Länge der Wellen von Lichtarten, welche durch ihre Stellung im Spektrum in ganz bestimmter Weise definiert sind, zu messen. Wir haben gesehen, wie sie in sehr einfacher Weise zum Ziele führen, wenn man die Wellenlängen an zwei Stellen des Spektrums als durch anderweitige Messungen gegeben voraussetzt. In dieser Weise, sahen wir, hat Esselbach die Talbotschen Linien sehr fruchtbar verwertet, um die Wellenlängen der ultravioletten Strahlen des Spektrums zu bestimmen.

Beide Methoden gestatten aber auch ohne diese Voraussetzung die Wellenlängen zu messen. Bei der ersten hat man nur alle die Gröſsen, welche in die die Lage der Interferenzstreifen bestimmenden Gleichungen eingehen, zu bestimmen, also den Abstand der Lichtlinie von der Schnittlinie der beiden Spiegel, die Neigung der beiden Spiegel gegen einander und den Abstand des betrachteten Interferenzstreifens von den beiden Spiegelbildern der Lichtquelle. Bei Anwendung der Talbotschen Linien hat man die Dicke des angewandten Blättchens und dessen Brechungsexponenten für die verschiedenen Strahlen des Spektrums zu bestimmen, und dann den Versuch mit einem zweiten Blättchen anderer Dicke zu wiederholen. Denn der einzelne Versuch gibt nach § 69 für eine bestimmte Wellenlänge nur eine Gleichung mit zwei Unbekannten, er sagt nur aus, daſs

$$\frac{d}{\lambda_1}(n_1 - 1) = r + \tfrac{1}{2},$$

also ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, ohne den Wert von r zu geben.

Bei der Schwierigkeit, die zu messenden Gröfsen mit grofser Genauigkeit zu bestimmen, wie bei den Versuchen mit den Spiegeln besonders die immer nur äufserst geringe Neigung der Spiegel, bei den Talbotschen Linien die Dicke der Platten und die Brechungsexponenten der einzelnen Strahlen, sind diese Methoden doch wenig geeignet, vollkommen sicher die absolnten Werte der Wellenlängen zu liefern.

Die beste Methode zur Bestimmnng der Wellenlänge ist diejenige mit Hülfe der Beugungsgitter; denn mit diesen erhält man, wie wir § 75 nachwiesen, Spektra mit Fraunhoferschen Linien, kann also direkt die Wellenlängen genan definierter Lichtarten des Spektrums messen, und hat aufserdem nur zwei Gröfsen, welche in die Gleichung für die Wellenlänge eingehen, zu messen. Denn bei einem Gitter, bei welchem die Abstände der gleichgelegenen Ränder der Öffnungen konstant und gleich a sind, ist die Lage des ersten Maximums zweiter Klasse bestimmt durch die Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{a}.$$

Man hat also zur Bestimmung der Wellenlänge nur die Spaltbreiten a und den Winkel α zu messen, um welchen eine bestimmte Fraunhofersche Linie von der Richtung der ungebengten Strahlen abgelenkt ist. Indem man diese Messung an beiden Seiten ansführt, hat man sofort eine Kontrole des gefundenen Wertes von α. Eine weitere Kontrole bat man durch Beobachtungen im zweiten Seitenspektrum. Die Lage einer bestimmten Lichtart von der Wellenlänge λ ist bestimmt durch

$$\sin\alpha_2 = 2\,\frac{\lambda}{a}$$

nnd so bei jedem weitern Seitenspektrum, so weit sie mit Sicherheit zn beobachten sind.

Deshalb sind die Gitterspektra anch vorwiegend zur Bestimmung der Wellenlängen angewandt, zunächst von Fraunhofer[1]), dann später, um anfser den von Fraunhofer gemessenen Längen noch andere zu bestimmen, von Ditscbeiner[2]), van der Willigen[3]), Mascart[4]) und ganz besonders von Ångström[5]). Mascart und Eisenlohr[6]) haben die Gitterspektra anch zur Messung der ultravioletten Strahlen angewandt.

Die Messnng der Spaltbreite a geschieht mit einer Teilmaschine, indem man die Breite des ganzen Gitters mifst und dieselbe durch die Anzahl der Spaltöffnungen dividiert. Bei den ausgezeichneten Gittern von Nobert in

---

[1]) *Fraunhofer,* Nene Modifikation des Lichtes. Denkschriften der Münchener Akademie. Bd. VIII. Gilberts Annalen. Bd. LXXIV.

[2]) *Ditscheiner,* Berichte der Wiener Akademie. Bd. L und LII.

[3]) *van der Willigen,* Mémoires d'Optique physique 2. Harlem 1868.

[4]) *Mascart,* Comptes Rendns. LVIII. p. 1111. Annales scientifiques de l'école normale supérieure. T. IV.

[5]) *Ångström,* Recherches sor le spectre solaire. Berlin 1869.

[6]) *Eisenlohr,* Poggend. Annal. Bd. XCVIII.

Barth in Pommern, welcher die Gitter durch Diamant auf planparallelen Glasplatten oder auch in Silber, welches nach der Liebigschen Methode auf Glas niedergeschlagen ist, teilt, ist die Breite der Gitter und die Anzahl der Öffnungen stets angegeben. Zur Kontrole mifst man die Breite des Gitters. Kennt man so den Wert von a, so wird das Gitter auf dem mittlern Tische eines Spektrometers so aufgestellt, dafs seine Ebene senkrecht ist auf der Axe des Kollimatorrohres und des Beobachtungsrohres, welche man vorher, wenn der Teilkreis auf 0 steht, in der § 27 angegebenen Weise in eine gerade Linie gebracht hat. Man benutzt dazu auch hier die Reflexion des Fadenkreuzes; hat aber, wenn die beiden Ebenen der Glasplatte genau parallel sind, das noch einfachere Mittel der Orientierung, dafs das mittlere Beugungsbild am Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs erscheint Zur Kontrole, wenn man auf die Weise eingestellt hat, dient dann die Messung einer bestimmten Linie im ersten Seitenspektrum an beiden Seiten. Der auf beiden Seiten gemessene Winkel α mufs dann ganz genau derselbe sein. Ist das nicht der Fall, so beweist das, dafs die Flächen der Platte nicht genau parallel sind, und dafs deshalb das ungebeugte Licht nicht vollständig parallel der Gitternormale austritt. Ist der Unterschied der Winkel nur klein, so genügt es, als Wert von α zur Berechnung die halbe Summe der beiden beobachteten Werte zu nehmen; ist der Unterschied indes beträchtlich, so mufs man ihn in anderer Weise in Rechnung ziehen. Die vollständig durchgeführte Theorie der Beugung liefert dann für die Lage des ersten Maximums folgenden Ausdruck. Ist φ der Winkel, den die ungebeugten Strahlen mit der Gitternormale bilden, α_1 die Ablenkung des am stärksten abgelenkten Maximums, es liegt auf derselben Seite der Normalen, auf der die ungebeugten Strahlen liegen, α_2 die Ablenkung des weniger abgelenkten auf der andern Seite, so ist

$$\sin(\alpha_1 + \varphi) - \sin\varphi = \frac{\lambda}{a},$$

$$\sin(\alpha_2 - \varphi) + \sin\varphi = \frac{\lambda}{a}.$$

Hat man das Gitter durch Reflexion des Fadenkreuzes orientiert, so beobachtet man φ direkt, indem man die Richtung der ungebeugten Strahlen bestimmt, sonst erhält man φ aus der Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{2 - (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)},$$

die sich unmittelbar aus den beiden obigen Gleichungen ergibt. Zur Kontrole des Wertes von φ kann man eine Reihe von Werten α für verschiedene λ im ersten Spektrum messen, kann aber auch die folgenden Seitenspektra benutzen, denn für das zweite, dritte etc. Seitenspektrum tritt nur auf die rechte Seite beider obigen Gleichungen anstatt $\frac{\lambda}{a}$ ein $2\frac{\lambda}{a}$, $3\frac{\lambda}{a}\cdots$, von denen, wie im § 74 gezeigt wurde, nur die Spektra ausfallen, für welche, wenn b die Breite der Öffnungen ist, $m\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl ist. Würde also zufällig $a = 2b$ sein, so würden das 2, 4, 6 .. Seitenspektrum ausfallen und nur die ungeradzahligen übrig bleiben. Man erkennt das Verhältnis $\frac{b}{a}$ leicht aus dem Sprung in den für dieselbe Linie in den ver-

schiedenen Spektren gefundenen Werten von sin α, welche eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz der sin α für das erste Seitenspektrum ist. Fehlt in derselben das m. Glied, so ist $mb = a$.

Die Messung der Wellenlängen des ultravioletten Lichtes ist auf diese Weise direkt nicht möglich, da man das Spektrum nicht direkt sehen kann. Zur Bestimmung derselben benutzte deshalb Eisenlohr die Fluorescenz; er stellte vor ein in Rufs geteiltes Gitter, welches in einer Breite von 54 Millimeter 1440 Linien hatte, eine achromatische Sammellinse, und liefs ein schmales von einem Heliostaten reflektiertes Strahlenbündel senkrecht auf das Gitter auffallen. In der Brennweite der Linse befand sich ein mit Chininlösung getränkter Papierschirm; auf diesem stellte sich dann das Beugungsbild objektiv dar, und an den durch die Wellenlänge λx der unsichtbaren Strahlen bestimmten Stellen

$$\sin\alpha = \frac{\lambda x}{a}$$

wurden dieselben durch Fluorescenz sichtbar. Der Winkel α wurde durch Messung des Abstandes des Schirmes vom Gitter und des Abstandes der betreffenden dunklen Linie des Spektrums von dem Punkte des Schirmes, wo er von den ungebeugten Strahlen getroffen wurde, bestimmt. Ist z der Abstand des Schirmes vom Gitter und x der Abstand auf dem Schirme der betreffenden Linie von der Mitte des Beugungsbildes, so ist

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{x}{z}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+z^2}}$$

$$\lambda x = a \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2+z^2}}.$$

Mascart benutzte die chemische Wirkung der ultravioletten Strahlen, indem er in der § 56 angegebenen Weise das Beugungsspektrum photographierte, und die Lage der dunklen Linien in dem photographierten Spektrum bestimmte.

Wir geben in folgenden beiden Tabellen eine Zusammenstellung der verschiedenen Messungen der hauptsächlichsten Strahlen des Spektrums, und zwar in Tabelle I die der sichtbaren Strahlen nach Fraunhofer, van der Willigen, Ditscheiner, Ångström und Stefan[1]), welche sämtlich absolute Messungen ausgeführt haben, welche also die Werte a ihrer Gitter und α gemessen haben. Die von Stefan erhaltenen Werte sind nach einer andern Methode erhalten, welche derjenigen der Talbotschen Linien ähnlich ist, und welche wir im letzten Kapitel besprechen werden.

Die zweite Tabelle enthält die Messungen von Mascart und Esselbach, von denen die letztern nur relative sind. Esselbach nahm die Fraunhoferschen Werte für C und H als gegeben an, Mascart ging von dem von Fraunhofer gegebenen Werte für D aus, den er später durch direkte Messung verificierte.

Die Anordnung der Tabellen ist wohl ohne weiteres verständlich, nur in Betreff der Bezeichnung der Streifen sei bemerkt, dafs in der ersten Kolumne der ersten Tabelle die Bezeichnung nach Fraunhofer, in der zweiten nach Kirchhoff gegeben ist. In der zweiten Tabelle sind die Linien so be-

[1]) *Stefan*, Berichte der Wiener Akademie. LIII.

zeichnet, wie sie von Mascart und Esselbach bezeichnet sind. Die Wellenlängen sind sämtlich in zehntausendstel Millimeter gegeben.

Tabelle der Wellenlängen der hauptsächlichsten Strahlen im sichtbaren Spektrum.

Bezeichnung der Strahlen nach		Wellenlängen in $0^{mm},0001$ nach				
Fraunhofer	Kirchhoff	Fraunhofer	van der Willigen	Ditscheiner	Ångström	Stefan
A	404	—	7,609	—	7,604	—
a	505	—	7,189	—	7,183	—
B	593	6,878	6,871	6,883	6,867	6,873
C	694	6,564	6,565	6,571	6,562	6,578
D_1	1002,8	5,888	5,898	5,905	5,895	5,893
D_2	1006,8		5,892	5,899	5,889	
E	1523	5,265	5,272	5,278	5,269	5,271
b_1	1634	—	5,186	5,192	5,183	—
b_2	1648,8	—	5,175	5,181	5,172	—
F	2080,1	4,851	4,864	4,868	4,860	4,869
$H\gamma$	2797	—	4,342	4,346	4,340	—
G	2854,7	4,292	4,311	4,317	4,307	4,291
H_1	—	3,945	3,971	3,974	3,968	3,959
H_2	—		3,938	3,940	3,933	

Die Fraunhoferschen Zahlen sind das Mittel aus den drei sehr wenig von einander verschiedenen Angaben Fraunhofers. $H\gamma$ ist die dritte Linie des Wasserstoffspektrums, dessen beide ersten mit *C* und *F* zusammenfallen.

Tabelle der Wellenlängen im unsichtbaren Teile des Spektrums.

Bezeichnung der Strahlen	Wellenlängen in $0^{mm},0001$	
	Esselbach	Mascart
B	6,874	6,867
C	6,564	6,561
D	5,886	5,891
E	5,260	5,268
F	4,845	4,860
G	4,287	4,307
H	3,929	3,967
L	3,791	3,819
M	3,657	3,729
N	3,498	3,580
O	3,360	3,440
P	3,290	3,360
Q	3,232	3,286
R	3,091	3,177

Von O ab stimmen die Zahlen nicht besonders überein, es scheint fast, als wenn Mascart als O einen zwischen N und O nach Esselbach liegenden Streifen genommen, und dann das Esselbachsche O als P u. s. f. bezeichnet hat.

Schliefslich mögen noch die ebenfalls vielfach benutzten Wellenlängen des Lithiumlichtes, rot, und des Thalliumlichtes, grün, angegeben werden, wie sie Ketteler[1]) mit Zngrundelegung der Fraunhoferschen Zahl für D erhielt. Ketteler benutzte dazu die Newtonschen Ringe bei grofsen Gangunterschieden, wie sie Fizeau zuerst dargestellt hat; er beleuchtete eine der Fizeauschen ähnliche Vorrichtung gleichzeitig mit Lithium- und Natriumlicht oder mit Thallium- und Natriumlicht, und zählte die Anzahl der verschieden gefärbten Ringe, welche zwischen je zwei Koincidenzen lagen, das heifst zwischen zwei Stellen, wo die verschieden gefärbten Ringe auf einander fielen. Die Wellenlängen verhalten sich dann nmgekehrt wie die Anzahl der Ringe zwischen je zwei Koincidenzen. In dieser Weise erhielt Ketteler für die Verhältnisse

$$\frac{\lambda_L}{L_N} = 1{,}138\,953; \quad \frac{\lambda_N}{\lambda_{Th}} = 1{,}101\,570$$

und daraus

$$\lambda_L = 6{,}706; \quad \lambda_{Th} = 5{,}345.$$

Zweites Kapitel.

Die Polarisation des Lichtes.

§ 78.

Polarisation des Lichtes. Bei den bisher beschriebenen Erscheinungen der Reflexion und Brechung, sowie bei denen der Interferenz und Beugung des Lichtes nahmen wir an, dafs die Richtung und Intensität der verschiedenen Teile, in welche an irgend einer Stelle das ankommende Licht zerlegt wird, nur abhängig seien von der Richtung, in welcher das Licht an jener Teilungsstelle, also z. B. an der brechenden Fläche ankommt. Ebenso nahmen wir an, dafs die Resultierende bei der Interferenz jener Teile des ankommenden Lichtes nur abhängig sei von der Wegedifferenz der Strahlen oder der Phasendifferenz, welche ihnen auf diesen Wegen erteilt ist. Dadurch wird angenommen, dafs ein Lichtstrahl in keiner Beziehung zum Raume stehe, ausgenommen diejenige, durch welche seine Fortpflanzungsrichtung bestimmt ist; dafs der Lichtstrahl rings um seine Fortpflanzungsrichtung sich ganz gleichmäfsig verhalte, so zwar, dafs eine Drehung des Strahles um die Richtung der Fortpflanzung als Axe durchaus keine Änderung in den Lichterscheinungen veranlasse. Es gibt jedoch eine Anzahl von Fällen, wo eine solche Drehung des Strahles die Lichterscheinungen ändert.

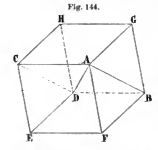
[1]) *Ketteler,* Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.

Unter gewissen Verhältnissen gebrochen oder reflektiert ändern sich die Lichterscheinungen, wenn man den Strahl um seine Fortpflanzungsrichtung als Axe dreht; in der einen Lage reflektiert oder gebrochen, wird er es nicht, wenn man ihn um 90° dreht. Man nennt das so modificierte Licht polarisiert.

Der Erste, welcher ein verschiedenes Verhalten der Lichtstrahlen bei einer Drehung derselben um sich selbst als Axe beobachtete, war Huyghens[1]). Er fand, dafs ein durch einen isländischen Doppelspath hindurchgegangener Lichtstrahl im allgemeinen in zwei Lichtstrahlen von gleicher Intensität geteilt werde, aufser wenn der Lichtstrahl parallel der Richtung der krystallographischen Hauptaxe hindurchtritt. Läfst man einen der beiden aus dem Krystall austretenden Strahlen nenerdings auf einen Kalkspathkrystall fallen, so zeigt sich, dafs der Lichtstrahl auch dann noch im allgemeinen in zwei zerlegt wird, dafs aber die beiden Strahlen eine verschiedene Intensität haben, und dafs es jetzt, wie auch die Neigung des durchtretenden Strahles gegen die krystallographische Hauptaxe des zweiten Krystalles ist, immer zwei Lagen des letztern gibt, in welchen einer der beiden Strahlen verschwindet, in welchen also der auf den Krystall auftreffende Strahl durch den Krystall hindurchtritt ohne in zwei zerlegt zn werden. Achtet man auf die relative Lage der beiden Krystalle, so zeigt sich dabei eine innige Beziehung zwischen einer gewissen durch den Lichtstrahl gelegten Ebene und einer bestimmten Ebene des Krystalles.

Der Kalkspath (kohlensaurer Kalk) findet sich in der Natur in der Gestalt von klaren Krystallen, welche eine parallelepipedische Form haben. Die Seitenflächen dieser Krystalle sind Parallelogramme (Fig. 144), deren stumpfe Winkel 101° 53′ und deren spitze Winkel 78° 5′ betragen. Weil die Flächen Strukturflächen sind, nach welchen der Krystall vollkommen spaltbar ist, so kann man durch Spaltung leicht ein Rhomboeder (Fig. 144) herstellen, ein von 6 Rhomben mit den angegebenen Winkeln begrenztes Parallelepiped. Das Rhomboeder ist eine Hemiedrie der doppelt sechsseitigen Pyramide, und die Hauptaxe geht durch die beiden Ecken A nnd D, in welchen drei stumpfe Winkel zusammenstofsen. Legt man daher durch die kurzen Diagonalen zweier gegenüberstehender Rhomben z. B. $AFBG$ und $CEDH$ eine Ebene, so nimmt diese die Axe des Krystalles AD in sich anf. Eine solche Ebene, sowie alle mit ihr parallelen, nennt man einen Hauptschnitt des Krystalles. Alle diese Ebenen nehmen die Hauptaxe des Krystalles in sich auf, denn diese ist in optischer Beziehung keine bestimmte durch den Krystall gehende Linie, sondern nnr eine Richtung, welche durch die Richtung der krystallographischen Hauptaxe AD bestimmt ist. Deshalb sind ebenso auch Ebenen, welche durch $AHDF$ oder $AEGD$ gelegt sind, überhaupt alle, welche der Richtung AD parallel sind, Hauptschnitte des Krystalles. Wir bezeichnen in optischer Beziehung vorzüglich die Ebene als Hauptschnitt, welche durch

Fig. 144.



[1]) *Huyghens*, Traité de la lumière. Leiden 1690.

das Einfallslot des eintretenden Lichtstrahles und die Axe, das heifst also durch eine der Richtung AD parallele Richtung, gelegt ist.

In Bezug auf die Ebene des Hauptschnittes und die Richtung der Hauptaxe lassen sich die Erscheinungen am Krystall am besten fixieren. Alle parallel der Axe AD durch den Krystall hindurchgehenden Strahlen werden nicht doppelt gebrochen. Schleifen wir daher an den Krystall zwei Endflächen senkrecht zu AD, und lassen senkrecht zu diesen Ebenen ein Lichtbündel durch den Krystall hindurchgehen, so wird es nicht in zwei zerlegt.

Lassen wir aber auf die natürlichen Grenzflächen des Krystalles, und zwar der Einfachheit wegen unter senkrechter Incidenz, ein Lichtbündel fallen, so zerfällt es bei seinem Eintritte in den Krystall in zwei. Das eine geht den Brechungsgesetzen gemäfs ungebrochen durch den Krystall hindurch, wir wollen es das ordentlich gebrochene nennen; das andere wird abgelenkt und zwar im Hauptschnitt gegen seine ursprüngliche Richtung verschoben. Die Gröfse der Verschiebung hängt ab von der Dicke des Krystalles; das austretende Lichtbündel ist dem eintretenden parallel. Wir nennen das zweite Bündel das aufserordentlich gebrochene Bündel.

Mit den Erscheinungen der Doppelbrechung werden wir uns später beschäftigen; hier betrachten wir nur die Eigenschaften des durch den Krystall getretenen Lichtes.

Lassen wir den ordentlichen Strahl, der also dem gewöhnlichen Brechungsgesetze folgt, auf ein zweites Kalkspathrhomboeder fallen, so zwar, dafs er auch dort wieder auf eine natürliche Fläche mit senkrechter Incidenz auffällt, so zeigt sich das durch den ersten Krystall hindurchgegangene Licht von dem einfallenden wesentlich verschieden. Liegt der zweite Krystall so, dafs sein Hauptschnitt dem des ersten parallel ist, so wird das auf den zweiten Krystall fallende Licht nicht geteilt, es geht einfach und ungebrochen den gewöhnlichen Brechungsgesetzen gemäfs hindurch. Drehen wir aber den zweiten Krystall um den einfallenden Lichtstrahl als Axe, so dafs nach und nach der Hauptschnitt desselben mit dem Hauptschnitt des ersten Krystalles immer gröfsere Winkel bildet, so zeigen sich nach dem Durchtritt des Lichtes durch den zweiten Krystall wieder zwei Strahlen: ein ordentlich und ein aufserordentlich gebrochener Strahl; der im Hauptschnitt verschobene aufserordentliche Strahl ist aber von geringer Helligkeit, so lange der Winkel, den die beiden Hauptschnitte mit einander bilden, nur klein ist. Mit dem Wachsen des Winkels nimmt die Helligkeit des aufserordentlichen Strahles zu, des ordentlichen ab, und beide Strahlen haben gleiche Helligkeit, wenn der Winkel der beiden Hauptschnitte 45^0 beträgt. Wird der Winkel noch gröfser, so überwiegt die Helligkeit des aufserordentlichen Strahles; und ist er ein Rechter geworden, stehen die beiden Ebenen senkrecht auf einander, so verschwindet der ordentliche Strahl ganz und der aufserordentliche hat eine Helligkeit, welche derjenigen des ordentlichen gleich ist, welche er bei paralleler Stellung der Hauptschnitte zeigte. Bei weiterer Drehung treten wieder zwei Strahlen auf; der verschobene Strahl nimmt an Helligkeit ab, der ordentliche nicht verschobene nimmt zu, bei 135^0 haben beide Strahlen gleiche Helligkeit, und bilden die beiden Ebenen einen Winkel von 180^0, d. h. stehen sie wieder parallel, so tritt der ordentliche nicht verschobene Strahl wieder allein auf. Bei weiterer Drehung von

180° bis 360°, bis der Krystall wieder seine erste Stellung einnimmt, wiederholen sich die Erscheinungen genau auf dieselbe Weise.

Lassen wir anstatt des ordentlichen den im ersten Kalkspath aufserordentlich gebrochenen, also im Hauptschnitt verschobenen Strahl durch den zweiten Krystall hindurchgehen, so sind die sich zeigenden Erscheinungen den vorigen ganz ähnlich. Sind die beiden Hauptschnitte parallel oder senkrecht, so erscheint nur ein Bild, in allen übrigen Lagen zwei Bilder, welche, aufser wenn die Hauptschnitte einen Winkel von 45° mit einander bilden, eine ungleiche Helligkeit besitzen. Der Unterschied zwischen diesen und den vorigen Erscheinungen ist nur der, dafs bei paralleler Stellung der Hauptschnitte im zweiten Krystalle nicht wie vorher das ordentliche, sondern das aufserordentliche, verschobene, Bild auftritt; erst bei einer Drehung tritt das ordentliche Bild auf, nimmt an Helligkeit zu und ist bei einer Drehung von 90° allein vorhanden. Drehen wir von da an weiter, so sind die sich jetzt darbietenden Erscheinungen genau dieselben, als wenn wir bei Anwendung des ordentlichen Strahles von der Parallelstellung der Hauptschnitte ausgehen. Es treten also in diesem Falle die mit den vorigen identischen Lichterscheinungen auf, wenn wir von einer Stellung ausgehen, bei welcher die Krystalle ursprünglich um 90° gegen einander gedreht sind.

Bei Anwendung des ordentlichen aus dem ersten Kalkspathe austretenden Strahles zeigt also der ordentliche aus dem zweiten Krystalle austretende Strahl folgendes. Bei paralleler Stellung der Hauptschnitte ist er fast ebenso hell als das auf den zweiten Krystall auffallende Licht; bei einer Drehung der Hauptschnitte nimmt seine Intensität immer mehr und mehr ab, und stehen die Hauptschnitte senkrecht auf einander, so ist seine Intensität gleich 0, es tritt kein ordentlicher Strahl aus dem zweiten Krystalle aus. Es zeigt sich somit, dafs das aus dem ersten Krystalle hervortretende Licht in demselben eine bestimmte Veränderung erfahren hat, welche es von dem einfallenden Licht unterscheidet. Dieselbe besteht darin, dafs das Licht nicht unter allen Umständen im zweiten Krystall in zwei Strahlen zerfällt und nur unter ganz bestimmten in zwei Strahlen gleicher Intensität. Man nennt daher das aus dem Krystall austretende Licht polarisiert.

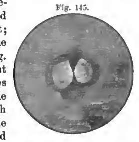
Die Modifikation läfst sich am besten dahin charakterisieren, dafs das polarisierte Licht nicht rings um die Fortpflanzungsrichtung sich gleich verhält, sondern dafs an ihm sich jetzt ein Rechts oder Links von einem Oben und Unten unterscheiden läfst. Denken wir uns durch den aus dem ersten Krystall austretenden Strahl eine dem ersten Hauptschnitte parallele Ebene gelegt, so können wir diese Ebene als für den Strahl charakteristisch betrachten. Ist der zweite Hauptschnitt mit dieser durch den Strahl gelegten festen Ebene parallel, so geht das Licht als ordentlicher Strahl durch den zweiten Krystall; bildet der Hauptschnitt mit dieser durch den polarisierten Strahl gelegten festen Ebene einen Winkel, so kann der Strahl immer weniger als ordentlicher durch den zweiten Krystall hindurchgehen, und steht er senkrecht zu jener festen Ebene, so kann der polarisierte Strahl gar nicht als ordentlich gebrochener durch den zweiten Krystall hindurchtreten. In Bezug auf diese feste Ebene verhält sich der Strahl ferner ganz symmetrisch; denn sobald der zweite Hauptschnitt mit dieser Ebene denselben Winkel bildet, sei es, dafs er nach der einen oder nach der andern Seite gedreht sei, ist die Intensität des aus dem zweiten Krystall aus-

tretenden ordentlichen Strahles immer dieselbe. Wir nennen daher diese Ebene die Polarisationsebene des Strahles, und den aus dem ersten Krystall austretenden ordentlichen Strahl im Hauptschnitte polarisiert.

Auch der aufserordentliche aus dem ersten Krystall austretende Strahl ist polarisiert, aber jene charakteristische Ebene, mit welcher der zweite Hauptschnitt parallel sein mufs, damit der Strahl ungeschwächt als ordentlicher durch den zweiten Krystall hindurchgehen kann, steht zu derjenigen im ordentlichen Strahle senkrecht; denn der zweite Hauptschnitt mufs zu dem ersten Hauptschnitte senkrecht stehen, wenn der aus dem ersten Krystall austretende aufserordentliche Strahl als ordentlicher durch den zweiten Krystall hindurchtreten soll. Der aus dem ersten Kalkspath austretende aufserordentliche Strahl ist demnach der angenommenen Bezeichnung gemäfs in einer Ebene polarisiert, welche senkrecht ist zum Hauptschnitt des Krystalles, also auch senkrecht zur Polarisationsebene des ordentlichen Strahles. Man nennt daher diesen Strahl senkrecht zum Hauptschnitte des ersten Krystalles polarisiert.

Aus diesen Thatsachen folgt somit, dafs das auf einen Kalkspath fallende und in denselben eindringende Licht in zwei Strahlen zerlegt wird, welche senkrecht zu einander polarisiert sind. Das polarisierte Licht unterscheidet sich für das Auge kaum merkbar von dem unpolarisierten gewöhnlichen Lichte; nur bei sehr genauer Beobachtung läfst sich mit dem Auge direkt schon polarisiertes Licht erkennen, wie zuerst Haidinger[1]) gefunden hat. Sieht man durch einen Polarisationsapparat, etwa einen Kalkspath, dessen aufserordentlichen Strahl man abblendet, nach einer hellen Wolke, so sieht man im Fixationspunkt eine eigentümliche Figur, die von Haidinger sogenannten Polarisationsbüschel. Fig. 145 zeigt dieselben nach der Zeichnung von Helmholtz[2]), wenn die Polarisationsebene vertikal ist. Parallel der Polarisationsebene erscheint eine gelblich gefärbte 8, welche dunkler ist als die Umgebung, und deren schmalste Stelle im Fixationspunkt liegt; senkrecht zu dieser sieht man ähnlich geformt eine bläuliche Figur, welche heller ist als die Umgebung. Die Erscheinung dauert nur wenige Sekunden, sieht man länger bei ruhiger Haltung des Kalkspathes nach der Wolke, so verschwindet sie bald; um sie wieder hervorzurufen, hat man dann den Kalkspath um das einfallende Licht als Axe zu drehen. Die Erscheinung ist wenig markiert, und deshalb wird sie häufig übersehen; hat man sie aber einmal wahrgenommen, so sieht man sie leicht wieder. Mir erscheint die gelblich gefärbte dunkle 8 viel deutlicher als die bläuliche hellere, so dafs die Zeichnung nach meinem Auge etwas anders sein würde als nach Helmholtz, der vertikale Teil müfste dunkler, der horizontale weniger hell sein.

Fig. 145.



Wegen der kurzen Dauer dieser Erscheinung und der daraus ent-

---

[1]) *Haidinger,* Poggend. Annal. Bd. LXIII, LXVII, LXVIII, LXXXV, XCI, XCIII, XCVI.

[2]) *Helmholtz,* Physiol. Optik. p. 421. Man sehe dort auch die Erklärung der Büschel aus dem Baue der Netzhaut.

springenden Unsicherheit der Beobachtung mufs man das polarisierte Licht, um es als solches zu erkennen, mit einem Apparate untersuchen, welcher dem natürlichen Lichte selbst Polarisation erteilt. Mit dem Kalkspathe untersucht, zerfällt das natürliche Licht stets in Bündel gleicher Helligkeit, wie man sich leicht überzeugt, und wie Malus durch photometrische Vergleichungen überdies nachwies. Polarisiertes Licht zerfällt dagegen in zwei Bündel verschiedener Helligkeit, aufser wenn der Hauptschnitt des zweiten Kalkspathes mit der Polarisationsebene des Strahles einen Winkel von 45° bildet. Durch photometrische Vergleichung des ordentlich und des aufserordentlich gebrochenen Bündels fand Malus[1]), dafs sich die Intensitätsänderung beider durch folgendes einfache Gesetz darstellen liefs. Ist J^2 die Intensität des auf den Kalkspath fallenden polarisierten Lichtes, und bildet der Hauptschnitt desselben mit der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes den Winkel α, so ist die Intensität des ordentlich gebrochenen Strahles J^2_o gleich

$$J^2_o = J^2 . \cos^2 \alpha,$$

diejenige des aufserordentlich gebrochenen Bündels J^2_e aber

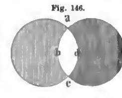
$$J^2_e = J^2 \sin^2 \alpha.$$

Es ist schwierig, durch direkte photometrische Messung dieses Gesetz nachzuweisen, für die jedenfalls sehr angenäherte Richtigkeit kann man aber einen Beleg auf sehr einfache Weise erhalten. Aus demselben folgt nämlich, dafs die Summe der Intensitäten des ordentlich und aufserordentlich gebrochenen Strahles konstant, und gleich der Intensität des in den Kalkspath eintretenden Lichtes sein mufs, denn

$$J^2_o + J^2_e = J^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J^2.$$

Wendet man als zweiten Kalkspath einen Krystall von geringer Dicke an, so fallen die beiden Lichtbündel, welche aus dem Krystall austreten, nur zum Teil auseinander. Hat das aus dem ersten Krystall austretende Lichtbündel einen kreisförmigen Querschnitt, so erscheinen auf einem hinter dem zweiten Kalkspath aufgestellten Schirme zwei kreisförmige helle Flecke, welche, wenn der Krystall keine zu grofse Dicke hat, zum Teil wie in Fig. 146 über einander fallen. Der eine dieser Kreise ist das ordentliche, der andere das aufserordentliche Bild des den Krystall durchsetzenden Strahlenbündels; dort, wo sie sich decken, in *abcd*, erscheinen auf dem Schirme beide Bündel zugleich, diese Stelle besitzt also die Summe der Helligkeiten der einzelnen Bündel. Welches nun auch die Stellung des Hauptschnittes zur Polarisationsebene des in den Krystall eindringenden Strahlenbündels ist, diese Stelle hat immer die gleiche Helligkeit; die Helligkeit dieses Fleckes ist zugleich nur wenig von der verschieden, welche sich zeigt, wenn das polarisierte Lichtbündel direkt den Schirm beleuchtet und ist gleich der, welche der eine dieser Kreise, z. B. das ordentliche Bild zeigt, wenn der Hauptschnitt der

Fig. 146.



[1]) *Malus*, Théorie de la double réfraction. Paris 1810. Man sehe über dieses Gesetz: § 104 und *Wild*, Poggend. Annal. Bd. CXVIII. p. 222 ff.

Polarisationsebene parallel ist. Der Unterschied in der Helligkeit des Fleckes *abcd* und des hellen Kreises, der auf dem Schirme erscheint, wenn das polarisierte Lichtbündel ohne Zwischensetzung des Kalkspathes denselben beleuchtet, rührt her von der geringen Menge des am Kalkspath reflektierten und in demselben absorbierten Lichtes.

Die Summe der Intensitäten des durch einen Kalkspath von unpolarisiertem Lichte erzeugten ordentlichen und aufserordentlichen Strahles ist ebenfalls bis auf diesen Unterschied gleich der Intensität des einfallenden unpolarisierten Lichtes. Daraus folgt der für das Verständnis der Polarisationserscheinungen wichtige Satz, dafs durch die Polarisation nicht ein Teil des einfallenden Lichtes fortgenommen wird, sondern dafs der Kalkspath das durchtretende Licht nur in zwei zu einander senkrecht polarisierte Strahlenbündel zerlegt.

§ 79.

Erklärung der Polarisation; Querschwingungen. Der Name polarisiertes Licht rührt her von der Vorstellung, welche Malus nach der Emissionstheorie von dem Wesen desselben bildete. Er nahm an, dafs die Moleküle in einem unpolarisierten Strahle alle möglichen, in einem polarisierten Strahle dagegen nur eine bestimmte Richtung haben könnten. Der Akt der Polarisation bestand dann eben in der Gleichrichtung der Moleküle. Die Undulationstheorie hat diesen einmal eingeführten Namen beibehalten.

Das Phänomen der Polarisation galt lange Zeit für die Undulationstheorie als unerklärlich, und dieses war es, was Newton[1]) bestimmte, der Huyghensschen Theorie entgegen die Emissionstheorie aufrecht zu erhalten. Diese Unerklärlichkeit besteht aber nur so lange, als man über die Richtung der das Licht erzeugenden Ätherschwingungen eine falsche Annahme machte.

So lange man annahm, die Lichterscheinungen seien longitudinale, war allerdings der Akt der Polarisation sowie der Zustand des polarisierten Lichtes absolut unverständlich, denn dann ist keine Modifikation denkbar, durch welche eine Seite des Strahles von der andern verschieden sein sollte, dann mufs der Strahl rings nach allen Seiten sich ganz gleich verhalten.

Anders jedoch, wenn wir annehmen, dafs die Schwingungen des Äthers gegen den Lichtstrahl geneigt seien. Es ist leicht ersichtlich, dafs der Lichtstrahl dann eine bestimmte Seitlichkeit haben kann; wir haben nur anzunehmen, dafs die Schwingungen des Äthers in einer bestimmten durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebene vor sich gehen. Diese oder eine zu ihr senkrechte Ebene wird dann vor allen übrigen Ebenen ausgezeichnet sein, indem die schwingenden Ätherteilchen in der einen fortwährend bleiben, von der andern dagegen sich abwechselnd nach der einen oder andern Richtung entfernen.

Eine dieser beiden Ebenen wird die Polarisationsebene sein, welche, das läfst sich hier und bis jetzt überhaupt nicht entscheiden, so dafs wir nicht entscheiden können, ob im polarisierten Lichte die Vibrationen des Äthers in der Polarisationsebene oder zu ihr senkrecht erfolgen.

[1]) *Newton,* Optice liber III. quaestio 29.



Anch ein nicht polarisierter Lichtstrahl, ein solcher ohne alle Seitlichkeit läfst sich mit der Annahme von Schwingungen, welche gegen die Fortpflanzungsrichtung geneigt sind, verstehen. In dem natürlichen Lichte werden die Schwingungen des Äthers nach allen dnrch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebenen vor sich gehen, und zwar in sehr kurzer Zeitfolge nach allen in ganz gleichem Mafse. In einem solchen Strahle kann es keine Seitlichkeit gehen; denn in jeder durch den Strahl gelegten Ebene wird sich der Äther eine Zeitlang hin und her hewegen, und eine unmefsbar kleine Zeit später sich von derselben ahwechselnd nach der einen, ahwechselnd nach der andern Richtung entfernen.

Der Akt der Polarisation hestände dann darin, dafs die im natürlichen Lichte nach allen Richtungen ohne Unterschied vor sich gehenden Oscillationen nach zwei zu einander senkrechten Richtungen zerlegt werden. Durch den Doppelspath würde dann nnr Licht hindurchdringen können, welches entweder im Hauptschnitte oder senkrecht zu demselben seine Schwingungen vollführt. Die ankommenden Schwingungen, nach welcher Richtung sie auch geschehen, werden dann in zwei zu einander senkrechte Komponenten zerlegt, deren eine im Hauptschnitt ihre Schwingungen vollführt, die andere dazn senkrecht ist, und welche sich getrennt dnrch den Krystall fortpflanzen.

Sehr hald, nachdem Malus durch seine glänzenden Entdeckungen wieder die Aufmerksamkeit der Physiker auf die Erscheinungen der Polarisation gelenkt hatte, nahmen die Begründer der neueren Undnlationstheorie die Hypothese der seitlichen Schwingungen an. Young hatte das Princip der Interferenz, Fresnel die Gesetze der Lichtbeugung noch unter Annahme longitndinaler Schwingungen entwickelt, jetzt kamen beide unahhängig von einander anf die Annahme seitlicher Schwingungen[1]), also zn der Annahme, dafs im polarisierten Lichte die Schwingungen des Äthers zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht seien. Polarisiertes Licht ist nach dieser Annahme demnach solches, hei dem der ganzen Länge der Strahlen nach die Vibrationen einander parallel, also in einer dnrch den Strahl gelegten Ehene und zwar senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes vor sich gehen.

Fresnel fügte die weitere Annahme hinzn[2]), dafs im polarisierten Lichte die Schwingungen senkrecht gegen jene Ebene geschehen, welche wir die Polarisationsebene genannt hahen. Die Schwingungen des Äthers im ordentlich gehrochenen durch den Kalkspath tretenden Strahl, dessen Polarisationsebene, wie wir sahen, der Hanptschnitt des Krystalles ist, geschehen nach dieser Annahme senkrecht znm Hanptschnitte, die des aufserordentlich gehrochenen senkrecht znm Hanptschnitt polarisierten Strahles im Hauptschnitt.

Diese letztere Annahme von Fresnel hat indes nicht allgemeine Annahme gefunden, sie heruht auf einer ganz speciellen Voranssetzung über die Natur des Äthers in doppelbrechenden Krystallen. Ihr gegenüher hat Nenmann die Hypothese aufgestellt, dafs die experimentell bestimmte Polarisationsebene die Ehene sei, in der die Schwingungen des Äthers im

---

[1]) *Fresnel*, Mémoires de l'Acad. royale de France. T. VII. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

[2]) *Fresnel* a. a. O., P. A. XXIII. p. 387.

polarisierten Lichte erfolgen[1]), darauf geführt durch eine etwas andere Anschauung über die Beschaffenheit des Äthers in den doppelbrechenden Krystallen. Bei Annahme der ältern Dispersionstheorie, welche den Grund der in verschiedenen Medien vorhandenen Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, also den Grund der Brechung und Reflexion nur in verschiedener Dichtigkeit oder verschiedener Elasticität des Äthers sah, liefs sich nicht entscheiden, welche von diesen beiden Annahmen die richtige sei, da jede der beiden alle optischen Erscheinungen gleich gut erklärte. Man mufste nur mit der Fresnelschen Anschauung die Annahme verbinden, dafs die Ursache der Brechung und Reflexion des Lichtes die verschiedene Dichtigkeit des Äthers in den verschiedenen Medien ist, während man mit der Neumannschen Hypothese die Annahme verbinden mufs, dafs die Dichtigkeit des Äthers in allen Medien dieselbe, aber die Elasticität eine verschiedene ist, und zwar so, dafs sie in den stärker brechenden Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit geringer ist, die kleinere ist.

Die neuere Dispersionstheorie, welche die Ursache der Brechung in dem Mitschwingen der Körpermoleküle sieht, während sie annimmt, dafs die Elasticität und Dichtigkeit des Äthers überall die gleiche ist, führt dagegen, wie wir nachher bei der Theorie der Reflexion sehen werden, darauf, dafs die Schwingungen des polarisierten Lichtes senkrecht zu der experimentell bestimmten Polarisationsebene erfolgen, sie führt also zu der ältern Fresnelschen Annahme.

Auf die verschiedenen Versuche experimentell über die Frage zu entscheiden[2]), gehen wir nicht ein, da, wie vorhin bemerkt wurde, kein einziger einwurfsfrei ist.

§ 80.

Experimenteller Nachweis der Querschwingungen. Die Annahme, dafs das polarisierte Licht aus Schwingungen bestehe, welche zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht sind, war zunächst eine Hypo-

---

[1]) *Neumann*, Poggend. Annal. Bd. XXV. p. 451.
[2]) *Nörremberg*, Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. 7. Aufl. Bd. I. p. 810.
Haidinger, Poggend. Annal. Bd. LXXXVI u. XCVI.
Ångström, Poggend. Annal. Bd. XC.
Stokes, Cambridge Philosophical Transactions. Bd. IX.
Fr. Eisenlohr, Poggend. Annal. Bd. CIV.
Lorenz, Poggend. Annal. Bd. CXI u. CXIV.
Mascart, Comptes Rendus. T. LXIII. p. 1005.
Lallemand, Comptes Rendus. T. LXIX. p. 189 u. 282. p. 917.
Cauchy, Moigno Repertoire d'Optique moderne. T. I.
folgern aus Versuchen oder theoretischen Entwicklungen die Annahme Fresnels.
Babinet, Comptes Rendus. T. XXIX. p. 514.
Holtzmann, Poggend. Annal. Bd. XCIX.
Jamin, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. LIX.
Quincke, Poggend. Annal. Bd. CXVIII
leiten aus ihren Versuchen die Annahme Neumanns als die richtige ab. Die Einwürfe gegen die frühern Versuche gibt kurz Quincke an; dafs Quinckes Versuch nicht beweisend ist, geht aus dessen spätern eigenen Versuchen hervor, auf welche wir demnächst noch zurückkommen. Quinckes Beweisführung beruht nämlich auf der Voraussetzung, dafs die Reflexion in der geometrischen Grenze zweier Medien stattfinde, während seine spätern Versuche beweisen, dafs bei jeder Reflexion ein Eindringen des Lichts in das zweite Medium stattfindet.

these, welche der ursprünglichen Theorie, dafs das Licht aus Schwingungen des Äthers bestehe, hinzugefügt wurde, um die Polarisation des Lichtes verstehen zu können. Bald indes gelangte Fresnel in Gemeinschaft mit Arago dahin, experimentell den Nachweis zu führen, dafs, wenn überhaupt das Licht in einer vibrierenden Bewegung des Äthers bestehe, die Schwingungen nur transversale sein könnten, dafs also die Annahme derselben nicht eine neue der ursprünglichen Theorie hinzugefügte Hypothese sei, sondern eine notwendige Folge aus dem einen obersten Grundsatze, dafs das Licht eine schwingende Bewegung sei, und aus den beobachteten Thatsachen. Diese Thatsachen sind die Interferenzerscheinungen des polarisierten Lichtes, welche Fresnel und Arago in den vier nach ihnen benannten Gesetzen aussprachen[1]). Die beiden ersten dieser Gesetze liegen dem Beweise der Querschwingungen zu Grunde. Dieselben sind:

1) Zwei polarisierte Lichtstrahlen, deren Polarisationsebenen einander parallel sind, interferieren wie gewöhnliches Licht.

2) Zwei polarisierte Lichtstrahlen, deren Polarisationsebenen zu einander senkrecht sind, interferieren gar nicht. Sie geben immer dieselbe Intensität bei ihrem Zusammenwirken, die Phasendifferenz mag sein, welche sie will.

Diese beiden Gesetze wurden von Fresnel und Arago im Jahre 1816 entdeckt; der Nachweis derselben ist auf verschiedenste Weise zu führen. Der einfachste ist folgender. Zwischen die Lichtlinie und die Spiegel beim Fresnelschen Spiegelversuch bringt man einen Kalkspathkrystall, und läfst von den beiden den Krystall verlassenden Strahlenkegeln nur den einen, entweder den ordentlich gebrochenen oder den aufserordentlich gebrochenen auf die Spiegelkombination fallen. Auf einem in der früher angegebenen Weise vor den Spiegeln aufgestellten Schirme erscheinen dann die Interferenzstreifen gerade so wie im gewöhnlichen unpolarisierten Lichte.

Um das zweite Gesetz nachzuweisen, wandten die beiden Physiker einen Turmalinkrystall an. Derselbe besitzt, wie der Kalkspath, die Eigenschaft, das in ihn eintretende Licht in zwei zu einander senkrecht polarisierte Strahlen zu zerlegen; hat dabei aber die Eigentümlichkeit, von diesen beiden nur einen, nämlich den aufserordentlich gebrochenen Strahl hindurch zu lassen.

Man erhält also durch eine Turmalinplatte nur einen polarisierten Lichtstrahl. Der Turmalin krystallisiert wie der Kalkspath im hexagonalen System; der aus demselben austretende Strahl ist senkrecht zur Axe des Krystalles polarisiert. Aus einer Platte, deren Flächen einander und der Axe des Krystalles parallel sind, schneidet man zwei gleiche Stücke heraus. Man bringt diese beiden Stücke dann vor zwei enge Öffnungen, durch welche man Licht in ein dunkles Zimmer dringen läfst. Wenn die Platten so vor den Öffnungen angebracht sind, dafs die Krystallaxen auf einander senkrecht stehen, wodurch auch die Polarisationsebenen der durch die beiden hindurchgehenden Strahlen zu einander senkrecht werden, so interferieren die durch beide Öffnungen dringenden Strahlen nicht, es treten nur die jeder einzelnen Öffnung angehörigen Beugungserscheinungen auf. Sobald aber die Platten etwas gedreht werden, so dafs die Axen nicht mehr zu einander senkrecht sind, treten auch wieder die Interferenzstreifen auf,

[1]) *Fresnel* u. *Arago,* Annales de chim. et de phys. Bd. X.

welche von der Einwirkung der durch die verschiedenen Öffnungen eintretenden Strahlen auf einander herrühren.

„Dieser Versuch lehrt, sagt Fresnel[1]), dafs zwei Lichtbündel, die nach unter sich rechtwinkligen Ebenen polarisiert sind, bei ihrer Vereinigung Licht geben von gleicher Intensität, wie viel auch der Unterschied in den Wegen betrage, die sie von ihrer gemeinschaftlichen Quelle an durchlaufen haben. Aus dieser Thatsache folgt notwendig, dafs in den beiden Lichtbündeln die Vibrationen gegen einander und gegen die Richtung der Strahlen senkrecht sind."

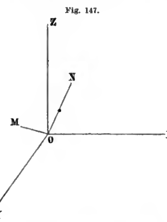


Fig. 147.

Es läfst sich das leicht mit Hülfe der im dritten Abschnitt des ersten Teiles entwickelten Sätze über die Zusammensetzung schwingender Bewegungen nachweisen.

Legen wir, um den Beweis zu führen, durch die den beiden Strahlen gemeinsame Fortpflanzungsrichtung OX (Fig. 147) ein dreiaxiges rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Axe X mit der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen zusammenfällt, dessen Axen Y und Z dazu senkrecht sind. Nun soll ferner die Richtung, in welcher die Teilchen oscillieren, bei dem einen Strahle OM mit den Axen die Winkel bilden $MOX = \alpha$, $MOY = \beta$, $MOZ = \gamma$, bei dem zweiten Strahle ON die Winkel $NOX = \alpha'$, $NOY = \beta'$, $NOZ = \gamma'$.

Seien die Gleichungen der beiden Strahlen

$$V = A \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \qquad V' = B \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

so erhalten wir die nach den drei Axen gerichteten Komponenten der Verschiebungen für den ersten Strahl durch

$$C_x \ldots\ldots A \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$C_y \ldots\ldots A \cdot \cos\beta \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$C_z \ldots\ldots A \cdot \cos\gamma \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

und, für den zweiten Strahl dem entsprechend,

$$C_x \ldots\ldots B \cdot \cos\alpha' \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$C_y \ldots\ldots B \cdot \cos\beta' \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$C_z \ldots\ldots B \cdot \cos\gamma' \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

[1]) *Fresnel*, Mémoires de l'Acad. royale de France. T. VII. Poggend. Annal. Bd. XXIII. Oeuvres complètes. T. I.

Nach dem Interferenzgesetze ist die resultierende Verschiebung nach jeder der drei Axen infolge des Zusammenwirkens der beiden Strahlen einfach die algebraische Summe der Verschiebungen der einzelnen Strahlen.

Nennen wir die der X-Axe parallele resultierende Verschiebung X, so ist

$$X = A \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + B \cdot \cos\alpha' \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Wir können wie früher diese Summe auf die Form bringen

$$X = D_x \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda}\right)$$

und erhalten als resultierende Amplitude

$$D_x^2 = A^2 \cos^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha' + 2AB \cdot \cos\alpha \cos\alpha' \cdot \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Führen wir dieselben Rechnungen für die Komponenten der Verschiebung nach den andern Axen durch, so erhalten wir ganz entsprechende Ausdrücke für die Amplituden der nach diesen gerichteten Verschiebungen, nämlich

$$D_y^2 = A^2 \cdot \cos^2\beta + B^2 \cos^2\beta' + 2AB \cdot \cos\beta \cos\beta' \cdot \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

$$D_z^2 = A^2 \cdot \cos^2\gamma + B^2 \cdot \cos^2\gamma' + 2AB \cdot \cos\gamma \cos\gamma' \cdot \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Diese drei nach den Richtungen der Axen stattfindenden Verschiebungen setzen sich zu einer Gesamtresultierenden zusammen, deren Amplitude nach § 9 p. 66 des ersten Bandes erhalten wird aus der Gleichung

$$R^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Es ist somit

$$R^2 = A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + B^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') + $$
$$+ 2AB \cdot \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}(\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma').$$

Nach einem Satze aus der analytischen Geometrie des Raumes ist die Summe der Quadrate der Cosinus der drei Winkel, welche eine Richtung mit den drei Koordinatenaxen bildet, immer gleich 1, somit ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

und deshalb

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cdot \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}(\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' \cdot \cos\gamma \cdot \cos\gamma').$$

Nach dem zweiten der angeführten Gesetze ist die durch das Zusammenwirken zweier nach der gleichen Richtung sich fortpflanzender senkrecht zu einander polarisierter Strahlen resultierende Intensität unabhängig von der Phasendifferenz der interferierenden Strahlen. Es mufs daher

$$R^2 = \text{const.}$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn in dem Ausdrucke für R^2 das von der Phasendifferenz δ abhängige Glied gleich 0 ist, welchen Wert auch

δ haben mag. Da A und B jedenfalls von 0 verschieden sind, so kann das nur dadurch möglich sein, dafs

$$\cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma' = 0.$$

In der analytischen Geometrie des Raumes wird bewiesen, dafs en Summe dieser drei Produkte gleich dem Cosinus des Winkels ist, welch die beiden Richtungen mit einander einschliefsen, die mit den Axen die Winkel α, β, γ resp. α', β', γ' bilden, also gleich dem Cosinus des Winkels MON, den die beiden Schwingungsrichtungen mit einander bilden. Da dieser Cosinus gleich 0 ist, so folgt, dafs der Winkel $MON = 90^0$ ist, oder dafs die Schwingungsrichtungen der beiden senkrecht zu einander polarisierten Strahlen stets zu einander senkrecht sind.

Daraus und aus dem ersten Gesetze folgt auch, dafs die Schwingungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sind. Denn eine Drehung der Polarisationsebene eines der beiden Strahlen bewirkt, dafs die aus ihrer Interferenz resultierende Intensität von der Phasendifferenz wieder abhängig ist. Dann ist deshalb

$$\cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma' \gtrless 0,$$

oder der Winkel, den die Schwingungsrichtungen mit einander bilden, ist kleiner wie ein Rechter.

Daraus folgt zunächst, dafs in keinem Strahle die Schwingungen longitudinal erfolgen können, da dann eine Drehung der Polarisationsebene keine Änderung des Winkels MON zur Folge haben könnte.

Drehen wir aber die Polarisationsebene um 90^0, so ist nach dem ersten Gesetze

$$\cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma' = 1,$$

also

$$\sphericalangle\, MON = 0.$$

Denn nach dem ersten Gesetze interferieren parallel polarisierte Lichtstrahlen wie gewöhnliches Licht und für dieses wird nach dem vorigen Kapitel die resultierende Amplitude bestimmt durch

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \,.\, \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Wären die Schwingungsrichtungen der beiden Strahlen nur senkrecht zu einander, ohne es zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes zu sein, so würde eine Drehung des einen um die Fortpflanzungsrichtung um 90^0 nicht bewirken können, dafs die Schwingungsrichtungen zusammenfielen. Sie würden zwar in einer Ebene liegen, aber in dieser einen gewissen Winkel mit einander bilden müssen.

Es folgt somit aus diesen beiden Gesetzen, dafs im polarisierten Lichte nur Schwingungen vorhanden sein können, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sind, und weiter, da die in senkrecht zu einander polarisierten Strahlen vorhandenen Vibrationen immer senkrecht zu einander sind, dafs in jedem die sämtlichen Schwingungen einander parallel sind, also in einer durch den Strahl gelegten Ebene geschehen. Nach unserer Annahme ist diese Ebene senkrecht zur Polarisationsebene.

Wenn im polarisierten Lichte nur solche Schwingungen vorhanden

sind, welche zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht sind, so mufs für das unpolarisierte Licht dasselbe gelten[1]). Denn wenn ein Bündel gewöhnlichen Lichtes senkrecht auf einen Kalkspathkrystall fällt, wird er in zwei polarisierte Bündel zerlegt, welche keine longitudinalen Vibrationen mehr enthalten. Wären solche im einfallenden Lichte vorhanden gewesen, so müfsten sie vollständig zerstört sein.

Dies würde aber eine Verminderung der lebendigen Kraft der Ätherbewegung und folglich eine Schwächung des Lichtes zur Folge haben. Dem widerspricht aber die Erfahrung. Denn die beiden aus dem Krystall austretenden Bündel geben bei ihrer Vereinigung ein dem einfallenden an Intensität gleiches Licht, wenn man dazu die geringe am Krystall reflektierte Lichtmenge hinzunimmt. Dafs die longitudinalen Vibrationen in dieser Lichtmenge enthalten seien, kann man nicht annehmen, da dieses Licht durch einen zweiten Krystall gerade so polarisiert wird wie das Licht, welches den ersten Krystall durchstrahlt hat. Es folgt daraus, dafs auch das gewöhnliche unpolarisierte Licht nur Vibrationen enthält, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sind, oder dafs es aus einer Zusammenhäufung oder sehr raschen Anfeinanderfolge einer grofsen Menge nach allen Azimuthen polarisierter Wellensysteme besteht.

Diesen Schlufs hat Dove[2]) experimentell bestätigt. Wenn man nämlich eine grofse Menge von Elementarstrahlen, deren jeder nach einem bestimmten Azimuthe polarisiert ist, bei denen aber alle Azimuthe ganz gleichmäfsig vertreten sind, an einem Punkte zusammentreffen läfst, so darf der aus allen diesen Strahlen resultierende Strahl keine Spur von Polarisation zeigen.

Dove liefs in einen abgestumpften gläsernen Hohlkegel, dessen Seite unter einem Winkel von 35° gegen die Axe geneigt war, der Axe parallel ein Bündel Sonnenstrahlen fallen. In einem bestimmten Punkte unterhalb der Axe werden alle die rings von der glänzenden Kegelfläche reflektierten Strahlen vereinigt. Wie wir demnächst sehen werden, erteilt auch die Reflexion von einer Glasfläche, wenn das Licht gegen die reflektierende Fläche unter einem Winkel von 35° geneigt ist, dem reflektierten Lichte Polarisation, so zwar, dafs die Reflexionsebene die Polarisationsebene des reflektierten Lichtes ist. Wie in diesem Kegel Reflexionsebenen nach allen Azimuthen vorhanden sind, da eine Kreisfläche die sämtlichen Einfallslote des Kegelmantels darstellt, so sind auch die Polarisationsebenen des reflektierten Lichtes, deren jedem einzelnen reflektierten Strahle eine bestimmte zukommt, nach allen Azimuthen gerichtet. Demgemäfs zeigte das in der Axe des Kegels unterhalb vereinigte Licht keine Spur von Polarisation; es war also Dove gelungen, aus nur polarisierten Strahlen einen unpolarisierten Strahl herzustellen.

Noch auf eine andere Weise hat Dove[3]) gezeigt, dafs man das natürliche Licht als eine sehr rasche Aufeinanderfolge von nach allen Azimuthen polarisiertem Lichte betrachten kann. Er polarisierte ein Bündel Sonnenstrahlen durch einen Kalkspath und versetzte letztern in eine sehr rasche

[1]) *Fresnel* a. a. O. Poggend. Annal. Bd. XXIII. p. 387.
[2]) *Dove*, Farbenlehre. p. 103. Berlin 1853.
[3]) *Dove*, Poggend. Annal. Bd. LXXI.

gleichmäfsige Rotation. Der Hauptschnitt desselben erhielt dadurch in rascher Folge alle möglichen Lagen, die Polarisationsebene des ordentlichen Strahlenbündels, welche dem Hauptschnitte parallel ist, erhielt demnach ebenfalls in rascher Folge alle möglichen Lagen. Durch einen zweiten Kalkspath untersucht, zeigte das austretende Strahlenbündel auch keine Spur von Polarisation; in jeder Lage des zweiten Krystalles traten aus demselben zwei Bündel gleicher Intensität.

Aus allem dem folgt, dafs die Vorstellung, welche Fresnel von dem unpolarisierten Lichte gebildet hat, die richtige ist. Wir können dieselbe nach dem Vorgange dieses Physikers folgendermafsen weiter ausführen[1]).

Das in einem bestimmten Momente von einer gegebenen Lichtquelle ausfliefsende Licht hat eine bestimmte Polarisation, das heifst, die Ätherschwingungen geschehen nach einer bestimmten Richtung. In dem folgenden, dem ersten äufserst nahen Zeitmomente fliefst von der Lichtquelle ein Strahl aus, dessen Polarisationsebene gegen die des ersten geneigt ist; so folgen Strahlen auf Strahlen mit immer anderer Polarisationsrichtung, so dafs an einer bestimmten Stelle im fortgepflanzten Lichtstrahle, auch während der kleinsten mefsbaren Zeit, die Richtung der Schwingungen alle möglichen Azimuthe durchläuft[2]).

§ 81.

Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung. Das von Huyghens entdeckte Phänomen einer Zerlegung der Lichtschwingungen nach zwei zu einander senkrechten Ebenen, denn als solche können wir nach dem Vorigen die Polarisation des Lichtes betrachten, blieb trotz des Aufsehens, welches es anfangs erregte, mehr als 100 Jahre eine vereinzelte Thatsache. Erst im Jahre 1810 brachte Malus dasselbe zu gröfserer Bedeutung, als er bei seinen Untersuchungen über die Doppelbrechung die wichtige Thatsache auffand, dafs es noch andere Methoden gebe, um polarisiertes Licht zu erhalten[3]). Er zeigte nämlich, dafs, wenn Licht von einer Glas- oder Wasserfläche unter einem bestimmten Winkel reflektiert wurde, die reflektierten Strahlen alle die Eigenschaften erhalten, welche man bis dahin an dem durch einen Doppelspath hindurchgegangenen Lichte beobachtet hatte. Wenn die unter diesem Winkel reflektierten Strahlen von einem Kalkspathe aufgenommen wurden, waren die beiden denselben verlassenden Strahlen nicht von gleicher Intensität, und die Intensität beider Strahlen änderte sich je nach der Lage des Hauptschnittes des Krystalles zur Reflexionsebene. Fiel der Hauptschnitt mit der Reflexionsebene zusammen, so trat aus dem Kalkspath nur das ordentliche Bild, wurde der Krystall gedreht, so erschien auch der aufserordentliche Strahl, seine Intensität nahm zu, die des ordentlichen Strahles ab, und bildete der Haupt-

---

[1]) *Fresnel*, Annales de chim. et de phys. T. XVII. Poggend. Annal. Bd. XXII.

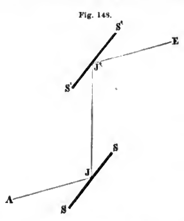
[2]) Man sehe über die Natur des unpolarisierten Lichtes auch *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 144 ff. *Lippich*, Berichte der Wiener Akademie. Bd. XLVIII. p. 146 ff. *Stefan*, Berichte der Wiener Akademie. Bd. L. p. 380 ff. *Verdet*, Annales de l'école normale. T. II. p. 291 ff.

[3]) *Malus*, Mémoires d'Arcueil. 2. p. 143.

schnitt mit der Reflexionsebene einen rechten Winkel, so zeigte sich nur der aufserordentliche Strahl. Das reflektierte Licht verhielt sich also gerade so, wie der ordentliche Strahl des durch einen Kalkspath hindurchgegangenen Lichtes, dessen Hauptschnitt parallel der Reflexionsebene ist. Das Licht ist somit in der Reflexionsebene polarisiert.

Wenn man das durch Reflexion an einer Glasfläche polarisierte Licht einer zweiten Reflexion aussetzt, so zeigen sich in dem zweimal reflektierten Lichte ähnliche Änderungen der Helligkeit, als wenn man von dem nach der Reflexion durch einen Kalkspath tretenden Lichte nur das ordentliche Bild betrachtet. Läfst man einen Lichtstrahl AJ auf einen Spiegel von Glas fallen, so dafs der Einfallswinkel ungefähr 55^0 beträgt, dann ist der reflektierte Strahl JJ' in der Einfallsebene polarisiert. Stellt man dem ersten einen zweiten Spiegel SS' parallel gegenüber, so dafs auch auf diesen der Strahl JJ' unter einem Winkel von circa 55^0 auftrifft, so wird der reflektierte Strahl $J'E$ an Intensität verschieden, je nach der Lage der Reflexionsebene des zweiten Spiegels. Fallen beide Reflexionsebenen wie in Fig. 148 zusammen, so ist die Intensität des reflektierten Strahles $J'E$ am gröfsten. Dreht man den zweiten Spiegel $S'S'$ um den einfallenden Strahl JJ' als Axe, so dafs die Reflexionsebene dieses Spiegels mit derjenigen des ersten immer gröfsere Winkel bildet, so wird die Intensität des nach E reflektierten Strahles immer geringer und stehen die Reflexionsebenen der beiden Spiegel auf einander senkrecht, so wird gar kein Licht reflektiert.

Fig. 148.



Nach den Versuchen von Malus ist die Intensität des von dem zweiten Spiegel reflektierten Lichtes dem Quadrate des Cosinus desjenigen Winkels proportional, welchen die beiden Reflexionsebenen mit einander bilden. Oder ist die Intensität des reflektierten Lichtes J, wenn die beiden Ebenen wie in Fig. 148 parallel sind, so ist sie

$$J \, . \cos^2 \alpha,$$

wenn die beiden Ebenen einen Winkel α mit einander bilden. Dieses Gesetz ist eine notwendige Folge der entwickelten Beschaffenheit des polarisierten Lichtes und der Beobachtung, dafs unter dem angegebenen Winkel von einem Glasspiegel nur Licht reflektiert wird, welches parallel der Reflexionsebene polarisiert ist. Denn fällt auf den Spiegel Licht, welches nach einer Ebene polarisiert ist, welche mit der Reflexionsebene den Winkel α bildet, so kann nur jene Komponente der Schwingungen reflektiert werden, welche bei einer Zerlegung der Schwingungen des einfallenden Lichtes in eine zur Reflexionsebene senkrechte und eine zu ihr parallele Komponente senkrecht zur Reflexionsebene ist. Da die Schwingungen im einfallenden Lichte mit der zur Reflexionsebene senkrechten Ebene den Winkel α bilden, so ist jene Komponente proportional $\cos \alpha$. Die dem Quadrate der Ampli-

tuden proportionale Intensität des nach der Reflexionsebene polarisierten Lichtes, und daher auch die des reflektierten ist somit dem Quadrate des $\cos\alpha$ proportional.

Weiterhin zeigt Malus, dafs nicht nur Glas oder Wasser, sondern alle durchsichtigen Substanzen dem Lichte die gleiche Modifikation erteilen, dafs jedoch der Einfallswinkel, unter welchem dieses geschah, und den er den Polarisationswinkel nannte, für die verschiedenen Substanzen verschieden sei. Er war jedoch nicht imstande eine Beziehung zwischen dem Polarisationswinkel und den sonstigen optischen Eigenschaften der Mittel aufzufinden.

Diese Entdeckung war dem experimentellen Scharfsinne Brewsters vorbehalten[1]; in seiner auf dieses Ziel gerichteten Untersuchung fand er, dafs die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten des Mittels ist. Bezeichnen wir demnach den Polarisationswinkel mit p, den Brechungsexponenten des Mittels, dem er angehört, mit n, so ist

$$\tang p = n.$$

Bezeichnen wir den Brechungswinkel, wenn das Licht unter dem Polarisationswinkel auf die brechende Fläche trifft, mit p', so ist zugleich

$$\frac{\sin p}{\sin p'} = n,$$

somit

$$\frac{\sin p}{\sin p'} = \tang p = \frac{\sin p}{\cos p},$$

oder

$$\sin p' = \cos p,$$

das heifst, der Brechungswinkel ergänzt den Einfallswinkel zu einem Rechten. Daraus folgt weiter, dafs der Winkel, den der einfallende oder reflektierte Lichtstrahl mit der brechenden Fläche bildet, gleich ist dem Brechungswinkel, und derjenige, welchen der gebrochene Strahl mit der brechenden Fläche bildet, gleich ist dem Einfallswinkel, und daraus weiter, dafs der reflektierte Strahl senkrecht ist zu dem gebrochenen Strahle.

Wenn Licht unter einem andern als dem Polarisationswinkel eine reflektierende Fläche trifft, so zeigt sich auch das reflektierte Licht modificiert; es ist teilweise polarisiert. Läfst man nämlich einen so reflektierten Strahl auf eine zweite Fläche unter dem Polarisationswinkel auffallen, so besitzt der reflektierte Strahl die gröfste Intensität, wenn die beiden Einfallsebenen einander parallel sind, die kleinste, wenn sie zu einander senkrecht sind; indes verschwindet dann der reflektierte Strahl niemals vollständig. Dasselbe zeigt sich bei einer Untersuchung des so reflektierten Lichtes mit dem Kalkspath. Bei keiner Stellung des Hauptschnittes zur Reflexionsebene verschwindet eines der beiden Bilder ganz vollständig; indes, wenn der Hauptschnitt der Reflexionsebene parallel ist, besitzt das ordentliche, wenn er zu ihr senkrecht ist, das aufserordentliche die gröfste Intensität.

---

[1] *Brewster,* Philos. Transact. f. the year 1815. *Seebeck,* Poggend. Annal. Bd. XX.

Um die Erscheinungen der teilweisen Polarisation zu erklären, nimmt die Undulationstheorie an, dafs in dieser nicht alle Schwingungen einer Ebene parallel seien, sondern dafs nach einer Ebene nur mehr Schwingungen erfolgen als nach allen übrigen Ebenen.

Bei der Untersuchung des gebrochenen Lichtes fand Malus [1]), dafs auch dieses zum Teil polarisiert sei, dafs aber die Polarisationsebene nicht, wie beim reflektierten Lichte, der Einfallsebene parallel, sondern zu ihr senkrecht sei. Er erkannte, dafs beide in zu einander senkrechten Ebenen polarisierten Strahlen in innigster Beziehung zu einander stehen und sprach den Satz aus, dafs wenn auf irgend eine Weise aus natürlichem Lichte ein polarisierter Strahl entstehe, zugleich ein zweiter entstehen müsse, welcher zu dem ersten senkrecht polarisiert sei; ein Satz, welcher nach dem Bisherigen eine notwendige Folge der Undulationstheorie ist, und welchen Arago später genauer dahin aussprach, dafs die Mengen des polarisierten Lichtes in diesen beiden Strahlen, hier also im reflektierten und gebrochenen, absolut gleich seien.

Wenn ein in einer Glasplatte gebrochener und dadurch teilweise polarisierter Strahl auf eine zweite Glasplatte fällt, so wird seine Polarisation dadurch verstärkt. Dasselbe findet bei einer dritten, vierten, $n$ten Brechung statt, so dafs durch vielfache Brechungen ebenfalls vollständig polarisiertes Licht erhalten werden kann.

§ 82.

Theorie der Reflexion des polarisierten Lichtes nach Fresnel und Neumann. Die im vorigen Paragraphen mitgeteilten Beobachtungen von Malus und Brewster beziehen sich allerdings nur auf einen speciellen Fall der Reflexion, der zudem keineswegs häufig vorkommt; bei den meisten durchsichtigen Körpern zeigt sich vielmehr, dafs das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht unter keinem Einfallswinkel vollständig verschwindet, dafs somit das unter dem von Brewster als Polarisationswinkel bezeichneten Winkel reflektierte Licht nicht vollständig polarisiert, oder wie wir nachher zeigen werden, dafs es elliptisch polarisiert ist. Wir wollen indes zunächst diesen Specialfall ausführlicher betrachten und erst in einem spätern Paragraphen die Abweichungen besprechen, die sich bei der Reflexion an der grofsen Mehrzahl der Körper zeigt.

Die ersten Versuche, die Erscheinungen der Polarisation aus der Undulationstheorie abzuleiten, bezogen sich auch auf diesen einfachsten Fall, bei dem also die Reflexion unter dem Polarisationswinkel vollständig in der Einfallsebene polarisiertes Licht liefert. Obwohl die Grundlage der von Fresnel [2]) und Neumann [3]) gegebenen Ableitung, nämlich dafs es nur der Äther sei, welcher in den verschiedenen Medien die Lichtschwingungen fortpflanze und dafs die Absorption des Lichtes nichts mit der Brechung und Reflexion zu thun habe, nach § 22 ff. nicht mehr zulässig ist, so wollen wir

---

[1]) *Malus,* Mémoires de l'Institut 1810. p. 105. *Brewster,* Philos. Transact. f. the year 1816 and f. 1830.

[2]) *Fresnel,* Annales de chim. et de phys. Bd. XLVI. p. 225. Poggend. Annal. Bd. XXII. p. 90. Oeuvres complètes. T. I. p. 767.

[3]) *Neumann,* Poggend. Annal. Bd. XXV. p. 456.

doch des historischen Interesses wegen zunächst die Reflexionstheorie von Fresnel und Neumann kennen lernen. Wir werden dabei sofort den Nachweis liefern, dafs wir die Fresnelschen Principien ganz ebenso auch auf Grund der neuern Theorie der Brechung für solche Körper benutzen können, in denen der Absorptionskoefficient des Lichtes gleich null gesetzt werden kann, und gleichzeitig erkennen, dafs die neuere Theorie nur für solche Körper diesen einfachern Fall der Reflexion als möglich ergibt.

Fresnel nimmt an, dafs die Elasticität des Äthers in allen Medien die gleiche, die Dichtigkeit aber eine verschiedene sei. Bei zwei aneinander grenzenden Medien soll der Übergang von der Dichtigkeit des Äthers im ersten Medium zu derjenigen im zweiten Medium kein allmählicher sondern ein plötzlicher sein. Die Reflexion und Brechung findet in der Grenzschicht der beiden Medien statt, und diese Grenzschicht kann sowohl als die letzte des ersten Mittels wie auch als die erste des zweiten Mittels angesehen werden. Wenn an der Grenze zweier Mittel eine Wellenbewegung ankommt, so ist die vibrierende Bewegung der Moleküle in der Grenzschicht anzusehen als die letzte Bewegung in der einfallenden Welle, als die erste der reflektierten Welle, und da die Grenzschicht auch dem zweiten Medium angehört, als die erste Bewegung der gebrochenen Welle. Ist daher BC Fig. 149 eine an der Grenze zweier Mittel MN ankommende Lichtwelle, so werden die mit MN parallelen Komponenten der in derselben stattfindenden Vibrationen als zu den Schwingungen im ersten Mittel oder als zu denen im zweiten Mittel gehörig betrachtet werden können.

Fig. 149.

Daraus folgt, dafs die algebraische Summe der in der Grenzfläche stattfindenden Verschiebungen, jede natürlich mit ihrem Vorzeichen genommen, welche dem einfallenden und dem reflektierten Lichte angehören, gleich sein mufs der augenblicklichen Verschiebung, parallel der Grenzfläche in der gebrochenen Lichtwelle. Was aber von den augenblicklichen Verschiebungen gilt, das gilt auch von den Amplituden, so dafs wir ebenfalls behaupten können, dafs die Summe der der brechenden Fläche parallelen Komponenten der Amplituden der einfallenden und reflektierten Welle gleich sein mufs derselben Komponente der Amplitude in der gebrochenen Welle.

Fresnel glaubte diese Übereinstimmung der Verschiebungen auf die der Grenzfläche parallelen Komponenten der Bewegung beschränken zu müssen; indes ist dafür kein hinreichender Grund vorhanden, denn auch die zur Grenzfläche senkrechten Komponenten der in der Grenze stattfindenden Schwingungen gehören der einfallenden Welle als letzte, der reflektierten und gebrochenen Welle als erste Bewegung an. Für diese Komponenten können wir aber, wie Cornu[1]) zuerst nachgewiesen hat, nicht aus dieser Übereinstimmung folgern, dafs die algebraische Summe der dem ersten Mittel angehörigen Verschiebungen einfach gleich sein mufs den in der gebrochenen Welle stattfindenden Verschiebungen. Denn bei der von der Grenzfläche aus gegen das zweite Medium gerichteten Bewegung finden die

[1]) *Cornu,* Annales de chim. et de phys. 4. Sér. T. XI.

Schwingungen in einem Medium von anderer Dichte statt, es wird durch dieselben demnach eine andere Äthermasse in Bewegung gesetzt, als bei den Schwingungen im ersten Medium. Die Massen des im zweiten und ersten Medium bewegten Äthers verhalten sich hier direkt wie die Dichtigkeiten des Äthers im zweiten und ersten Mittel. Da die Schwingungsdauer in beiden Medien dieselbe ist, so müssen sich in jedem Momente die Geschwindigkeiten umgekehrt verhalten wie die bewegten Massen. Was aber von den Geschwindigkeiten gilt, das gilt auch von den Amplituden der Schwingungen, oder auch diese müssen sich umgekehrt verhalten wie die Dichtigkeiten des Äthers in beiden Medien. Anstatt also die Verschiebungen einfach gleich zu setzen, müssen wir vielmehr die Bedingung ausdrücken, dafs sie sich umgekehrt verhalten wie die Dichtigkeiten, oder wir haben zunächst das Produkt aus jeder Verschiebung und der Dichtigkeit des Mediums, in der sie stattfindet, das ist die Bewegungsgröfse der betreffenden Schwingungen zu bilden, und die Summe der Bewegungsgröfsen im ersten der Bewegungsgröfse im zweiten Medium gleich zu setzen.

Diese Sätze liefern uns sofort je nach der Richtung der Schwingungen verschiedene Gleichungen. Nehmen wir zunächst an, dafs das ankommende Licht parallel zur Einfallsebene polarisiert sei, so geschehen die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, somit parallel der brechenden Fläche. Ist die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich 1, die des gebrochenen gleich v, die des reflektierten gleich u, so ist dann

$$1 + u = v \ldots . \mathrm{I.}$$

Ist aber das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, so geschehen (Fig. 150) die Schwingungen im einfallenden Lichte parallel BC, im reflektierten parallel DE, im gebrochenen parallel DF; wir erhalten somit für jede eine der brechenden Fläche parallele und eine zu derselben senkrechte Komponente. Nennen wir den Einfallswinkel des Lichtes i, so ist auch der Reflexionswinkel des Lichtes i, oder da der reflektierte Strahl auf der andern Seite des Einfallslotes liegt, von dem aus der Einfallswinkel gerechnet ist, gleich $-i$. Die gleichen Winkel bilden auch die Schwingungsrichtungen mit der brechenden Fläche, die des einfallenden i, die des gebrochenen $-i$, denn die Schwingungsrichtungen sind ebenso zu den Lichtstrahlen senkrecht, wie die brechende Fläche zum Einfallslote, sie bilden also mit der brechenden Fläche den gleichen Winkel, wie die Strahlen mit dem Einfallslote.

Fig. 150.

Nennen wir den Brechungswinkel r, so ist auch der Winkel, den die Schwingungsrichtung im gebrochenen Licht mit der brechenden Fläche bildet, gleich r.

Die drei der brechenden Fläche parallelen Komponenten dieser Amplituden sind daher

$$\cos i; \quad u \cdot \cos(-i) = u \cdot \cos i; \quad v \cdot \cos r$$

und zwischen ihnen besteht die Gleichnng

$$(1 + u) \cos i = v \,.\, \cos r \,.\,.\,.\,.\,.\, \text{I a.}$$

Die zu der brechenden Fläche senkrechten Komponenten der Schwingungen erhalten wir, wenn wir die Amplituden mit den Sinus der betreffenden Winkel multiplicieren, sie sind

$$\sin i; \quad u \,.\, \sin(-i) = -u \,.\, \sin i; \quad v \,.\, \sin r.$$

Um die zwischen diesen Komponenten bestehende Beziehung zu erhalten, haben wir jede mit der Dichtigkeit des Äthers in den verschiedenen Medien zn multiplicieren; ist dieselbe im ersten Mittel gleich d, im zweiten Mittel gleich d', so erhalten wir als die gleichzusetzenden Bewegungsgröfsen

$$(1 - u) \sin i \,.\, d = v \,.\, \sin r \,.\, d',$$

oder

$$(1 - u) \cdot \sin i \cdot \frac{d}{d'} = v \,.\, \sin r \,.\,.\,.\,.\,.\, (\text{a}).$$

Das Verhältnis dieser beiden Dichtigkeiten erhalten wir aus den Brechungsexponenten. Denn wir erhalten für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes im ersten Medium

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}},$$

für jene im zweiten Medium, da nach der Fresnelschen Theorie die verschiedene Dichtigkeit des Äthers es ist, welche die Verschiedenheit der verschiedenen Medien bedingt, während die Elasticität dieselbe bleibt,

$$c' = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d'}},$$

somit

$$\frac{c^2}{c'^2} = n^2 = \frac{d'}{d} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}$$

und damit wird die Gleichung (a)

$$(1 - u) \sin r = v \,.\, \sin i \,.\,.\,.\,.\, \text{I b.}$$

Diese für die Grenze nachgewiesene Beziehung zwischen den Amplituden der Wellen im ersten und zweiten Medinm mufs auch aufserhalb der Grenzfläche bestehen; denn wir nehmen an, dafs die Lichtwellen eben seien oder dafs nnsere Lichtbündel cylindrisch seien. Bei Fortpflanzung des Lichtes wird daher in jedem folgenden Zeitmomente nur die gleiche Menge von Ätherteilchen in Vibration versetzt; die Amplitnden müssen daher nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kraft konstant sein.

Wir können daher die Gleichungen I oder Ia und Ib znr Berechnung der reflektierten und gebrochenen Amplituden benntzen. Zur Berechnung der Amplitnden u und v, wenn das Licht senkrecht znr Einfallsebene polarisiert ist, reichen die Gleichungen Ia und Ib aus; wir erhalten darans dnrch Elimination von v

$$(1 + u) \frac{\cos i}{\cos r} = (1 - u) \frac{\sin r}{\sin i}$$

$$u (\sin i \,.\, \cos i + \sin r \cos r) = - \{\sin i \cos i - \sin r \cos r\}$$

$$u = -\frac{\sin i \cos i - \sin r \cos r}{\sin i \,.\, \cos i + \sin r \cos r}$$

und daraus nach einigen leicht zu übersehenden Umfermungen

$$u = -\frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)} \dots \text{B.}$$

Für die Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisiert reflektierten Lichtes folgt daraus

$$u^2 = \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}.$$

Zur Bestimmung der reflektierten Amplitude, im Falle das Licht parallel der Einfallsebene polarisiert ist, reicht die Gleichung I nicht aus, da wir in derselben noch eine zweite Unbekannte, nämlich v haben. Wir bedürfen deshalb noch einer zweiten Relation zwischen 1, u und v.

Wir gelangen zu derselben mit Hülfe des Princips von der Erhaltung der lebendigen Kraft in einem System bewegter Punkte, in welchem die Bewegungen nur Folge innerer zwischen den Punkten thätiger Kräfte sind.

Nach diesem Princip mufs nämlich die lebendige Kraft der einfallenden Lichtwelle gleich sein der Summe der lebendigen Kräfte der reflektierten und gebrochenen Lichtwelle, das heifst, es mufs das Produkt aus dem Quadrate der Oscillationsgeschwindigkeit oder der ihr proportionalen Oscillationsamplitude und der gleichzeitig in der einfallenden Welle und in den beiden andern Wellen bewegten Äthermengen gleich sein. Während die einfallende Welle sich von BC bis BD Fig. 150 fortpflanzt, dehnt sich die reflektierte von BD nach DE, die gebrochene von BD nach DF aus. Das Produkt aus dem Quadrate der Amplitude und der in dem prismatischen Raume BDC eingeschlossenen Äthermenge mufs demnach gleich sein der Summe des Produktes aus dem Quadrate der Amplitude des reflektierten Lichtes und der in BDE, und des Produktes aus dem Quadrate der Amplitude des gebrochenen Lichtes und der in dem Raume BDF eingeschlossenen Äthermengen. Nennen wir die drei Mengen m, m', μ, so mufs demnach

$$m = m' \,.\, u^2 + \mu \,.\, v^2.$$

Diese drei Äthermengen sind gleich den Produkten aus dem Volumen des bewegten Äthers und der Dichtigkeit des Äthers in den betreffenden Mitteln.

Welches auch die Gestalt der einfallenden Wellenebene sein mag, das Volumen des in dem Raume BCD bewegten Äthers können wir setzen

$$V = a \,.\, BC \,.\, DC = a \,.\, BC \,.\, BD \,.\, \sin i,$$

worin a eine von der Gestalt der Wellenebene, von der BC ein Durchschnitt ist, abhängige Konstante ist.

Ebenso erhalten wir für die beiden andern Volumina

$$V' = a \,.\, DE \,.\, BD \,.\, \sin i; \quad V'' = a \,.\, DF \,.\, BD \,.\, \sin r.$$

Wir haben weiter

$$BC = BD \,.\, \cos i; \quad DE = BD \,.\, \cos i; \quad DF = BD \,.\, \cos r.$$

Die drei gleichzeitig bewegten Äthervolumina verhalten sich also wie

$$\sin i \,.\, \cos i : \sin i \,.\, \cos i : \sin r \,.\, \cos r.$$

Um die Massen der in den drei Wellen bewegten Äthermengen zu erhalten, haben wir die Volumina mit den Dichtigkeiten des Äthers zu multiplicieren; diese sind, wie wir vorhin schon sahen,

$$d = \frac{C^2 \,.\, e}{c^2}, \quad d' = \frac{C^2 \,.\, e}{c'^2};$$

oder das Verhältnis der Dichtigkeiten ist

$$\frac{d'}{d} = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}.$$

Die in den drei Wellen gleichzeitig bewegten Äthermengen verhalten sich demnach zu einander wie die Quotienten

$$\frac{\sin i \,.\, \cos i}{\sin^2 i} : \frac{\sin i \,.\, \cos i}{\sin^2 i} : \frac{\sin r \,.\, \cos r}{\sin^2 r},$$

von denen die beiden ersten der im einfallenden und reflektierten Lichte gleichzeitig bewegten Äthermenge proportional sind, letzterer der in derselben Zeit im gebrochenen Licht bewegten Menge. Multiplicieren wir diese Ausdrücke mit den betreffenden Quadraten der Amplituden, so wird die aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft folgende Gleichung

$$m = m'u^2 + \mu \,.\, v^2,$$

$$\frac{\cos i}{\sin i} = \frac{\cos i}{\sin i} \cdot u^2 + \frac{\cos r}{\sin r} \cdot v^2,$$

oder

$$\frac{\cos i}{\sin i}\,(1 - u^2) = \frac{\cos r}{\sin r} \cdot v^2,$$

und daraus

$$\sin r \,.\, \cos i\,(1 - u^2) = \sin i \,.\, \cos r \,.\, v^2 \,\ldots\, \text{II}.$$

Die Gleichungen I und II setzen uns in den Stand, die reflektierte Amplitude für parallel der Einfallsebene polarisiertes Licht zu berechnen. Aus I

$$1 + u = v$$

und II folgt nämlich, indem wir die linke Seite von II durch $1 + u$, die rechte durch v dividieren, und dann rechts für v das ihm gleiche $1 + u$ einsetzen:

$$\sin r \,.\, \cos i\,(1 - u) = \sin i \,.\, \cos r\,(1 + u)$$

und daraus

$$-(\sin i \,.\, \cos r - \cos i \,.\, \sin r) = u\,(\sin i \,.\, \cos r + \cos i \,.\, \sin r)$$

$$u = -\frac{\sin i \,.\, \cos r - \cos i \,.\, \sin r}{\sin i \,.\, \cos r + \cos i \,.\, \sin r} = -\frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)} \,\ldots\, \text{A}.$$

Ist die Intensität des einfallenden Lichtes gleich 1, so ist diejenige des reflektierten Lichtes, da sich dasselbe in demselben Mittel fortpflanzt als das einfallende, gleich u^2 und somit

$$u^2 = \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}.$$

Neumann macht gegenüber Fresnel die Annahme, dafs die Dichtigkeit des Äthers in allen Medien dieselbe sei, und weiter, dafs das in der Einfallsebene polarisierte Licht in dieser Ebene schwinge.

Für eine unter dem Winkel i einfallende Welle erfolgen also auch die Schwingungen in einer Richtung, welche mit der Grenzfläche den Winkel i bildet. Ist r der Brechungswinkel, so erhalten wir zunächst für die der Grenzfläche parallelen Komponenten

$$(1 + u) \cdot \cos i = v \cdot \cos r,$$

also dieselbe Gleichung wie I a.

Die Gleichung I b wird aber eine andere; da nämlich im zweiten Mittel die Dichtigkeit dieselbe ist als im ersten, so haben wir jetzt für die zur Grenzfläche senkrechten Komponenten ebenfalls einfach die Gleichheit der Verschiebungen im ersten und zweiten Mittel. Denn bei der Gleichheit der bewegten Massen sind die Bewegungsgröfsen einfach den Verschiebungen proportional. Damit wird die Gleichung I b

$$(1 - u) \sin i = v \cdot \sin r.$$

Eliminieren wir aus beiden v und lösen nach u auf, so wird

$$u = \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}.$$

Senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht schwingt dann auch senkrecht zu dieser Ebene, seine Schwingungen sind also der Grenzfläche parallel. Wir erhalten demnach zwischen 1, u und v als erste Relation

$$1 + u = v.$$

Die zweite Relation liefert auch hier das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, das Produkt aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher in der einfallenden Welle der bewegte Äther die Gleichgewichtslage passiert, ist gleich der Summe dieser Produkte in der reflektierten und gebrochenen Welle. Die gleichzeitig bewegten Äthermassen verhalten sich aber nach dieser Auffassung direkt wie die bewegten Äthervolume, somit wie

$$\sin i \cos i : \sin i \cos i : \sin r \cos r,$$

und die Gleichung der lebendigen Kräfte wird

$$(1 - u^2) \sin i \cos i = v^2 \sin r \cos r.$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung v durch $1 + u$ und lösen nach u auf, so wird nach den passenden Reduktionen

$$u = \frac{\operatorname{tang} (i - r)}{\operatorname{tang} (i + r)}.$$

Die Ausdrücke unterscheiden sich von den Fresnelschen nur durch das Vorzeichen. Der Wechsel des Vorzeichens bedeutet, wie wir schon § 67 sahen, Verlust einer halben Wellenlänge; nach der Neumannschen Theorie tritt also bei der Reflexion an solchen Medien, bei denen $i > r$, also an optisch dichtern, keine Phasenänderung ein, während nach Fresnel bei diesen die Phasenänderung eintritt; dagegen tritt bei optisch weniger dichten Mitteln, wo $i < r$ ist, nach Neumann die Phasenänderung ein, nach Fresnel

dagegen nicht. Es gibt bisher kein Mittel, um über diese Alternative zu entscheiden; die Farben dünner Blättchen beweisen nur, dafs bei einer der Reflexionen, entweder am dichtern oder am weniger dichten Medium ein solcher Verlust eintritt, nicht aber bei welcher. Da im übrigen beide Ausdrücke für das in gleicher Weise polarisierte Licht ganz gleich sind, so sind in soweit beide Annahmen gleich zulässig.

Nach der in den §§ 22 und 23 vorgetragenen Theorie der Brechung des Lichtes ist es aber nicht nur der Äther, welcher in den brechenden Medien in Schwingung versetzt wird, sondern es nehmen die körperlichen Moleküle an den Bewegungen teil. Im allgemeinen ist, wie wir § 23 sahen, die Phase der Bewegung der körperlichen Moleküle eine andere als die des Äthers. Wenn auch nach dem Fresnelschen Princip die Bewegung in der Grenzfläche die letzte der einfallenden, die erste der reflektierten und gebrochenen ist, so kann man doch im allgemeinen die Fresnelsche Gleichung I und Ia nicht bilden, da die Bewegung in der Grenzfläche eine doppelte ist, die des Äthers und die der körperlichen Moleküle, und da die in der reflektierten und gebrochenen Welle sich fortpflanzenden Bewegungen, welche sowohl von den Schwingungen des Äthers als der körperlichen Moleküle in der Grenzfläche abhängig sind, im allgemeinen eine Phasendifferenz gegen die einfallenden Schwingungen erhalten müssen.

Für die Phasendifferenz $\psi = 2\pi\Delta$ der körperlichen Moleküle gegen die des Äthers erhielten wir § 23 (Gleichung 9, p. 128)

$$\tang \psi = \frac{\alpha \lambda}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

worin α der die Absorption des Lichtes bedingende Koefficient war. Findet in dem zweiten Medium gar keine Absorption statt, so ist $\alpha = 0$, somit $\tang \psi = 0$, und die Bewegung der körperlichen Moleküle hat genau dieselbe Phase wie die des Äthers. Dann ist in der That die Bewegung in der Grenze eine ebenso einfache wie nach der frühern Auffassung, oder für die Mittel, in denen gar keine Absorption stattfindet, gelten die Fresnelschen Gleichungen I und Ia auch jetzt noch.

Ganz ebenso ist auch das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, welches ganz allgemeine Gültigkeit hat, anwendbar, indes können wir dafür nicht ohne weiteres die Gleichung von Fresnel setzen. Die zu vergleichenden Volume der bewegten Massen sind selbstverständlich auch jetzt dieselben, indes können wir nicht, wie Fresnel es that, das Verhältnis der Dichtigkeit der bewegten Masse im zweiten Medium auf Grund des Ausdruckes für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einfach elastischen Medien gleich dem Quadrate des Brechungsexponenten setzen. Denn in dem zweiten Medium pflanzt sich die Bewegung nach unserer Theorie ebenfalls nur im Äther fort, von welchem wir sogar annehmen, dafs er die gleiche Elasticität und die gleiche Dichtigkeit habe als im freien Raum, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist aber eine andere, weil die Bewegung zum Theil an die körperlichen Moleküle übergeht. Wir können deshalb nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im zweiten Medium einfach der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Elasticität und der Dichtigkeit eines Mittels gleich setzen, und die sich dann ergebende Dichtigkeit für die des zweiten Mittels nehmen. Zur Bildung der Gleichung der lebendigen Kräfte müssen wir vielmehr für

die gebrochene Welle die Bewegung des Äthers und der körperlichen Moleküle gesondert einführen. Ist μ die Masse des in der Volumeinheit des freien Raumes vorhandenen Äthers, der nach den Annahmen des § 22 auch jene in der Volumeinheit des brechenden Mediums gleich ist, ist m die Masse der in der Volumeinheit des brechenden Mediums enthaltenen körperlichen Moleküle, und nennen wir v_1 die Amplitude der Schwingungen der körperlichen Moleküle, so wird die Gleichung der lebendigen Kräfte

$$\sin i \cos i \mu = \sin i \cos i \mu \,.\, u^2 + \sin r \cos r \mu v^2 + \sin r \cos r m v_1^2$$

$$1 - u^2 = \frac{\sin r \cos r}{\sin i \cos i} v^2 \left(1 + \frac{m}{\mu} \frac{v_1^2}{v^2}\right).$$

Den Wert des Klammerausdrucks der rechten Seite erhält man durch folgende Überlegung, welche ich der Mitteilung des Herrn Ketteler verdanke.

Es pflanze sich in dem zweiten Medium eine Welle fort, deren Wellenlänge λ, deren Schwingungsdauer gleich T und deren Amplitude für die Äthermoleküle v; für die körperlichen Moleküle v_1 sei. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Äthermoleküle die Gleichgewichtslage passieren, sei c_1, mit der die körperlichen Moleküle die Gleichgewichtslage passieren, sei c_2. Dann ist die in der Volumeinheit des Mediums durch die Schwingungen bewirkte lebendige Kraft

$$\tfrac{1}{2} \mu c_1^2 + \tfrac{1}{2} m c_2^2.$$

Wir denken uns jetzt im freien Äther eine identisch gleiche Verschiebung erregt, so dafs sich dort eine Welle von genau der gleichen Länge λ mit genau der gleichen Amplitude v fortpflanzt. Ist c_3 die Geschwindigkeit, mit welcher die Äthermoleküle die Gleichgewichtslage passieren, so ist die dort in der Volumeinheit vorhandene lebendige Kraft $\frac{1}{2} \mu c_3^2$. Da wir vorausgesetzt haben, dafs diese Welle durch eine identisch gleiche Verschiebung, also die identisch gleiche geleistete Arbeit erregt ist, welche auch die Welle in dem zweiten Medium erregt hat, so müssen die in den Volumeinheiten des freien Äthers und des Mediums vorhandenen lebendigen Kräfte dieselben sein, oder es mufs

$$\tfrac{1}{2}\mu c_1^2 + \tfrac{1}{2} m c_2^2 = \tfrac{1}{2}\mu c_3^2.$$

Die Gleichungen dieser drei Bewegungen können wir schreiben

$$y_1 = v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad y_2 = v_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_3 = v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

denn die Schwingungsdauer im freien Äther mufs eine andere sein als in dem Medium. Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im erstern g_1, in dem Medium dagegen g, so ist wegen der Beziehung zwischen Wellenlänge und Schwingungsdauer

$$\lambda = g T \qquad \lambda = g_1 T_1$$

$$T_1 = T \frac{g}{g_1} = T \frac{1}{n},$$

wenn n der Brechungsexponent der Wellenbewegung bei dem Übertritt aus dem freien Äther in das Medium ist, der nach dem Huyghensschen Princip immer gleich dem Quotienten aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in dem ersten und zweiten Medium ist. Da die Geschwindigkeiten, mit welchen die Moleküle die Gleichgewichtslage passieren, gleich $\frac{dy}{dt}$ ist, wenn der $\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 1$, so folgt weiter

$$c_1 = v\,\frac{2\pi}{T} \qquad c_2 = v_1\,\frac{2\pi}{T} \qquad c_3 = v\,\frac{2\pi}{T_1} = nv\,\frac{2\pi}{T}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung der lebendigen Kräfte, so wird

$$\mu v^2 + m v_1^2 = n^2 \mu v^2$$

$$1 + \frac{m}{\mu}\,\frac{v_1^2}{v^2} = n^2.$$

Wir haben demnach, um die lebendige Kraft in einem brechenden Medium zu erhalten, nur die Amplitude der Ätherbewegung mit dem Quadrate des Brechungsexponenten zu multiplicieren, oder dieselbe ergibt sich genau so wie nach der Berechnung von Fresnel, wie wenn das zweite Medium im Sinne Fresnels ein optisch dichteres und das Verhältnis der Dichtigkeiten gleich dem Quadrate des Brechungsexponenten wäre. Damit wird die Gleichung der lebendigen Kräfte die Gleichung II Fresnels

$$1 - u^2 = \frac{\sin r \cos r}{\sin i \cos i}\, n^2 v^2 = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i}\, v^2.$$

Wir erhalten somit für die Reflexion des polarisierten Lichtes an solchen Medien, in denen keine Absorption stattfindet, die Fresnelschen Gleichungen. Wir müssen demnach auch betreffs der Lage der Schwingungsebene die Fresnelsche Annahme machen, dieselbe ist senkrecht zur experimentell bestimmten Polarisationsebene.

Mit Hülfe der für die reflektierten Amplituden erhaltenen Werte können wir sofort in der Fresnelschen Theorie jene der gebrochenen Wellen berechnen. Für die Amplitude der Schwingungen v im gebrochenen Licht ergibt sich, im Falle das Licht der Einfallsebene parallel polarisiert ist, aus I und A

$$v = 1 + u = 1 - \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$$

oder nach leicht zu übersehenden Umformungen

$$v = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i + r)} \;\ldots\ldots\; \mathrm{C}.$$

Wenn das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, wird aus Ia und B

$$v = (1 + u)\,\frac{\cos i}{\cos r} = \left(1 - \frac{\sin i \cos i - \sin r \cos r}{\sin i \cos i + \sin r \cos r}\right)\frac{\cos i}{\cos r}$$

$$v = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin i \cos i + \sin r \cos r} \;\ldots\ldots\; \mathrm{D}.$$

Zur Berechnung der Intensität des gebrochenen Lichtes können wir in der Fresnelschen Theorie einen doppelten Weg einschlagen. Dieselbe ist

der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung gleich. Ist die Intensität des einfallenden Lichtes gleich 1 gesetzt, so ist die Intensität des gebrochenen gleich dem Verhältnis der lebendigen Kraft des gebrochenen zu derjenigen des einfallenden Lichtes. Wir können also v^2 mit dem Verhältnis der in beiden Wellen bewegten Massen multiplicieren. Diese Berechnungsweise ist nach der neuern Theorie nicht zulässig, da das zweite Mittel kein einfaches ist, somit v nicht als die Amplitude aller schwingenden Massen angesehen werden kann. Nach der Fresnelschen sowohl als nach der neuern Theorie können wir direkt die Gleichung der lebendigen Kräfte anwenden, nach welchem bezogen auf die Intensität des einfallenden Lichtes als Einheit die Intensität des gebrochenen Lichtes gleich $1 - u^2$ ist, das Resultat beider Berechnungsweisen ist nach den vorhin gegebenen Entwicklungen dasselbe.

Ist das Licht in der Einfallsebene polarisiert, so wird

$$J_d = 1 - u^2 = 1 - \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

$$J_d = \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)}.$$

Ist das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, so haben wir zur Berechnung der Intensität J'_d des gebrochenen Lichtes den für diesen Fall gefundenen Wert für u einzusetzen

$$J'_d = 1 - u^2 = 1 - \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)},$$

oder wenn wir den Wert von u vor seiner Umformung einsetzen

$$J'_d = 1 - \left(\frac{\sin i \cos i - \cos r \sin r}{\sin i \cos i + \cos r \sin r}\right)^2$$

$$J'_d = \frac{\sin 2i \sin 2r}{(\sin i \cos i + \sin r \cos r)^2}.$$

In allen diesen Ausdrücken können wir den Brechungswinkel eliminieren und die Amplituden und Intensitäten durch den Brechungsexponenten und Einfallswinkel ausdrücken. Für der Einfallsebene parallel polarisiertes Licht wird

$$u_p = -\frac{\sin i \cos r - \cos i \sin r}{\sin i \cos r + \cos i \sin r} = -\frac{n \cos r - \cos i}{n \cos r + \cos i}.$$

Darin ist

$$n \cos r = n \sqrt{1 - \sin^2 r} = n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 i}$$

$$n \cos r = \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

$$u_p = -\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i} \quad \ldots\ldots \text{Aa.}$$

Für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht ergibt sich aus der zuerst für u_s erhaltenen Form

$$u_s = -\frac{\sin i \cos i - \sin r \cos r}{\sin i \cos i + \sin r \cos r} = -\frac{n \cos i - \cos r}{n \cos i + \cos r}$$

$$u_s = -\frac{n^2 \cos i - n \cos r}{n^2 \cos i + n \cos r} = -\frac{n^2 \cos i - \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n^2 \cos i + \sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad \ldots\ldots \text{Ba.}$$

Für die Amplituden des gebrochenen Lichtes wird

$$v_p = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin i \cos r + \cos i \sin r} = \frac{2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i} \ldots\ldots \text{Ca}$$

$$v_s = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin i \cos i + \sin r \cos r} = \frac{2\, n \cos i}{n^2 \cos i + \sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \ldots\ldots \text{Da.}$$

Wenn das Licht anstatt parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert zu sein unter irgend einem Winkel α gegen dieselbe polarisiert ist, so kann man auch dafür nach den eben erhaltenen Gleichungen die Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichtes erhalten. Denn aus der Richtung der Polarisationsebene kennt man auch die Richtung der Schwingungsebene, welche zu jener senkrecht ist, kann also nach dem Satze vom Parallelogramm der Bewegungen die Komponenten berechnen, welche der Einfallsebene parallel, und welche zu ihr senkrecht sind.

Diese Komponenten werden nach den eben entwickelten Gesetzen reflektiert und gebrochen. Bildet die Polarisationsebene des Lichtes mit der Einfallsebene den Winkel α, und ist seine Amplitude gleich 1, so bildet die Schwingungsrichtung mit der Einfallsebene den Winkel $90^0 - \alpha$. Denn ist EE Fig. 151 die Einfallsebene, PP die Richtung der Polarisationsebene, so ist VV die Richtung der Schwingungen im einfallenden Lichte.

Fig. 151.

Die der Einfallsebene parallele Komponente der Schwingungen Vp ist demnach

$$Vp = \sin \alpha,$$

die zu derselben senkrechte

$$Vs = \cos \alpha.$$

Erstere ist zur Einfallsebene senkrecht, letztere ihr parallel polarisiert; um die reflektierten Amplituden zu erhalten, haben wir daher nur Vs mit (A) und Vp mit (B) zu multiplicieren, und wir erhalten

$$-\cos \alpha \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}, \quad -\sin \alpha \frac{\operatorname{tang} (i - r)}{\operatorname{tang} (i + r)}.$$

Die gesamte reflektierte Lichtintensität ist gleich der Summe der beiden reflektierten Teile, somit

$$J^2_{ar} = \cos^2 \alpha \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} + \sin^2 \alpha \frac{\operatorname{tang}^2 (i - r)}{\operatorname{tang}^2 (i + r)}.$$

In ganz gleicher Weise erhält man für die Intensität des gebrochenen Lichtes

$$J^2_{ad} = \cos^2 \alpha \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{\sin^2 (i + r)} + \sin^2 \alpha \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r)^2}.$$

Auch die Intensität des reflektierten Lichtes, wenn das einfallende Licht unpolarisiert ist, können wir auf dieselbe Weise erhalten. Das unpolarisierte Licht können wir betrachten als eine Gruppe von nach allen Richtungen polarisierten Strahlen. Führen wir daher für jeden der im

natürlichen Licht vorhandenen polarisierten Strahlen die Zerlegung in der eben angegebenen Weise aus, so werden wir ebenso viele und ebenso grofse Komponenten nach der einen wie nach der andern Richtung erhalten. Ist daher die Intensität des unpolarisiert einfallenden Lichtes gleich 1, so wird bei jener Zerlegung die Intensität des parallel der Einfallsebene polarisierten Lichtes sowohl als des senkrecht zu derselben polarisierten gleich $\frac{1}{2}$ sein. Wir können demnach soweit natürliches Licht darstellen durch zwei zu einander senkrecht polarisierte Strahlen, deren jeder die halbe Intensität des natürlichen Lichtes hat.

Jede dieser beiden Wellen wird nach den eben entwickelten Gesetzen reflektiert; die Intensität des parallel der Einfallsebene polarisiert reflektierten Lichtes ist daher

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

und des senkrecht zur Einfallsebene polarisiert reflektierten Lichtes

$$\frac{1}{2}\frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)};$$

die Intensität des gesamten reflektierten Lichtes darnach

$$J_R = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}\right\}.$$

Die Intensität J_D des gebrochenen Lichtes können wir direkt aus dem Satze erhalten, dafs

$$J_D = 1 - J_R$$

und bekommen dann

$$J_D = \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}\right)\right\},$$

ein Ausdruck, den wir auch aus den vorhin abgeleiteten Werten von J_d und J_d' hätten ableiten können, wenn wir die Intensität des gebrochenen Lichtes bestimmt hätten für die beiden Komponenten, in welche wir das einfallende natürliche Licht zerlegt hatten.

§ 83.

Folgerungen aus der Theorie der Reflexion an durchsichtigen Medien[1]. Eine Prüfung der Reflexionstheorie durch Messung und Vergleichung der Intensität des reflektierten mit derjenigen des einfallenden Lichtes ist wegen der Schwierigkeit genauer photometrischer Messungen nicht durchzuführen. Diese Prüfung ist indes in ganz anderer Weise möglich, indem wegen der verschiedenen Intensität der unter gleichem Winkel einfallenden parallel oder senkrecht zur Einfallsebene reflektierten Lichtmengen, im allgemeinen die Polarisationsebene des reflektierten Lichtes anders liegen mufs als diejenige des einfallenden Lichtes.

Als erste Folgerung ergeben sich aus der Reflexionstheorie die Beobachtungen von Brewster und Malus über die Polarisation des Lichtes

[1]) *Fresnel*, Annales de chim. et de phys. T. XLVI; Poggend. Annal. Bd. XXII. p. 90. Oeuvres complètes. T. I. p. 767 ff.

durcb Reflexion. Zunächst ergibt sich nämlich aus dieser Theorie, dafs nnter einem bestimmten Einfallswinkel natürliches Licht nacb der Reflexion vollständig in der Einfallsebene polarisiert sein mufs, und zwar, dafs dieser Einfallswinkel derjenige ist, dessen Tangente gleich ist dem Brechnngsexponenten. Fällt natürliches Licht auf eine dnrchsichtige Fläche, so können wir das reflektierte Licht ansehen als bestehend aus einem Anteile in der Einfallsebene polarisierten Lichtes nnd einem Anteile, welcher senkrecht zur Einfallsehene polarisiert ist. Ersterer Anteil ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

letzterer dagegen

$$\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}.$$

Das reflektierte Licht ist vollständig in der Einfallsebene polarisiert, wenn der letztere Anteil gleich 0 ist. Das ist znnächst der Fall, wenn

$$i-r=0,\quad i=r,$$

also der Einfallswinkel dem Brechungswinkel gleich ist, oder die optische Dichtigkeit des zweiten Mittels von derjenigen des ersten nicht verschieden ist. In dem Falle ist aber auch der erste Anteil gleich 0, oder es wird gar kein Licht reflektiert. Diese Theorie liefert also zunächst eine Bestätigung des früher scbon mehrfach von uns ausgesprochenen Satzes, dafs eine Wellenbewegung nur dann reflektiert wird, wenn sie an der Grenze zweier Mittel ankommt; dafs sie aber niemals in einem und demselben Mittel zurückkehrt.

Der zweite Anteil wird aber ebenfalls gleicb 0, wenn

$$i+r=90^0,$$

denn dann ist tang $(i+r)$ nnendlich grofs.

Dies ist das Brewstersche Gesetz, denn hieraus folgt sowohl, dafs die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten ist, wie auch, dafs in diesem Falle der reflektierte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht ist.

Wenn im Azimuth α polarisiertes Licht nnter dem Polarisationswinkel auf eine reflektierende Fläche fällt, so wird nur in der Einfallsebene polarisiertes Licht reflektiert; die Intensität desselben ist

$$\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

Diese Folgerung stellt das von Malus aus der Beobachtung abgeleitete Gesetz dar, nach welchem die Intensität des von dem zweiten Spiegel nnter dem Polarisationswinkel reflektierten Lichtes dem Quadrate des Cosinus des Winkels proportional ist, welchen die beiden Reflexionsebenen mit einander bilden.

Wenn Licht nnter einem andern Winkel als dem Polarisationswinkel auf eine reflektierende Fläcbe fällt, ist es teilweise polarisiert. Auch dies folgt aus der Fresnelschen Theorie. Denn die reflektierten Lichtmengen können wir, wie erwähnt, als zusammengesetzt betracbten aus zwei senkrecbt zu einander polarisierten Bündeln. Da das natürliche Licht dargestellt

werden kann durch zwei senkrecht zu einander polarisierte Bündel gleicher Intensität, wird uns die Differenz der beiden reflektierten Mengen

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}$$

den Überschufs des nach der Einfallsebene polarisierten Lichtes über das senkrecht zu derselben polarisierte Licht, oder die Menge des im reflektierten Licht vorhandenen polarisierten Lichtes geben.

Wir können obigen Ausdruck auch schreiben

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)\,.\,\cos^2(i+r)}{\sin^2(i+r)\,.\,\cos^2(i-r)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\left(1 - \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}\right).$$

Da der Quotient der beiden Cosinus immer kleiner als 1 ist, der Einfallswinkel mag einen Wert haben welchen er will, so folgt, dafs immer ein Überschufs des nach der Einfallsebene polarisierten Lichtes vorhanden ist, oder dafs das Licht teilweise nach der Einfallsebene polarisiert ist.

Wenn unter irgend einem Winkel natürliches Licht auf die reflektierende Fläche fällt oder irgendwie polarisiertes unter dem Polarisationswinkel, so ist das reflektierte Licht immer ganz oder teilweise nach der Einfallsebene polarisiert. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn unter irgend einem Azimuthe α polarisiertes Licht unter irgend einem Winkel i einfällt. Dann ist allerdings das reflektierte Licht wieder vollständig polarisiert, aber nicht nach der Einfallsebene, und auch nicht nach der frühern Richtung.

Wir sahen, wenn die Intensität 1 des nach dem Azimuthe α polarisierten Lichtes unter dem Winkel i reflektiert wird, so sind die reflektierten Intensitäten, welche polarisiert sind

parallel der Einfallsebene,	senkrecht zur Einfallsebene
$\cos^2\alpha\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$,	$\sin^2\alpha\,\frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}$.

Beide Wellensysteme haben denselben Weg durchlaufen, und beide sind in diesem Falle unter denselben Verhältnissen partiell reflektiert; durch die Reflexion kann also keine Phasendifferenz eingetreten sein, und in beiden treten daher immer an derselben Stelle des reflektierten Strahles zugleich die Maxima und Minima und überhaupt die sich entsprechenden Werte der Oscillationsgeschwindigkeiten ein. Die beiden Wellensysteme werden daher überall auf der ganzen Strecke des reflektierten Strahles nach § 130 des ersten Teiles sich zu ebenen Schwingungen, also zu einem vollständig polarisierten Strahle zusammensetzen. Ist Fig. 152 Op die der Einfallsebene EE parallel polarisierte Komponente der Amplitude des reflektierten Lichtes

$$Op = -\cos\alpha\cdot\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)},$$

und $Os = Tp$ die Amplitude der Komponente des reflektierten Lichtes, welches senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist,

$$Tp = -\sin\alpha\cdot\frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)},$$

so haben wir für die Tangente des Winkels β, den die Polarisationsebene des nach TO schwingenden reflektierten Strahles mit der Einfallsebene bildet,

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} TOp = \frac{Tp}{Op},$$

also

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{\operatorname{tang}(i-r) \,.\, \sin(i+r)}{\operatorname{tang}(i+r) \,.\, \sin(i-r)},$$

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}.$$

Der Winkel β, den die Polarisationsebene des unter dem Winkel i reflektierten Strahles mit der Einfallsebene bildet, ist im allgemeinen ein anderer als der Winkel, welchen die Polarisationsebene vor der Reflexion mit der Einfallsebene bildete. Da $\cos(i+r) < \cos(i-r)$, so folgt, dafs durch die Reflexion die Polarisationsebene der Reflexionsebene genähert wird. Die Drehung ist am gröfsten, wenn $i + r = 90^0$; dann ist, welchen Wert auch α gehabt hat,

Fig. 152.

$$\operatorname{tang} \beta = 0;$$

das Licht ist nach der Einfallsebene polarisiert. Dies ist also eine zweite Ableitung des Brewsterschen Gesetzes, somit dasselbe auch nach dieser Richtung hin eine Bestätigung der Theorie.

Ist i und somit r gleich 0, so wird

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha,$$

bei senkrechter Incidenz tritt gar keine Drehung der Polarisationsebeue ein.

Die Drehung der Polarisationsebene hat Fresnel zum Gegenstande einer experimentellen Untersuchung gemacht, seine sowie Brewsters Versuche[1]) waren eine Bestätigung dieses Gesetzes.

Nach den Versuchen von Malus ist auch das gebrochene Licht teilweise polarisiert, und zwar in einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene. Auch dieses zeigt die Fresnelsche Theorie, denn nach dieser erhalten wir für die im durchgehenden Lichte senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Lichtmenge

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{\sin^2(i+r)},$$

und dieser Ausdruck ist, wie nach einigen Umformungen erhalten wird, gleich

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{\cos^2(i-r)} \cdot \frac{1-\cos^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

und da

$$\sin 2i \,.\, \sin 2r = 4 \sin i \,.\, \cos i \,.\, \sin r \,.\, \cos r = \cos^2(i-r) - \cos^2(i+r),$$

[1]) *Fresnel*, Annales de chim. et de phys. XVII. Poggend. Annal. Bd. XXII. p. 88. *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XIX.

so erhalten wir für die senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Lichtmenge

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} \cdot \left(1 - \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}\right),$$

ein Ausdruck, der uns zugleich das Aragosche Gesetz gibt, nach welchem die Menge des im gebrochenen vorhandenen senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichtes genau gleich sein mufs der Menge des im reflektierten Licht vorhandenen parallel zur Einfallsebene polarisierten Lichtes.

Die Gleichungen für die Intensität des gebrochenen Lichtes zeigen weiter, dafs auch nach der Theorie durch eine einmalige Brechung nur teilweise polarisiertes Licht entstehen kann, denn es gibt keinen Wert von i, für welchen der eine Teil des gebrochenen Lichtes gleich 0 wird, also verschwindet.

Noch auf eine andere Weise läfst sich das ableiten, indem wir die Polarisationsebene des gebrochenen Strahles bestimmen, wenn der einfallende unter einem Winkel α gegen die Einfallsebene polarisiert ist.

Bezeichnen wir die Amplitude des gebrochenen Lichtes, welches parallel zur Einfallsebene polarisiert ist, mit D_p und die des senkrecht polarisierten mit D_s, so ist nach (C) und (D) des vorigen Paragraphen

$$D_p = \cos\alpha \cdot \frac{2\sin r \cdot \cos i}{\sin(i+r)}, \qquad D_s = \sin\alpha \frac{2\sin r \cdot \cos i}{\sin i \cdot \cos i + \sin r \cdot \cos r}.$$

Der Winkel γ, welchen die Polarisationsebene des gebrochenen Strahles mit der Einfallsebene bildet, ist wieder bestimmt durch

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{D_s}{D_p} = \operatorname{tang}\alpha \frac{\sin(i+r)}{\sin i \cdot \cos i + \sin r \cdot \cos r} = \operatorname{tang}\alpha \frac{1}{\cos(i-r)}.$$

Der Winkel i kann, wie man sieht, gar keinen Wert erhalten, durch welchen $\operatorname{tang}\gamma$ einen von $\operatorname{tang}\alpha$ unabhängigen Wert erhält, wie bei dem reflektierten Licht $\operatorname{tang}\beta$ für jeden Wert von α gleich 0 wurde, wenn $i + r = 90^\circ$ war. Es folgt somit, dafs es für das gebrochene Licht keinen Polarisationswinkel gibt, da kein Winkel i existiert, bei welchem die nach allen Azimuthen gerichteten Polarisationsebenen des einfallenden Lichtes durch die Brechung in eine bestimmte Ebene gedreht werden. Da indes stets

$$\cos(i-r) < 1,$$

so ist auch

$$\operatorname{tang}\gamma > \operatorname{tang}\alpha; \quad \gamma > \alpha,$$

die Polarisationsebene des Lichtes wird durch Brechung stets gedreht, und zwar so, dafs sie mit der Einfallsebene einen gröfsern Winkel bildet als vorher. Lassen wir daher natürliches Licht auf die brechende Fläche fallen, so werden alle Polarisationsebenen der zur Einfallsebene senkrechten Ebene genähert, das Licht wird demnach teilweise in einer Ebene polarisiert, welche zur Einfallsebene senkrecht ist.

Tritt das Licht aus dem zweiten Mittel durch eine neue Brechung wieder aus, so wird die Polarisationsebene nochmals gedreht. Beim Austritt ist r der Einfalls-, i der Brechungswinkel; der Winkel, den die Polarisationsebene nach der zweiten Brechung mit der Einfallsebene bildet, ist daher bestimmt durch

$$\tan \gamma_2 = \tan \gamma \frac{1}{\cos (r - i)},$$

$$\tan \gamma_2 = \tan \alpha \frac{1}{\cos^2 (i - r)}.$$

Lassen wir das Licht ein zweites brechendes Mittel derselben Brechbarkeit durchsetzen, so wird durch die zwei neuen Brechungen

$$\tan \gamma_4 = \tan \alpha \frac{1}{\cos^4 (i - r)}$$

und überhaupt nach n Brechungen

$$\tan \gamma_n = \tan \alpha \frac{1}{\cos^n (i - r)}.$$

Wenn i von 0 verschieden ist, und somit $\cos (i - r) < 1$ ist, so wird, wenn n einen hinlänglich grofsen Wert hat,

$$\cos^n (i - r) = 0,$$

somit

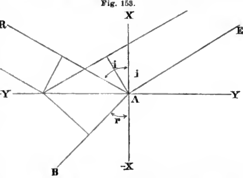
$$\tan \gamma_n = \infty \quad \gamma_n = 90^0.$$

Durch hinlänglich oft wiederholte Brechung wird also schliefslich das Licht ebenfalls vollständig polarisiert und zwar in einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene. Man wendet deshalb auch häufig als Polarisationsapparat eine Anzahl auf einander geschichteter planparalleler Glasplatten an, einen sogenannten Glassatz oder Glassäule; man läfst auf diese das Licht unter einem Winkel einfallen, der dem Polarisationswinkel des Glases nahe kommt. Die Thatsache, dafs sich auf diesem Wege linear polarisiertes Licht erhalten läfst, ist also eine neue Bestätigung der Fresnelschen Theorie.

§ 84.

Totale Reflexion. Elliptische und cirkulare Polarisation[1]). Eine äufserst interessante Bestätigung erhält die Fresnelsche Reflexionstheorie durch die Erscheinungen, welche uns das Licht bei der totalen Reflexion darbietet. Um diese Erscheinungen in ihrem Zusammenhange am besten zu übersehen, führen wir die Gleichungen der einfallenden reflektierten und gebrochenen Wellen ein. Zu dem Zwecke bestimmen wir die Lage der Wellennormale, also die Richtung der Fortpflanzung, wie wir es schon § 23 gethan haben, durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Richtung der X Fig. 153 sei diejenige des Einfallslotes, die der Y der Durchschnitt der Einfallsebene mit der reflektierenden Fläche, die Richtung der Z liege

Fig. 153.



[1]) *Fresnel*, Annal. de chim. et de phys. T. XLVI. Poggend. Annal. Bd. XXII.

in der reflektierenden Fläche senkrecht zur Einfallsebene. Der Anfangspunkt der Koordinaten sei der Punkt A, dort wo die einfallende Welle die reflektierende Fläche trifft, die positive Seite der Koordinatenaxen nehme die Richtung der einfallenden Welle auf.

Wenn wir die Zeit t von dem Momente an rechnen, wo die Bewegung im Punkte A beginnt, können wir die einfallende Welle darstellen durch die Gleichung

$$\varrho = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x \cos i + y \sin i}{\lambda}\right),$$

wenn ϱ die Verschiebung der Ätherteilchen aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t bedeutet, welche in der zur Einfallsebene senkrechten Wellenebene jede mögliche Richtung haben kann.

Die reflektierte Welle pflanzt sich in der Richtung AR fort; nennen wir den Abstand der Welle von A, zur Zeit t, p, so können wir die reflektierte Welle zunächst schreiben

$$\varrho' = u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{p}{\lambda}\right).$$

In diesem Ausdruck ist

$$p = x \cos i - y \sin i,$$

da die reflektierte Welle sich in dem zwischen der positiven Richtung der x und der negativen Richtung der y fortpflanzt, somit wird die Gleichung der reflektierten Welle

$$\varrho' = u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i}{\lambda}\right).$$

Die gebrochene Welle pflanzt sich in dem Quadranten der negativen x und der negativen y fort, ihre Gleichung wird demnach

$$\varrho_1 = v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x \cos r + y \sin r}{\lambda} \cdot n\right),$$

wenn n der Brechungsexponent des Mediums ist.

Sind die Strahlen in der Einfallsebene polarisiert, so sind die Schwingungen parallel Z; für die reflektierte Welle wird dann

$$\zeta' = -\frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i}{\lambda}\right).$$

Ist das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, so geschehen die Schwingungen in der Einfallsebene, bezeichnen wir sie mit ϱ', so wird

$$\varrho' = -\frac{\operatorname{tang} (i - r)}{\operatorname{tang} (i + r)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i}{\lambda}\right).$$

Ist das zweite Mittel dichter als das erste, so ist immer $i > r$, der die Amplitude darstellende Koefficient also negativ; anstatt den Ausdrücken für ζ' und ϱ' eine negative Amplitude beizulegen, was eigentlich keinen Sinn hat, können wir schreiben

$$\zeta' = \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right),$$

$$\varrho' = \frac{\operatorname{tang}(i - r)}{\operatorname{tang}(i + r)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right).$$

Dadurch tritt die Bedeutung des negativen Vorzeichens klar hervor, die Richtung der Schwingungen ist im reflektierten Licht derjenigen entgegengesetzt, welche das einfallende Licht haben würde, wenn es sich vom Punkte A um dieselbe Strecke fortgepflanzt hätte, oder durch die Reflexion haben die reflektierten Wellen die Phasenänderung von einer halben Wellenlänge erfahren. Das ist nicht der Fall, wenn das zweite Mittel optisch weniger dicht ist als das erste, dann ist stets $r > i$, die Reflexionskoefficienten u_p und u_s werden positiv, die Gleichung der reflektierten Wellen wird

$$\zeta' = \frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i}{\lambda}\right),$$

$$\varrho' = \frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i}{\lambda}\right).$$

Die Amplituden haben durch die Reflexion nur eine Schwächung erfahren, die Wellen pflanzen sich ohne Phasenänderung fort.

Es folgt somit aus der Reflexionstheorie mit aller Strenge der von uns § 134 des ersten Bandes abgeleitete Satz von der Reflexion der Wellen, den wir im 2. Kapitel des 3. Abschnitts des I. Teiles so vielfach benutzten, um die Schwingungsdauer von Stäben, gespannten Saiten etc. zu erhalten und den wir § 67 anwandten, um die Farben dünner Blättchen abzuleiten.

Aus einem optisch dichtern Mittel in ein weniger dichtes Mittel kann, wie wir wissen, das Licht nur so lange austreten als

$$\sin i < n,$$

wenn n der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Übertritt aus dem dichtern in das dünnere Medium bedeutet. Wird $\sin i = n$ oder gröfser, so tritt totale Reflexion ein, alles die Grenze treffende Licht wird zurückgeworfen.

Die Fresnelsche Theorie gibt dies zu erkennen und zeigt weiter, dafs das reflektierte Licht in diesem Falle eine ganz eigentümliche Beschaffenheit haben mufs. Der experimentelle Nachweis dieser Beschaffenheit ist dann eine neue Bestätigung der Theorie.

Wenden wir die Gleichungen A_a und B_a § 82 an, so ist

$$u_p = -\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i}$$

$$u_s = -\frac{n^2 \cos i - \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n^2 \cos i + \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Ist das einfallende Licht unter dem Azimuthe α polarisiert, so wird die Intensität des reflektierten Lichtes

$$J_{R\alpha} = \cos^2 \alpha \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i}\right)^2 + \sin^2 \alpha \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - n^2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + n^2 \cos i}\right)^2.$$

Wird

$$\sin i = n,$$

der Einfallswinkel also der Grenzwinkel der totalen Reflexion, so wird

$$J_{R\alpha} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

die Intensität des reflektierten Lichtes also gleich der des einfallenden Lichtes, es wird gar kein Licht gebrochen.

Wird der Einfallswinkel noch gröfser, so wird das Licht ebenfalls total reflektiert; indes lassen das die Ausdrücke für die Intensität des reflektierten Lichtes nicht unmittelbar erkennen, denn dann werden beide Teile der Gleichung für $J_{R\alpha}$ imaginär, da dann

$$n^2 - \sin^2 i < 0$$

wird. Die einzelnen Teile erhalten die Form

$$u_p = \frac{\cos i - \sqrt{\sin^2 i - n^2}\sqrt{-1}}{\cos i + \sqrt{\sin^2 i - n^2}\sqrt{-1}},$$

$$u_s = -\frac{n^2 \cos i - \sqrt{\sin^2 i - n^2}\sqrt{-1}}{n^2 \cos i + \sqrt{\sin^2 i - n^2}\sqrt{-1}}.$$

Wir können diese Ausdrücke leicht auf eine andere Form bringen, in welcher die Bedeutung des Imaginärwerdens leichter zu erkennen ist. Wir multiplicieren zunächst Zähler und Nenner beider Ausdrücke mit den betreffenden Zählern, und erhalten dann für u_p

$$u_p = \frac{\cos^2 i - \sin^2 i + n^2 - 2\cos i \,.\, \sqrt{\sin^2 i - n^2}\,.\,\sqrt{-1}}{\cos^2 i + \sin^2 i - n^2},$$

$$u_p = \frac{1 + n^2 - 2\sin^2 i}{1 - n^2} - \frac{2\cos i \,.\, \sqrt{\sin^2 i - n^2}}{1 - n^2} \,.\, \sqrt{-1},$$

$$u_p = p - q\sqrt{-1}.$$

Für u_s erhalten wir in ganz gleicher Weise

$$u_s = -\frac{n^4 \cos^2 i - \sin^2 i + n^2 - 2n^2 \cos i \sqrt{\sin^2 i - n^2}\,.\,\sqrt{-1}}{n^4 \cos^2 i + \sin^2 i - n^2},$$

$$u_s = \frac{\sin^2 i - n^2(1 + n^2\cos^2 i)}{\sin^2 i - n^2(1 - n^2\cos^2 i)} + \frac{2n^2 \cos i \,.\, \sqrt{\sin^2 i - n^2}}{\sin^2 i - n^2(1 - n^2 \cos^2 i)} \,.\, \sqrt{-1},$$

$$u_s = r + s\,.\,\sqrt{-1}.$$

Man sieht, dafs beide Ausdrücke aus einem reellen und imaginären Teile bestehen, und dafs somit auch die Gleichung für $J_{R\alpha}$ in jedem ihrer Teile reell und imaginär wird. Die Summe des reellen Teiles ist nicht allein gleich 1. Da aber die ganze einfallende Lichtmenge reflektiert wird, die reflektierte Intensität also gleich 1 ist, so mufs auch der imaginäre Anteil des Ausdruckes eine physikalische Bedeutung haben, eine gewisse Quantität Licht darstellen, welche mit dem andern zusammen die gesamte Menge des reflektierten Lichtes liefert. Was bedeutet aber das Imaginärwerden des einen Teiles?

Ohne Zweifel, sagt Fresnel, bedeutet es, dafs die Voraussetzung unserer Rechnung, nach welcher in der Grenzfläche selbst die reflektierten Schwingungen mit den einfallenden zusammenfallen, nicht mehr erfüllt ist, dafs ein Teil der Bewegung unterhalb der reflektierten Fläche zurückgeworfen ist, und dadurch eine gewisse Verzögerung gegen den in der reflektierenden Fläche zurückgeworfenen Teil erfahren hat. In der That, wenn dieses die richtige Auslegung des imaginären Ausdruckes ist, so mufs die Analyse,

da sie in ihren Antworten die Grundvoraussetzung nicht verlassen kann, nach welcher in der Grenzfläche die Schwingungen zusammenfielen, notwendig für den Koëfficienten der reflektierten Amplituden eine imaginäre Gröfse geben. Denn wenn man den von der reflektierenden Fläche an durchlaufenen Weg mit x bezeichnet und mit

$$\sin (a + x)$$

die Verschiebung eines Äthermoleküles im Punkte x, im Falle die Vibrationsperioden an der reflektierenden Fläche mit der einfallenden Welle koincidierten, so wird, wenn an der Fläche ihre Perioden um eine gewisse Gröfse vorgeschoben oder verzögert wurden, die Verschiebung im Punkte x werden

$$\sin (a' + x).$$

Wie aber auch der reelle Koefficient A der Gröfse $\sin (a + x)$ werden mag, niemals kann für alle Werte von x

$$A \,.\, \sin (a + x) = \sin (a' + x)$$

sein, das heifst, wenn man fortfährt, die Schwingungsperioden so zu zählen, wie man anfänglich gethan hat, so gibt es keinen reellen Wert des Koefficienten, der imstande wäre, die Verschiebungen der Moleküle darzustellen.

Wir werden daher das Imaginärwerden eines Teiles beider Ausdrücke dahin deuten dürfen, dafs das reflektierte Wellensystem sowohl des parallel der Einfallsebene polarisierten Lichtes, als des senkrecht zu derselben polarisierten aus zwei Teilen besteht, deren einer in der reflektierenden Fläche zurückgeworfen, deren anderer aber soweit unterhalb derselben reflektiert ist, dafs er gegen den ersten um eine viertel Wellenlänge verzögert ist.

Dafs die Verzögerung gerade eine viertel Wellenlänge betragen mufs, läfst sich auf folgende Weise ableiten. Bei der Verzögerung um eine halbe Wellenlänge erhalten die Verschiebungen im reflektierten Lichte das entgegengesetzte Vorzeichen, wir erhalten das in unserer Gleichung, indem wir die Gleichung des reflektierten Lichtes mit -1 multiplicieren. Die Verschiebung um eine halbe Wellenlänge können wir durch zwei Verzögerungen von $\frac{1}{4}\lambda$ entstehen lassen, und die jedesmalige Verzögerung durch einen Koefficienten darstellen, mit welchem wir die Gleichung der Lichtbewegung multiplicieren. Ist dieser Koefficient gleich m, so mufs, da die zweimalige Verzögerung durch m^2 dargestellt wird, $m^2 = -1$, somit $m = \sqrt{-1}$ [1]).

Wir erhalten somit für die Verschiebung eines um x' von der reflektierenden Fläche entfernten Äthermoleküles, zur Zeit t, die beiden Gleichnngen:

1) für das der Einfallsebene parallel polarisierte Licht:

$$\zeta' = p \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i}{\lambda}\right)$$

$$- q \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_{\bullet}} - \frac{x \cos i - y \sin i + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right),$$

---

[1]) Ableitungen der Totalreflexion, die von den Bewegungsgleichungen des Äthers ausgehen, sehe man *Beer*, Poggend. Annal. Bd. XCI. *Eisenlohr*, Poggend. Annal. Bd. CIV. *Ketteler*, Wiedem. Annal. Bd. III. p. 88.

2) für das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht:

$$\varrho' = r \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos i - y\sin i}{\lambda}\right)$$
$$+ s \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos i - y\sin i + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right).$$

Die beiden in der Einfallsebene polarisierten Strahlensysteme sowohl als die beiden senkrecht zu derselben polarisierten liefern ein resultierendes System, dessen Amplitude nach § 128 des ersten Teiles durch die Quadratsumme der Teilamplituden und deren Phasendifferenz gegen den ersten Teil der komponierenden Bewegung gegeben ist (man sehe p. 580 Bd. I.) für das in der Einfallsebene polarisierte Licht durch

$$\operatorname{tang} 2\pi\frac{D}{\lambda} = -\frac{q}{p},$$

und für das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte durch

$$\operatorname{tang} 2\pi\frac{D'}{\lambda} = \frac{s}{r},$$

worin D und D' die Tiefe bedeutet, aus der die beiden Wellen unterhalb der reflektierenden Fläche kommen.

Die resultierende Amplitude ist für die erste Welle gegeben durch $(p^2 + q^2)\cos^2\alpha$, für die zweite $(r^2 + s^2)\sin^2\alpha$, und die Intensität des reflektierten Lichtes ist

$$J_{Ra} = (p^2 + q^2)\cos^2\alpha + (r^2 + s^2)\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

wie man leicht durch Ausführung der angedeuteten Rechnungen erhält. Die Gleichungen zeigen demnach, dafs auch dann, wenn $n < \sin i$, totale Reflexion eintritt.

Das Eindringen des Lichtes in das dünnere Medium bei der totalen Reflexion ist schon von Newton[1]) beobachtet worden, und Fresnel fand[2]), dafs das Licht um mehr als eine Wellenlänge eindringen kann. Drückt man nämlich ein rechtwinkliges Prisma, dessen Hypotenusenfläche das Segment einer Kugel mit grofsem Radius bildet, auf die ebene Hypotenusenfläche eines zweiten rechtwinkligen Prismas, so erscheint, wenn man durch die eine Kathetenfläche so in das Prisma hineinsieht, dafs das durch die andere Kathetenfläche in das Prisma eindringende Licht von der Hypotenusenfläche total reflektiert wird, die Berührungstelle als dunkler Fleck auf hellem Grunde, und man kann durch diesen dunklen Fleck hindurchsehen, wie wenn das Glas beider Prismen kontinuierlich in einander überging. Daraus folgt, dafs in der Ausdehnung des dunklen Fleckes keine Reflexion stattfindet, somit, dafs wenn einer total reflektierenden Fläche eine andere hinreichend nahe gebracht wird, das Licht in dieselbe übergeht, ein Beweis, dafs bei totaler Reflexion das Licht bis zu einer mefsbaren Tiefe in das dünnere Medium eindringt. Diese Tiefe läfst sich aus dem Durchmesser des dunkeln Fleckes ableiten. Beobachtet man nämlich bei gewöhnlicher

---

1) *Newton*, Optice lib. II, observ. 1 u. 2.

2) *Fresnel*, Bibliothèque universelle de Genève (Sciences et arts, nouvelle Série). T. XXII. 1823. Oeuvres complètes T. II. p. 179.

Reflexion die Newtonschen Farbenringe, welche sich in der zwischen den Prismenflächen eingeschlossenen Luftschicht bilden, so kann man aus diesen die Dicke der Schicht an allen Stellen ableiten, somit auch an dem Umfange des dunklen Fleckes, durch welchen man bei einem Einfallswinkel, der gröfser ist als der Grenzwinkel, hindurchsehen kann. Diese Dicke ist die gröfste, bis zu welcher das Licht bei der totalen Reflexion eindringen kann. Auf diese Weise fand Fresnel, dafs die Tiefe, bis zu welcher das Licht eindringen kann, mehr wie eine Wellenlänge betragen kann.

Genauer ist dieses Eindringen später von Stokes[1]) und Quincke[2]) untersucht worden. Nach Quincke ist dieser dunkle Fleck elliptisch geformt, er erscheint im reflektierten Lichte dunkel mit blauem Rande, im durchgehenden weifs mit rotem Rande. Der Durchmesser desselben, oder die Tiefe, bis zu welcher das Licht in das dünnere Medium eindringt, ändert sich mit dem Einfallswinkel, er ist verschieden, je nachdem das Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist. Bei dem Beginne der totalen Reflexion dringt das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht tiefer in das dünnere Medium ein. Die Tiefe, bis zu welcher das Licht in das dünnere Medium eindringt, nimmt mit der Wellenlänge des Lichtes zu, wie sich schon daraus ergibt, dafs der dunkle Fleck im reflektierten Lichte einen blauen, im durchgelassenen Lichte einen roten Rand hat; sie ist ferner um so gröfser, je geringer der Unterschied der Brechungsexponenten des dichtern und dünnern Mediums ist.

Befand sich zwischen den beiden Prismen Luft, so fand Quincke den gröfsten Wert der Tiefe, bis zu welchem das Licht eindrang, wenn das Licht parallel der Einfallsebene polarisiert war, zu 2,49 Wellenlängen; diese Tiefe wurde in der Nähe des Grenzwinkels bei einem Einfallswinkel $38^0\ 24'$ erreicht; bei Vergröfserung des Einfallswinkels nahm die Tiefe ab, und bei einem Einfallswinkel von $68^0\ 26'$ betrug sie nur mehr 0,166 Wellenlängen. Für Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert waren die entsprechenden Tiefen 3,38 und 0,129. Als zwischen die Prismenflächen Wasser gebracht wurde, waren die Tiefen für parallel der Einfallsebene polarisiertes Licht an der Grenze, Einfallswinkel 56^0 gleich 5,16, bei einem Einfallswinkel von $69^0\ 28'$ gleich 0,940, für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht waren die entsprechenden Werte 5,61 und 0,947.

Dafs bei gleichem Einfallswinkel zwischen den parallel und senkrecht polarisierten Strahlen eine zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$ liegende Phasendifferenz durch die totale Reflexion eintreten mufs, das zeigen auch die Gleichungen Fresnels. Nach den allgemeinen Interferenzgleichungen erhalten wir nämlich

$$\cos 2\pi \frac{D}{\lambda} = p, \qquad \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = -q$$

$$\cos 2\pi \frac{D'}{\lambda} = r, \qquad \sin 2\pi \frac{D'}{\lambda} = s,$$

und daraus

$$\cos 2\pi \frac{D-D'}{\lambda} = \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{D'}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{D'}{\lambda} = pr - qs.$$

[1]) *Stokes*, Cambridge Philosophical Transactions vol. VIII. part 5. 1848.
[2]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXVII.

Bilden wir aus den vorher berechneten p, r, q, s diesen Ausdruck, so wird

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}(D - D') = \frac{\sin^2 i\,(1 + n^2) - 2\sin^4 i - n^2}{\sin^2 i\,(1 + n^2) - n^2}.$$

Der sich hieraus ergehende Wert von $\frac{2\pi}{\lambda}(D - D')$ zeigt an, um welchen Bruchteil einer Wellenlänge das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht hinter dem parallel mit der Einfallsebene polarisierten zurückbleibt. Da der Wert des Cosinus im allgemeinen weder $+ 1$ noch $- 1$ ist, so folgt daraus, dafs zwischen diesen beiden Strahlen eine zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$ liegende Phasendifferenz vorhanden ist; ob dieselbe indes positiv oder negativ ist, das heifst, ob die senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Schwingungen in der That um so viel zurückbleiben oder ob sie voreilen, das läfst sich nicht entscheiden, da das Vorzeichen des Bogens sich nicht durch das Vorzeichen des Cosinus entscheiden läfst.

Im § 130 des ersten Teiles haben wir den Nachweis geliefert, dafs wenn in einer Punktreihe zwei zu einander senkrechte Schwingungen sich fortpflanzen, dieselben sich zu elliptischen Schwingungen zusammensetzen, aufser wenn die Phasendifferenz gleich 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ ist, in welchen Fällen die resultierende Bewegung wieder eine gerade Linie ist. In den reflektierten Wellen müssen demnach die Ätherteilchen im allgemeinen elliptische Bahnen haben, das Licht ist elliptisch polarisiert. Untersucht man es mit dem Kalkspath, so verhält es sich wie teilweise polarisiertes, es zerfällt in zwei Strahlen ungleicher Helligkeit. Nur in zwei Fällen bleibt das Licht geradlinig polarisiert, nämlich erstens, wenn der Einfallswinkel der Grenzwinkel, also $\sin i = n$, zweitens wenn $i = 90^0$, also $\sin i = 1$. Es sind das die beiden Grenzfälle der totalen Reflexion.

Wie wir im § 130 des ersten Teiles ferner zeigten, kann unter gewissen Bedingungen die elliptische Bahn schwingender Punkte beim Zusammentreffen zweier in senkrechten Richtungen erfolgenden Schwingungen eine Kreisbahn werden, nämlich dann, wenn die beiden zu einander senkrechten Amplituden an Gröfse genau gleich und die Phasendifferenz genau $\frac{1}{4}$ Wellenlänge beträgt. Will man durch totale Reflexion cirkular polarisiertes Licht erhalten, so mufs man zunächst bewirken, dafs die parallel und senkrecht zur Einfallsebene reflektierten Amplituden A und B einander gleich werden. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man bewirkt, dafs das einfallende Licht unter einem Winkel $\alpha = 45^0$ gegen die Einfallsebene polarisiert ist, denn dann ist

$$A = \sqrt{(p^2 + q^2)}\,.\cos 45^0 = \cos 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$B = \sqrt{(r^2 + s^2)}\,.\sin 45^0 = \sin 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Damit die zweite Bedingung erfüllt werde, mufs

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(D - D') = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$$

oder
$$\frac{\sin^2 i\,(1+n^2) - 2\sin^4 i - n^2}{\sin^2 i\,(1+n^2) - n^2} = 0.$$

Diese Bedingung durch einmalige Reflexion zu erfüllen, ist nicht immer möglich, da die Werte von i, welche totale Reflexion geben, von dem Brechungsexponenten abhängen, und es nicht für jedes n möglich ist, einen Winkel i zu erhalten, welcher jener Bedingung Genüge leistet.

Es ist leicht, aus obiger Bedingungsgleichung den Wert, welchen n haben darf, damit eine einmalige Reflexion cirkulare Polarisation geben kann, abzuleiten, es sind alle Werte von n, welche kleiner als 1, für den Winkel i einen reellen Wert liefern. Obige Bedingung wird erfüllt, wenn

$$\sin^2 i\,(1+n^2) - 2\sin^4 i - n^2 = 0$$
$$\sin^4 i - \frac{1+n^2}{2}\cdot\sin^2 i = -\frac{n^2}{2}$$

aus welcher sich ergibt

$$\sin^2 i = \frac{1+n^2}{4} \pm \frac{\sqrt{1-6n^2+n^4}}{4}.$$

Alle Werte von $n < 1$, welche den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv machen, liefern einen reellen Wert von $\sin^2 i$ und dann auch mit dem passenden Vorzeichen der Wurzel einen reellen Wert von i. Der Grenzwert von n ist daher durch die Gleichung gegeben

$$(1+n^2)^2 = 8n^2$$
$$1+n^2 = \sqrt{8}$$
$$n = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414\,21.$$

Der Brechungsexponent des Lichtes bei dem Übergange aus dem betreffenden Mittel in Luft darf also höchstens diesen Wert haben, wenn eine einmalige totale Reflexion cirkulare Polarisation liefern soll. Der Brechungsexponent dieses Mittels, beim Eintritte von Licht aus Luft in dasselbe ist

$$\frac{1}{n} = 2{,}414\,2,$$

das Mittel müfste demnach das Licht mindestens so stark brechen wie Diamant. Der Grenzwinkel für dieses Mittel würde $24^0\ 28'$ sein, und der Winkel, welcher cirkulare Polarisation hervorrufen würde, $i = 35^0\ 51'$.

Will man durch schwächer brechende Mittel cirkular polarisiertes Licht erhalten, so mufs man mehrfach reflektieren lassen, indem jede neue Reflexion unter demselben Winkel i wiederum dieselbe Phasendifferenz erteilt.

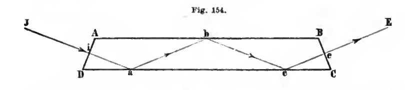
Für Spiegelglas von St. Gobain, dessen Brechungsexponent für mittlere Strahlen gleich 1,51 ist, ergibt die Theorie, dafs eine dreimalige Reflexion unter einem Einfallswinkel $i = 69^0\ 12'$, 33 das Licht cirkular polarisiert. Denn setzen wir diesen Wert in unsere Gleichung für die Phasendifferenz ein, so ergibt sich

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D - D') = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \cos 30^0 = \cos\tfrac{1}{3}\,\frac{\pi}{2}$$
$$D - D' = \frac{\lambda}{12}.$$

Um diese Folgerung der Theorie durch den Versuch zu prüfen, liefs Fresnel aus solchem Glase ein Trapezoeder herstellen, $ABCD$ (Fig. 154), bei welchem die Seiten AD und BC mit der Basis DC Winkel von $69^0\ 12', 33$ bildeten.

Auf die erste Seitenfläche AD liefs er senkrecht Licht einfallen, dessen Polarisationsebene einen Winkel von 45^0 mit der Einfallsebene bildete.

Fig. 154.



Beim Eintritt des Strahls in das Glas tritt weder eine Brechung noch eine Drehung der Polarisationsebene ein; bei a wird daher das Licht zum ersten Male unter den zur Cirkularpolarisation erforderlichen Bedingungen reflektiert; nachdem dort eine Phasendifferenz von $\frac{\lambda}{12}$ eingetreten, erhalten die beiden senkrecht zu einander polarisierten Lichtmengen bei b und c jedesmal dieselbe Phasendifferenz, es tritt daher bei e ganz cirkular polarisiertes Licht aus. Mit dem Kalkspath untersucht zeigte das austretende Licht auch keine Spur von Polarisation, in jeder Lage des Hauptschnittes traten zwei Strahlen gleicher Intensität aus dem Krystalle aus.

Dafs mit dem Kalkspath untersucht cirkular polarisiertes Licht sich so zeigen mufs, übersieht man sofort, wenn man erwägt, dafs dasselbe aus zwei zu einander senkrecht polarisierten Bündeln gleicher Amplitude besteht. Beim Durchtritt durch den Kalkspath werden die Schwingungen des Lichtes nach zwei zu einander senkrechten Ebenen zerlegt; die beiden Ebenen mögen eine Lage haben, welche sie wollen, wenn zwei senkrecht zu einander polarisierte Wellen gleicher Intensität zugleich in den Kalkspath eindringen, so müssen sie immer zwei Komponenten gleicher Amplitude bilden.

Eine genauere Untersuchung des total reflektierten Lichtes haben später Jamin[1]) und Quincke[2]) vorgenommen, indem sie direkt die Phasendifferenz der beiden senkrecht zu einander polarisierten Komponenten des elliptisch polarisierten Lichtes nach einmaliger totaler Reflexion mafsen. Es ist dazu nötig, dafs man den einen oder andern Strahl in seiner Richtung so weit vorschiebt oder zurückschiebt, dafs die Phasendifferenz Null wird, so dafs also wieder geradlinig polarisiertes Licht entsteht. Es gelingt das leicht mit Hülfe des Babinetschen Kompensators[3]); bei der Bedeutung dieses Apparates für die Untersuchung des elliptisch polarisierten Lichtes wird es gut sein, denselben schon hier etwas ausführlicher zu besprechen, obwohl

---

[1]) *Jamin*, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. XXX. Krönigs Journal für Physik des Auslandes. Bd. I.

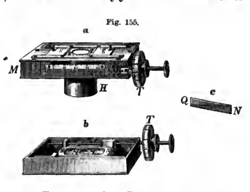
[2]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXVII.

[3]) Babinets Kompensator in der zu Messungen geeigneten Form beschreibt *Jamin*, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. XXIX. Poggend. Annal. Erg.-Bd. III.

wir dabei einige Sätze aus der im nächsten Kapitel zu behandelnden Doppelbrechung anwenden müssen.

Die wesentlichen Bestandteile eines Babinetschen Kompensators sind zwei sehr schwach prismatische Quarzplatten von genau gleicher Dicke, welche so aus einem Quarzkrystall herausgeschnitten sind, dafs die Axe des Krystalls der einen Fläche der Platten parallel ist; bei der einen Platte ist die Krystallaxe gleichzeitig der brechenden Kante des Prismas parallel, bei der andern dagegen ist sie zur brechenden Kante senkrecht. Die Hauptschnitte der beiden Platten sind also zu einander senkrecht. Die beiden Platten werden so vor einander gelegt, dafs sie sich zu einem Parallelepiped, Fig. 155c, ergänzen, und so die eine *QQ* an dem Deckel eines kleinen Kästchens von Messingblech, Fig. 155a, befestigt. Der Deckel besitzt eine runde Durchbohrung von etwa 1 Centimeter Durchmesser, welche auf der Innenseite von der Quarzplatte bedeckt ist. Durch die Schieber *ss* kann diese Öffnung bis auf einen ganz schmalen Spalt geschlossen werden. Die zweite Platte ist an einem beweglichen Rahmen *N* (Fig. 155b zeigt den Kompensator geöffnet, wenn die untere Platte Fig. *a* mit dem Rohr *H* fortgenommen ist) befestigt, welcher durch die Mikrometerschraube *R* nach rechts oder nach links verschoben werden kann. Die Verschiebung des Rahmens und mit demselben des Quarzprismas wird durch Drehung der mit der Trommel *T* versehenen Schraube hervorgebracht. Die Gröfse der Verschiebung wird an der auf dem Rahmen *M* befindlichen Teilung mit Hülfe des an *N* befestigten Index und an der Teilung der Trommel abgelesen. Steht der Index auf 0, so liegen die Quarzplatten so über einander, dafs in der Mitte des Gesichtsfeldes beide Platten ganz genau gleich dick sind. Diese Mitte ist durch zwei sehr nahe neben einander liegende Parallelfäden markiert. Nehmen wir an, dafs die Quarzplatten wie Fig. 155c liegen, wo wieder *Q* die feste, *N* die bewegliche bedeutet, so bewirkt eine Verschiebung von *N* zur Linken, dafs in der Mitte des Gesichtsfeldes die zweite Platte dicker, eine Verschiebung zur Rechten, dafs die zweite Platte dünner wird.

Fig. 155.



Durch die Art, wie die Platten aus dem Krystall geschnitten sind, wird bewirkt, dafs Licht, welches mit senkrechter Incidenz durch die Platten hindurchgeht, sich in denselben stets senkrecht zu der Axe des Krystalls fortpflanzt. Eine Lichtwelle, welche unter einem Winkel α gegen die Axe der ersten Platte polarisiert ist, wird beim Eintritt in die Platte in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zur Axe polarisiert ist; die Schwingungen der ersten Komponente geschehen senkrecht zur Axe, die andern parallel derselben. Es tritt eben, wie wir das schon beim Kalkspath gesehen haben, eine Teilung in einen ordentlichen und einen aufserordentlichen Strahl ein. Der Brechungsexponent

des ordentlichen Strahles ist 1,5471, der des aufserordentlichen 1,5563; letzterer ist also gröfser. Daraus folgt, dafs die Wellenlänge des ordentlichen Strahles λ_0 gröfser ist als die Wellenlänge des aufserordentlichen Strahles λ_e. Stellt deshalb

$$r = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

die Gleichung der bei der Eintrittsstelle in den ersten Krystall ankommenden Lichtbewegung dar, so wird diese beim Eintritt in den Krystall in die beiden Komponenten

$$y = \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$z = \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

zerlegt; jede dieser Komponenten durchsetzt diesen Krystall mit der ihr zukommenden Geschwindigkeit. Nennen wir d_1 die Dicke der ersten Krystallplatte, und σ_1, resp. σ_2, die Schwächungen der im einfallenden Lichte gleich 1 gesetzten Amplitude infolge der beiden Brechungen beim Eintritt und Austritt des Lichtes, so wird, nachdem das Licht den ersten Krystall durchsetzt hat, die Gleichung des ordentlichen, parallel der Axe polarisierten Strahles

$$y = \sigma_1 \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_0}\right),$$

die des aufserordentlichen, senkrecht zur Axe polarisierten Strahles

$$z = \sigma_2 \cdot \sin\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_e}\right).$$

Nachdem die Strahlen so den ersten Krystall durchlaufen haben, treten sie in den zweiten ein, dessen Dicke wir gleich d_2 setzen wollen; da aber die Axe des zweiten Krystalles senkrecht ist zur Axe des ersten Krystalles und ebenso senkrecht zu den durchtretenden Strahlen, da ferner bei der senkrechten Incidenz eine Drehung der Schwingungsrichtung nicht stattfindet, so geschehen die Schwingungen desjenigen Strahles, welche im ersten Krystalle der Axe parallel waren, jetzt senkrecht zur Axe, die, welche senkrecht zur Axe waren, jetzt parallel der Axe. Der Strahl somit, der den ersten Krystall als aufserordentlicher durchsetzte, geht durch den zweiten als ordentlicher und umgekehrt. Nach dem Austritt aus dem zweiten Krystalle ist daher die Gleichung der Komponente y

$$y = \sigma_1 \,.\, \sigma_2 \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_0} - \frac{d_2}{\lambda_e}\right),$$

die der Komponente z

$$z = \sigma_2 \,.\, \sigma_1 \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_e} - \frac{d_2}{\lambda_0}\right).$$

Die beiden senkrecht zu einander polarisierten Komponenten des den Kompensator verlassenden Lichtes haben demnach in Bruchteilen der Wellenlänge eine Phasendifferenz

$$\Delta q = (d_1 - d_2)\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_e}\right).$$

Ist dieser Ausdruck positiv, so ist der senkrecht zur Axe des ersten Krystalls polarisierte Strahl dem parallel polarisierten um diese Gröfse voraus, ist derselbe negativ, so ist der parallel der Axe des ersten Krystalls polarisierte Strahl dem senkrecht polarisierten voraus. Da $\lambda_0 > \lambda_e$, so ist der Ausdruck negativ, wenn $d_1 > d_2$, positiv, wenn $d_2 > d_1$. Da man durch Verschiebung des zweiten Krystalls diese Fälle realisieren kann, so kann man auf diese Weise alle Arten polarisierten Lichtes erzeugen, geradliniges, wenn $\Delta q = 0, \pm \frac{\lambda}{2} \pm \lambda \ldots$ ist, elliptisches, wenn Δq einen dazwischen liegenden Wert hat, cirkulares, wenn $\Delta q = \frac{1}{4}\lambda$ und gleichzeitig $\alpha = 45^0$ ist, denn dann haben die beiden Komponenten nach dem Austritt gleiche Amplitude.

Ebenso wie man mit dem Babinetschen Kompensator jede Art des elliptischen Lichtes erhalten kann, ebenso ist er geeignet, das elliptische Licht zu untersuchen, das heifst die Phasendifferenz und das Verhältnis der Amplituden der komponierenden Strahlen zu bestimmen. Es falle auf den Kompensator ein elliptisch polarisierter Strahl, so werden wir denselben als zusammengesetzt ansehen können aus zweien, von denen der eine im Azimuth 0, parallel der Axe der ersten Platte, der zweite im Azimuth 90°, senkrecht zu der Axe polarisiert ist. Die Gleichung des ersten sei

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

die des zweiten

$$z = b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda}\right).$$

Wir lassen die Strahlen durch den Kompensator gehen und verschieben jetzt die verschiebbare Platte soweit nach der rechten oder linken Seite, bis das austretende Licht wieder geradlinig polarisiert ist, was man daran erkennt, dafs durch einen Kalkspath, der nur einen der beiden polarisierten Strahlen hindurchläfst, das aus dem Kompensator austretende Licht in einer bestimmten Stellung, in welcher seine Polarisationsebene mit dem Azimuth 0, der Axe der ersten Krystallplatte, den Winkel $90 + \beta$ bildet, ausgelöscht wird. Die Polarisationsebene des den Kompensator verlassenden Strahles bildet mit der Axe der ersten Platte den Winkel β.

Nach dem Durchtritt durch den Kompensator werden die Gleichungen der beiden Strahlen

$$y = \sigma_1 \,.\, \sigma_2 \,.\, a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_0} - \frac{d_2}{\lambda_e}\right),$$

$$z = \sigma_2 \,.\, \sigma_1 \,.\, b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_e} - \frac{d_2}{\lambda_0}\right),$$

und daraus, dafs das Licht jetzt wieder geradlinig polarisiert ist, folgt, dafs die Phasendifferenz dieser Strahlen entweder gleich 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ oder irgend ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ist. Zur Bestimmung von Δ haben wir demnach die Gleichung

$$\frac{\Delta}{\lambda} + \frac{d_1}{\lambda_e} + \frac{d_2}{\lambda_0} = \frac{d_1}{\lambda_0} + \frac{d_2}{\lambda_e} + n\,\frac{\lambda}{2\lambda},$$

$$\frac{\varDelta}{\lambda} = (d_1 - d_2)\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_e}\right) + n\,\frac{\lambda}{2\lambda},$$

wo n gleich 0 oder irgend eine Zahl der natürlichen Reihe sein kann. Welcher dieser Fälle vorhanden ist, das läfst sich, wenn ein elliptischer Strahl vorhanden ist, nicht ohne weiteres entscheiden. Wenn indes der elliptisch polarisierte Strahl aus einem geradlinig polarisierten Strahle entstanden ist, so läfst sich sofort entscheiden, ob n eine gerade oder ungerade Zahl von halben Wellenlängen ist. Liegt nämlich die Polarisationsebene des aus dem Kompensator austretenden linear polarisierten Strahles in demselben Quadranten als jene des Strahles, aus welchem das elliptische Licht entstanden ist, so ist nach § 130 des ersten Teiles n gleich 0 oder ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, liegt dagegen die Polarisationsebene in einem andern Quadranten, so ist n gleich 1 oder ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$. Es ergibt sich das unmittelbar daraus, dafs zwei senkrecht zu einander polarisierte Schwingungen sich in beiden Fällen, wenn ihre Phasendifferenz 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ ist, zu einer geradlinigen Schwingung zusammensetzen, die aber im letzten Falle senkrecht ist zu der im ersten. Da man indes den Kompensator immer soweit verschrauben kann, dafs die Polarisationsebene des ausgetretenen Strahles in demselben Quadranten liegt, so kann man also stets die Phasendifferenz gleich 0 oder einem geraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$ machen, und erhält dann einfach

$$\frac{\varDelta}{\lambda} = (d_1 - d_2)\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_e}\right).$$

Welcher Strahl dem andern voraus ist, ergibt sich aus dem Vorzeichen von $\varDelta$; ist $\varDelta$ positiv, so ist der im Azimuth 90° polarisierte Strahl um $\varDelta$ verzögert, ist $\varDelta$ negativ, der im Azimuth 0 polarisierte, denn im ersten Falle ist die Gleichung für z

$$z = b \, . \, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\varDelta}{\lambda}\right) = b \, . \, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \varDelta}{\lambda}\right),$$

es ist also so, als käme der Strahl von einem Punkte, der um $\varDelta$ weiter entfernt ist, wie der Ausgangspunkt von y; im zweiten Falle, wenn $\varDelta$ negativ ist, wird

$$z = b \, . \, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{-\varDelta}{\lambda}\right) = b \, . \, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - \varDelta}{\lambda}\right),$$

der Strahl z kommt von einem um $\varDelta$ nähern Punkte.

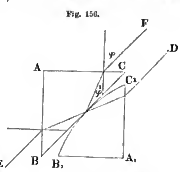
Aufser der Phasendifferenz liefert uns der Kompensator auch das Verhältnis der Teilamplituden a und b, aus dem Winkel β, welchen die Polarisationsebene des austretenden Strahles mit dem Azimuth 0, parallel welchem die Komponente y des einfallenden Lichtes polarisiert gedacht wurde, bildet; da nämlich die Komponente y senkrecht zum Azimuthe 0, die Komponente z parallel demselben schwingt, so folgt

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\sigma_2 \sigma_1 \, . \, b}{\sigma_1 \sigma_2 \, . \, a} = \frac{b}{a} \, .$$

Die Tangente des Winkels, welchen die Polarisationsebene des wieder geradlinig polarisierten Strahles mit dem Azimuthe 0 bildet, ist somit gleich dem Quotienten aus den Amplituden des im elliptischen Lichte senkrecht und parallel dem Azimuth 0 polarisierten Lichtes.

Mit Hülfe des Kompensators hat zunächst Jamin gezeigt, dafs die Phasendifferenz bei der totalen Reflexion, und das Amplitudenverhältnis durch die Fresnelschen Gleichungen gegeben ist. Er benutzte zu dem Zwecke ein rechtwinkliges Prisma, dessen Brechungsexponent gleich 1,545 war, und liefs Licht reflektieren, welches unter 45° gegen die Einfallsebene polarisiert war. Die Änderungen der Amplitude und Phase, welche dabei durch die zweimalige Brechung beim Eintritt und Austritt des Lichtes eintritt, wurde direkt bestimmt. Quincke hat nicht nur das bei der gewöhnlichen totalen Reflexion reflektierte Licht, sondern ebenfalls bei den zwei auf einander gelegten Prismen das in der Nähe der Berührungsstelle hindurchgegangene und reflektierte Licht untersucht. Den Einflufs der Brechung auf die Amplitude des Lichtes zog er nach den Fresnelschen Formeln in Rechnung. Ist das einfallende Licht im Azimuth α polarisiert, so ist die parallel der Reflexionsebene polarisierte Komponente gleich $\cos\alpha$, die senkrecht polarisierte gleich $\sin\alpha$. Ist der Einfallswinkel an der ersten Prismenfläche AC, Fig. 156, gleich φ, der Brechungswinkel gleich φ', so wird durch die erste Brechung nach § 82 die Amplitude beider Komponenten

Fig. 156.



$$\cos\alpha\,\frac{2\sin\varphi'\cos\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')};\quad \sin\alpha\,\frac{2\sin\varphi'\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi'},$$

oder das Verhältnis beider Amplituden

$$\cos\alpha\,.\,\cos(\varphi-\varphi'):\sin\alpha.$$

Durch die totale Reflexion werden sie

$$P.\cos\alpha\,.\,\cos(\varphi-\varphi'):S\,.\sin\alpha,$$

worin, wenn die totale Reflexion in der gewöhnlichen Weise erfolgt, nach der Fresnelschen Gleichung $P=p^2+q^2=1$, $S=r^2+s^2=1$ ist. Nach dem Austritt des Strahles aus der zweiten Fläche wird das Verhältnis beider, da der Austrittswinkel ebenfalls gleich φ ist,

$$P\,.\cos\alpha\,.\cos^2(\varphi-\varphi'):S\sin\alpha.$$

Ist nach dem Durchtritt des Lichtes durch den Kompensator das Azimuth der Polarisationsebene β, so ist

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{S}{P}\cdot\operatorname{tang}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2(\varphi-\varphi')}$$

und daraus

$$K=\frac{S}{P}=\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\cdot\cos^2(\varphi-\varphi').$$



Ganz genau dieselbe Gleichung gibt auch das Amplitudenverhältnis des senkrecht und parallel polarisierten Lichtes im durchgehenden Licht *DE*.

Bei dem Beginne der totalen Reflexion ist nach Quincke, entsprechend der Fresnelschen Gleichung, welche für $\sin i = n$

$$\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda} = -1, \quad D - D' = \frac{\lambda}{2}$$

liefert, der Phasenunterschied $\frac{\lambda}{2}$, die Komponente parallel der Einfallsebene polarisiert gegen die senkrecht zur Einfallsebene polarisierte verzögert. Mit wachsendem Einfallswinkel wächst $D - D'$ für alle Stellen der Fläche *CB*, erreicht ein Maximum und nimmt wieder ab, um bei streifender Incidenz wieder $\frac{\lambda}{2}$ zu werden. Die Fresnelsche Gleichung gibt die Werte der Phasendifferenz indes nur für den Rand des vorhin erwähnten dunklen Fleckes und aufserhalb desselben. Ebenso ist auch nur dort *K* gleich 1; bei demselben Einfallswinkel ist das Amplitudenverhältnis *K* auf dem dunklen Fleck in der Nähe des Grenzwinkels kleiner als 1, nimmt bei wachsendem Einfallswinkel zu und erreicht auch dort den Wert 1; die Phasendifferenz ist stets kleiner als am Rande.

Auch das durch den dunklen Fleck hindurchgegangene Licht ist stets elliptisch polarisiert, die Phasendifferenz unterscheidet sich um $\frac{\lambda}{2}$ von der des an derselben Stelle reflektierten Lichtes, das Amplitudenverhältnis *K* ist in der Nähe des Grenzwinkels gröfser als 1, und das um so mehr, je dicker die Schicht ist; mit steigendem Einfallswinkel *i*, das heifst, je weniger der die Berührungsfläche durchsetzende Strahl gegen die Fläche geneigt ist, nimmt das Verhältnis ab und wird selbst kleiner als 1. Folgende kleine Tabelle läfst diese Verhältnisse übersehen, sie gibt die Werte von *K* und $D - D'$, letztere in $\frac{\lambda}{4}$ für das in der Mitte des dunklen Flecks und am Rande durchgelassene und reflektierte Licht bei Flintglas, dessen Brechungsexponent 1,616 ist. Es ist also $n = \frac{1}{1,616}$, der Grenzwinkel 38° 14′.

	Mitte				Rand				
	durchgelassen		reflektiert		durchgelassen		reflektiert		
i	K	$D-D'$	K	$D-D'$	K	$D-D'$	K	$D-D'$ beob.	$D-D'$ berechn.
38° 50′	1,437	0,237	0,583	2,237	2,281	0,149	0,983	2,248	2,252
45°	1,253	0,452	0,954	2,408	1,323	0,594	1,002	2,588	2,574
51° 10′	0,937	0,499	0,960	2,516	0,889	0,635	0,998	2,588	2,580
63° 1′	0,602	0,418	1,057	2,379	0,581	0,463	0,984	2,446	2,447

Eine Vergleichung der letzten Kolumne mit der vorletzten zeigt, wie genau die Fresnelschen Gleichungen mit den Beobachtungen übereinstimmen. Die Beobachtungen zeigen zugleich, in welcher Weise die Fresnelsche Gleichung zur Rechnung verwandt werden mufs; dieselbe gibt im all-

gemeinen für $\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda}$ einen negativen Wert, der entsprechende Bogen ist dann entweder um den dem berechneten Cosinus entsprechenden zwischen 0 und 90° liegenden Bogen ψ kleiner oder gröfser als π, da $\cos(\pi - \psi) = \cos(\pi + \psi)$; die Beobachtungen von Quincke zeigen, dafs im allgemeinen die Phasendifferenz durch den Bogen $\pi + \psi$ gegeben ist.

§ 85.

Reflexion an Metallen und stark absorbierenden Medien. Die Gesetze der Reflexion des polarisierten Lichtes und damit des Lichtes überhaupt müssen andere werden, wenn das zweite Mittel, an welchem die Reflexion stattfindet, das Licht stark absorbiert, denn wir fanden im § 23, dafs die körperlichen Moleküle in dem Falle in ihren Schwingungen gegen diejenigen der Äthermoleküle eine von dem Absorptionskoefficienten abhängige Phasendifferenz erhalten. In der Grenzfläche müssen daher stets zwei Schwingungen verschiedener Phase stattfinden, deren jede zu reflektierten Schwingungen Anlafs gibt, welche zusammen eine reflektierte Welle liefern, deren Phase nach den Interferenzgesetzen sich aus den Amplituden und Phasen der beiden Schwingungen zusammensetzt. In der That hat schon Malus gefunden, dafs das Licht von Metallen nicht nach denselben Gesetzen reflektiert wird wie an durchsichtigen Medien; er schlofs sogar aus seinen ersten Versuchen, dafs Metalle das Licht gar nicht zu polarisieren imstande seien. Er fand jedoch bald, dafs das Phänomen der Polarisation teilweise hervorgebracht werde, und dafs die polarisierende Wirkung zunehme, wenn der Einfallswinkel sich einem gewissen Winkel nähert. Brewster untersuchte zuerst diese Erscheinungen genauer[1]) und Neumann[2]) zeigte auf Grund der Beobachtungen Brewsters, dafs das von Metallen reflektierte Licht elliptisch polarisiert sei. Dafs ähnliches bei den anomal dispergierenden Medien für diejenigen Wellen gilt, welche stark absorbiert werden, beobachteten Haidinger[3]) und Stokes[4]) zuerst.

Ehe wir auf diese Beobachtungen und die sich daran schliefsenden genauern experimentellen Untersuchungen dieser Erscheinungen eingehen, wollen wir die Theorie der Reflexion an absorbierenden Medien kennen lernen.

Der erste, der Gleichungen für die Reflexion an stark absorbierenden Medien, speciell an Metallen ableitete, war Mac Cullagh[5]). Derselbe nahm an, dafs die Reflexion an Metallen in ähnlicher Weise erfolgte wie bei der totalen Reflexion, er setzte deshalb die Brechungsexponenten der Metalle imaginär und kam damit zu fast denselben Gleichungen, welche später Cauchy[6]) erhielt. Der letztere gab indes über die Ableitung seiner Gleichungen

[1]) *Brewster*, Biot Traité de physique. T. IV. p. 580. 1816. Phil. Transact. 1830. Poggend. Annal. Bd. XXI.

[2]) *Neumann*, Poggend. Annal. Bd. XXVI u. XL.

[3]) *Haidinger*, Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. VIII. Poggend. Annal. Bd. LXXX.

[4]) *Stokes*, Phil. mag. IV. series. vol. VI. Poggend. Annal. Bd. XCI.

[5]) *Mac Cullagh*, Proceedings of the Irish Acad. 1836—1837. I. Irish Acad. 1837. vol. XVIII. pt. I.

[6]) *Cauchy*, Comptes Rendus. T. VIII. p. 961. 1839.

nur einige Andeutungen. Beer[1]), Fr. Eisenlohr[2]) und Lundquist[3]) leiteten dieselben später ab. Die Ableitung Beers, welche längere Zeit als nicht ganz genügend angesehen wurde, oder von welcher Lundquist sagt, dafs sie den Mangel habe, die Zahl der eingeführten Hypothesen gröfser erscheinen zu lassen, als sie wirklich ist, hat den grofsen Vorzug, die Bedeutung aller einzelnen für die Erscheinung mafsgebenden Gröfsen deutlich hervortreten zu lassen; sie entspricht ganz vollständig auch unsern jetzigen Anschauungen über die Ursache der Brechung des Lichtes, wenn sie auch nicht auf derselben gegründet ist. Die Rechnungen, wie sie Wernicke[4]) zur Darstellung der Reflexion an Metallen auf Grundlage der neuern Brechungstheorie durchgeführt hat, sind im wesentlichen ganz dieselben. Beers Ableitung läfst gleichzeitig erkennen, dafs die Reflexion an absorbierenden Medien den allgemeinsten Fall der Reflexion darstellt, dafs die Fresnelschen Gleichungen für durchsichtige Medien einen speciellen Fall der Reflexion wiedergeben.

Beer zeigte zuerst, dafs die Reflexionstheorie Cauchys wesentlich auf dem Princip der Kontinuität der Bewegung beruht, welches man dahin definieren kann, dafs der Ort der Ätherteilchen, welche in der Ruhelage auf einer zur Grenzfläche senkrechten Geraden sich befinden, infolge der Schwingungen an der Grenzfläche, wenn man aus dem ersten in das zweite Medium übergeht, keine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt. Die in der Ruhelage auf einer solchen Geraden, einem Einfallslot liegenden Ätherteilchen liegen in einem gegebenen Momente infolge der einfallenden, reflektierten und gebrochenen Schwingungen auf einer Kurve. Soll diese Kurve an der Grenze keine Unterbrechung der Stetigkeit zeigen, so müssen in der Grenzebene das in dem ersten Mittel und das in dem zweiten Mittel liegende Stück der Kurve in einander ohne Knickung übergehen. Die mathematische Formulierung dieser Bedingung ist folgende. Erstens die Verschiebungen der Ätherteilchen in der Grenzebene, herrührend einerseits von den Schwingungen der ankommenden und reflektierten Welle, andererseits von denen der gebrochenen Welle, müssen in jedem Momente dieselben sein, denn nur dann stofsen die beiden Kurvenstücke in der Grenzebene zusammen. Dazu müssen die den drei Koordinatenaxen parallelen Komponenten der Verschiebungen für das erste Mittel und für das zweite Mittel stets einander gleich sein. Sind also ξ, η, ζ die Komponenten der Verschiebungen in der Grenze zur Zeit t für die einfallende Welle, ξ_1, η_1, ζ_1 dieselben für die reflektierte Bewegung, ξ_2, η_2, ζ_2 für die gebrochene Bewegung, so mufs

$$\xi + \xi_1 = \xi_2$$
$$\eta + \eta_1 = \eta_2$$
$$\zeta + \zeta_1 = \zeta_2.$$

Denn nur wenn diese Komponenten einzeln zu jeder Zeit gleich sind, können die Verschiebungen in der Grenzebene identisch, das heifst gleich grofs und gleich gerichtet sein.

Damit die Kurven stetig, ohne Knickung in einander übergehen, müssen

[1]) *Beer,* Poggend. Annal. Bd. XCII. p. 402.
[2]) *Fr. Eisenlohr,* Poggend. Annal. Bd. CIV. p. 368.
[3]) *Lundquist,* Poggend. Annal. Bd. CLII. p. 398.
[4]) *Wernicke,* Monatsber. der Berl. Akad. November 1875.

weiter die Verschiebungen im ersten Mittel und die im zweiten Mittel auch in unmittelbarer Nähe der Grenze, das heifst, wenn wir uns unendlich wenig von der Grenze entfernen, einander gleich sein; denn wäre zwischen diesen unendlich nahen Verschiebungen ein endlicher Unterschied, so würde bei dem Durchgang durch die Grenze ein Sprung in den Werten derselben eintreten, die Stetigkeit wäre unterbrochen. Geht, wenn wir uns von der Grenze unendlich wenig entfernen, ξ in $\xi + d\xi$, ξ_1 in $\xi_1 + d\xi_1$, ξ_2 in $\xi_2 + d\xi_2$ über, so mufs demnach auch

$$\xi + d\xi + \xi_1 + d\xi_1 = \xi_2 + d\xi_2$$

oder gemäfs der vorher aufgestellten Gleichung

$$d\xi + d\xi_1 = d\xi_2$$

sein. Entsprechende Gleichungen gelten für die andern Komponenten. Legen wir unser Koordinatensystem so, wie wir es auch § 84 gethan haben, dafs die Axe der x mit dem Einfallslot zusammenfällt, die Axe der y die Schnittlinie der Einfallsebene mit der Grenzfläche und die Axe der z senkrecht zur Einfallsebene in der Grenzfläche ist, so bedeuten die Werte $d\xi \ldots$ die Änderungen der Ausschläge, wenn sich von der Grenzfläche aus x um dx ändert. Wir können demnach setzen

$$d\xi = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{x=0} dx, \quad d\xi_1 = \left(\frac{d\xi_1}{dx}\right)_{x=0} dx, \quad d\xi_2 = \left(\frac{d\xi_2}{dx}\right)_{x=0} dx,$$

wo der Index unten rechts $x = 0$ andeuten soll, dafs diese Quotienten für den Wert $x = 0$ zu bilden sind.

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen ein und dividieren durch dx, so erhalten wir

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{x=0} + \left(\frac{d\xi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\xi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

und entsprechend für die andern Komponenten

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=0} + \left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\eta_2}{dx}\right)_{x=0} \qquad \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_{x=0} + \left(\frac{d\zeta_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\zeta_2}{dx}\right)_{x=0}.$$

Diese Gleichungen gestatten uns die reflektierten und gebrochenen Amplituden, sowie die Phasen beider Wellen zu berechnen.

Wir behandeln auch hier wieder die beiden Hauptfälle, dafs das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisiert sei, seine Schwingungen also senkrecht zur Einfallsebene oder parallel der brechenden Fläche vollführe, und als zweiten, dafs das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sei, die Schwingungen somit in der Einfallsebene erfolgen.

Ist das Licht in der Einfallsebene polarisiert, so sind seine Schwingungen parallel z, die Komponenten parallel y und x sind gleich null. Es können daher auch im reflektierten und gebrochenen Lichte nur Schwingungen parallel z vorkommen.

Als Gleichung der einfallenden Welle erhalten wir dann wie im vorigen Paragraphen

$$\zeta = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x \cos i + y \sin i}{\lambda}\right),$$

wenn wir die Phase der einfallenden Schwingungen gleich 0 und die Amplitude der einfallenden Welle gleich 1 setzen.

Ist die Amplitude der reflektierten Welle gleich u, die Verschiebung der Phase, die bei der Reflexion eintritt, $2\pi\frac{\delta_p}{\lambda}$, so wird die Gleichung der reflektierten Welle

$$\zeta_1 = u \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos i - y\sin i}{\lambda} - \frac{\delta_p}{\lambda}\right).$$

Die gebrochene Welle erfährt in dem zweiten Medium in diesem Falle eine starke Absorption. Schreiben wir wie im § 23

$$\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\varkappa}{\cos r},$$

wenn $\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa$ den dem Brechungswinkel r entsprechenden Absorptionskoefficienten bedeutet, so wird die Gleichung für die gebrochene Welle, die sich nach der negativen Seite der x fortpflanzt, wenn wir mit v die Amplitude in der Grenzfläche bezeichnen,

$$\zeta_2 = v e^{\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x\cos r + y\sin r}{\lambda}\nu - \frac{\delta_2}{\lambda}\right).$$

Hierin bedeutet, wie § 23, ν den zum Einfallswinkel i gehörigen Brechungsexponenten, der nach § 23 mit dem Absorptionskoefficienten $\varkappa$ durch die Gleichungen verknüpft ist

$$\nu^2 - \frac{\varkappa^2}{\cos^2 r} = n^2 - \varkappa_0^2$$

$$\nu\varkappa = n\varkappa_0,$$

wenn n den Brechungsexponenten und $\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_0$ den Absorptionskoefficienten für senkrechte Incidenz bedeuten. Ferner ist $2\pi\frac{\delta_2}{\lambda}$ die Phasenänderung der gebrochenen Welle. Der die Schwächung der Amplitude darstellende Exponent von e hat hier nicht das negative Vorzeichen, weil alle Werte von x, für welche diese Gleichung gilt, an sich negativ sind, somit der Exponent, wie es einer Abnahme der Amplitude entsprechend sein mufs, negativ infolge des Vorzeichens von x wird.

Die Gleichheit der Ausschläge für $x = 0$ liefert uns jetzt folgende Gleichung

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{y\sin i}{\lambda}\right) + u\, 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{y\sin i}{\lambda} - \frac{\delta_p}{\lambda}\right) =$$
$$= v\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \nu\frac{y\sin r}{\lambda} - \frac{\delta_2}{\lambda}\right).$$

Da $\qquad \nu \sin r = i,$

so können wir setzen

$$2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{y\sin i}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \nu\frac{y\sin r}{\lambda}\right) = \varphi$$

$$2\pi\frac{\delta_p}{\lambda} = \Delta \quad 2\pi\frac{\delta_2}{\lambda} = \Delta_1,$$

somit

$$\sin\varphi + u\sin(\varphi - \Delta) = v\sin(\varphi - \Delta_1).$$

Diese Gleichung zerfällt sofort in zwei, da sie für jeden Wert von φ gelten mufs

$$\sin\varphi + u\cos\Delta\sin\varphi = v\cos\Delta_1\sin\varphi$$
$$u\sin\Delta\cos\varphi = v\sin\Delta_1\cos\varphi$$

oder

$$1 + u\cos\Delta = v\cos\Delta_1 \;\ldots\ldots\; (1)$$
$$u\sin\Delta = v\sin\Delta_1 \;\ldots\ldots\; (2).$$

Die Gleichungen genügen nicht, um die vier Unbekannten u, v, Δ und Δ_1 zu bestimmen, die weiter erforderlichen liefern uns die Gleichung der Differentialquotienten. Es ist zunächst

$$\frac{d\zeta}{dx} = 2\pi\frac{\cos i}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x\cos i + y\sin i}{\lambda}\right),$$

somit für $x = 0$

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_{x=0} = 2\pi\frac{\cos i}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{y\sin i}{\lambda}\right) = 2\pi\frac{\cos i}{\lambda}\cos\varphi.$$

Ebenso erhalten wir

$$\left(\frac{d\zeta_1}{dx}\right)_{x=0} = -2\pi\frac{\cos i}{\lambda}u\cos(\varphi - \Delta).$$

Zur Bildung des dritten Differentialquotienten ist zu beachten, dafs auch die Amplitude eine Funktion von x ist. Nach den in der Einleitung gegebenen und oft benutzten Regeln erhalten wir zuerst

$$\frac{d\zeta_2}{dx} = 2\pi\frac{\varkappa_1}{\lambda}ve^{\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 x}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \nu\frac{x\cos r + y\sin r}{\lambda} - \frac{\delta_2}{\lambda}\right)$$
$$+ 2\pi\frac{\nu\cos r}{\lambda}ve^{\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 x}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \nu\frac{x\cos r + y\sin r}{\lambda} - \frac{\delta_2}{\lambda}\right),$$

somit

$$\left(\frac{d\zeta_2}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 v\sin(\varphi - \Delta_1) + 2\pi\frac{\nu\cos r}{\lambda}v\cos(\varphi - \Delta_1).$$

Die Gleichung zwischen den drei Differentialquotienten wird, wenn wir gleichzeitig durch $\frac{2\pi}{\lambda}$ dividieren,

$$\cos i\cos\varphi - u\cos i\cos(\varphi - \Delta) = \varkappa_1 v\sin(\varphi - \Delta_1) + v\nu\cos r\cos(\varphi - \Delta_1),$$

welche ebenfalls in die zwei zerfällt

$$\cos i - u\cos i\cos\Delta = -\varkappa_1 v\sin\Delta_1 + v\nu\cos r\cos\Delta_1 \;\ldots\ldots\; (3)$$
$$-u\cos i\sin\Delta = \varkappa_1 v\cos\Delta_1 + v\nu\cos r\sin\Delta_1 \;\ldots\ldots\; (4).$$

Zur Berechnung von u und Δ drücken wir in den Gleichungen (3) und (4) v und Δ_1 durch die aus (1) und (2) sich ergebenden Beziehungen in u und Δ aus; wir erhalten

$$\cos i\,(1 - u\cos\Delta) = -\varkappa_1 u \sin\Delta + \nu\cos r\,(1 + u\cos\Delta)$$

$$-u\cos i \sin\Delta = \varkappa_1\,(1 + u\cos\Delta) + \nu u \cos r \sin\Delta.$$

Die beiden Gleichungen ergeben, wie man leicht findet

$$\operatorname{tang}\Delta = -\frac{2\varkappa_1\cos i}{\cos^2 i - \nu^2\cos^2 r - \varkappa_1^2}$$

$$u^2 = \frac{(\cos i - \nu\cos r)^2 + \varkappa_1^2}{(\cos i + \nu\cos r)^2 + \varkappa_1^2}.$$

Der letzten Gleichung können wir auch die Form geben

$$u^2 = \frac{\sin^2(r-i) + \varkappa_1^2\sin^2 r}{\sin^2(r+i) + \varkappa_1^2\sin^2 r}.$$

Wollen wir alles durch den Einfallswinkel i ausdrücken, so können wir schreiben

$$\operatorname{tang}\Delta = -\frac{2\varkappa_1\cos i}{1 - \nu^2 - \varkappa_1^2}$$

$$u^2 = \frac{(\cos i - \sqrt{\nu^2 - \sin^2 i})^2 + \varkappa_1^2}{(\cos i + \sqrt{\nu^2 - \sin^2 i})^2 + \varkappa_1^2}.$$

Es tritt demnach bei der Reflexion an absorbierenden Medien eine Verschiebung der Phase ein, deren Gröfse je nach dem Einfallswinkel verschieden ist, und welche wesentlich von dem Werte des Absorptionskoefficienten abhängt. Ebenso ist die Intensität des reflektierten Lichtes von dem Absorptionskoefficienten abhängig, sie wächst mit dem Wachsen von $\varkappa_1$. Gleichzeitig sehen wir, dafs für vollkommen durchsichtige Medien, $\varkappa_1 = 0$, keine Verschiebung der Phase eintritt, und dafs die Gleichung für u^2 den von Fresnel abgeleiteten Wert liefert.

Als zweiten Hauptfall bezeichneten wir den, wenn die Schwingungen in der Einfallsebene erfolgen. Ist die Gleichung des einfallenden Lichtes

$$\varrho = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x\cos i + y\sin i}{\lambda}\right),$$

so bildet die Schwingungsrichtung mit dem Einfallslot den Winkel $90 - i$ mit dem Durchschnitt der Einfallsebene und der brechenden Fläche den Winkel i. Es ist somit

$$\xi = \sin i \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x\cos i + y\sin i}{\lambda}\right)$$

$$\eta = \cos i \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x\cos i + y\sin i}{\lambda}\right).$$

Setzen wir für die reflektierte Lichtwelle zunächst

$$\varrho_1 = u_s \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos i - y\sin i}{\lambda} - \frac{\delta_s}{\lambda}\right),$$

so erhalten wir für die Komponenten der reflektierten Lichtwelle

$$\xi_1' = -\sin i\, u_s \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos i - y\sin i}{\lambda} - \frac{\delta_s}{\lambda}\right)$$

$$\eta_1' = \cos i\, u_s \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x\cos i - y\sin i}{\lambda} - \frac{\delta_s}{\lambda}\right).$$

Aufser dieser reflektierten Lichtwelle müssen aus den Schwingungen der einfallenden Welle, sofern im Äther überhaupt longitudinale Schwingungen entstehen können, auch longitudinale Schwingungen hervorgehen. Cauchy nimmt an, dafs derartige entstehen. Um indes der Erfahrung Rechnung zu tragen, dafs wir derartige Schwingungen nirgendwo erkennen, nimmt er weiter an, dafs alle Mittel, selbst der freie Äther für dieselben ein äufserst grofses Absorptionsvermögen besitzen, so dafs sie in jeder mefsbaren Entfernung von der Grenze vollständig verschwunden sind. Cauchy nennt deshalb diese Strahlen rayons évanescents. Die beiden Komponenten ξ_1'' und η_1'' der reflektierten longitudinalen Wellen sind im allgemeinen nicht gleicher Phase, deshalb wird die longitudinale Bewegung eine elliptische, welche der Einfallsebene parallel ist. Die Fortpflanzungsrichtung dieser Wellen ist nach Cauchy stets der reflektierenden Fläche parallel, es folgt somit, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben eine von der Richtung der einfallenden Wellen, welche sie bei ihrer Ankunft an die reflektierende Fläche erregen, abhängige ist. Die Amplitude der Bewegung ist an den verschiedenen Stellen der Wellen um so kleiner, je weiter die betrachteten Punkte der Wellenebene von der reflektierenden Fläche entfernt sind, dieselben nehmen nach dem Absorptionsgesetze ab[1]). Ist $\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{k}$ der Absorptionskoefficient dieser Schwingungen, in demselben Sinne wie wir vorher $\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1$ als Absorptionskoefficient der gebrochenen Strahlen bezeichnet haben, und ist l die Wellenlänge der longitudinalen Wellen, so werden die Gleichungen der beiden Komponenten derselben

$$\xi_1'' = \mathfrak{x} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{k}x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{y}{l} - \frac{D_1}{\lambda}\right)$$

$$\eta_1'' = \mathfrak{y} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{k}x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{y}{l} - \frac{D_2}{\lambda}\right).$$

Der Exponent von e mufs hier das negative Vorzeichen haben, da die Abstände x, nach denen hin die Abnahme der Amplituden stattfindet, in der Richtung der positiven x liegen.

Für die Komponenten der gebrochenen Lichtwelle erhalten wir zunächst folgende Gleichungen

$$\xi_2' = v_1 e^{\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x\cos r + y\sin r}{\lambda}\nu - \frac{\delta_s'}{\lambda}\right)$$

$$\eta_2' = v_2 e^{\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x\cos r + y\sin r}{\lambda}\nu - \frac{\delta_s''}{\lambda}\right).$$

Wir schreiben hier die Amplituden der Komponenten nicht als Komponenten einer linearen Schwingung, da im zweiten Medium, in welchem die körperlichen Moleküle mitschwingen, die Phase der beiden Komponenten im Innern des Mediums eine verschiedene sein kann; die Phasenänderung

[1]) Über die verschwindenden Strahlen sehe man *Cauchy*, C. R. T. XXVIII; ihre Ableitung aus den Bewegungsgleichungen des Äthers gibt *Beer*, Poggend. Annal. Bd. XCI. Man sehe auch *Lundquist*, Poggend. Annal. CLIV. p. 188 ff.

haben wir deshalb auch für die erste Komponente mit δ_s', für die zweite mit δ_s'' hezeichnet.

Auch im zweiten Medium pflanzen sich nach Cauchy die in der Grenze erregten longitudinalen Wellen fort, die im übrigen ganz dieselbe Beschaffenheit haben wie im ersten Medium. Ist $\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{k}'$ der Absorptionskoefficient der longitudinalen Wellen, l_1 die Wellenlänge, so werden die Gleichungen der Komponenten

$$\xi_s'' = \mathfrak{x}_1 e^{\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{k}' x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{y}{l_1} - \frac{D_3}{\lambda}\right)$$

$$\eta_s'' = \mathfrak{y}_1 e^{\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{k}' x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{y}{l_1} - \frac{D_4}{\lambda}\right).$$

Auf eine genauere Besprechung der verschwindenden Strahlen, sowie auf eine Durchführung der Rechnungen, in denen auf alle diese Schwingungen in der für den ersten Hauptfall gegebenen Ausführung die Cauchyschen Grenzbedingungen angewandt werden müssen, können wir hier nicht eingehen, da sie zu viel Raum beanspruchen würde. Nur sei darauf hingewiesen, dafs aus der ersten Bedingung

$$\xi + \xi_1 + \xi_s'' = \xi_2 + \xi_s''$$

für $x = 0$ für die Wellenlängen l und l_1 folgt, da die Bedingung für jeden Wert von t gelten mufs

$$\frac{1}{l} = \frac{\sin i}{\lambda} = \frac{1}{l_1},$$

denn nur dann ist die vorhin mit φ hezeichnete Gröfse auf beiden Seiten dieselbe.

Setzt man nun mit Cauchy

$$\mathfrak{k} = \sqrt{\mathfrak{k}_0^2 + \sin^2 i} \qquad \mathfrak{k}' = \sqrt{\mathfrak{k}_0'^2 + \sin^2 r}$$

und weiter mit hinreichender Annäherung

$$\frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1}{\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1} = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{y} + \mathfrak{k}'\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{k}\mathfrak{x} + \mathfrak{k}'\mathfrak{x}_1} = \frac{1}{\sin i \left\{\frac{2\pi}{\lambda \mathfrak{k}_0} - \frac{2\pi}{\lambda \mathfrak{k}_0'}\right\}}$$

und schreibt

$$\frac{2\pi}{\lambda \mathfrak{k}_0'} - \frac{2\pi}{\lambda \mathfrak{k}_0} = \varepsilon\text{ [1]},$$

so wird u_s^2 durch folgende Gleichung gegeben

$$u_s^2 = \frac{[\cos(i+r) + \varkappa_1 \varepsilon \sin i \sin r]^2 \sin^2 i + [\varepsilon \sin^2 i \sin(i+r) - \varkappa_1 \sin r \cos i]^2}{[\cos(i-r) - \varkappa_1 \varepsilon \sin i \sin r]^2 \sin^2 i + [\varepsilon \sin^2 i \sin(i-r) + \varkappa_1 \sin r \cos i]^2} \times$$

$$\times \frac{\sin^2(i-r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r}{\sin^2(i+r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r}.$$

Weiter wird

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta_s}{\lambda} = -\frac{PS + QR}{RS - PQ},$$

wenn

[1]) Man sehe *Beer*, Poggend. Annal. Bd XCI. p. 476.

$$P = \varepsilon \sin^2 i \, [\sin^2 (i + r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r] - \varkappa_1 \sin^2 r$$
$$Q = \varepsilon \sin^2 i \, [\sin^2 (i - r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r] - \varkappa_1 \sin^2 r$$
$$R = \sin i \sin (i + r) \cos (i + r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r \cos i$$
$$S = \sin i \sin (i - r) \cos (i - r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r \cos i.$$

Die Gleichungen sind allerdings in dieser Form gerade nicht bequem zu übersehen und zu handhaben. Wir können sie indes vereinfachen und für die Berechnung der Beobachtung bequemer gestalten.

Zunächst macht Beer die Annahme, daſs für die stark absorbierenden Medien der Einfluſs der Absorption des Lichtes im zweiten Medium derartig überwiegt, daſs der Einfluſs der verschwindenden longitudinalen Strahlen dem gegenüber ganz auſser Acht gelassen werden kann. Wir können bei dieser Annahme die Gröſse ε somit gleich null setzen. Dann wird zunächst

$$u_s^2 = \frac{\cos^2 (i + r) \sin^2 i + \varkappa_1^2 \sin^2 r \cos^2 i}{\cos^2 (i - r) \sin^2 i + \varkappa_1^2 \sin^2 r \cos^2 i} \cdot \frac{\sin^2 (i - r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r}{\sin^2 (i + r) + \varkappa_1^2 \sin^2 r}.$$

Für nicht absorbierende Medien, für welche $\varkappa_1 = 0$, und wenn ebenfalls der Einfluſs der longitudinalen Strahlen verschwindet, also $\varepsilon = 0$, wird

$$u_s^2 = \frac{\cos^2 (i + r) \sin^2 (i - r)}{\cos^2 (i - r) \sin^2 (i + r)} = \frac{\operatorname{tang}^2 (i - r)}{\operatorname{tang}^2 (i + r)},$$

es ergibt sich somit der Fresnelsche Ausdruck. Da dann ferner $P = 0$, $Q = 0$, so ist auch $\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta_s}{\lambda} = 0$, die Reflexion tritt ohne Änderung der Phase ein.

Bequemer werden die Ausdrücke, wenn wir die Brechungsexponenten ν einführen.

Dividieren wir zunächst Zähler und Nenner durch $\sin^2 r$, so wird

$$u_s^2 = \frac{\nu^2 \cos^2 (i - r) + \varkappa_1^2 \cos^2 i}{\nu^2 \cos^2 (i + r) + \varkappa_1^2 \cos^2 i} \cdot u^2,$$

worin wir den zweiten Faktor des Ausdruckes mit u^2 bezeichnet haben, weil er das Quadrat der Amplitude des in der Einfallsebene polarisierten, also senkrecht zu derselben schwingenden Lichtes ist, wenn wir die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich eins setzen. Entwickeln wir den Cosinus und beachten, daſs $\nu \sin r = \sin i$, so können wir schreiben

$$u_s^2 = \frac{(\nu \cos r \cos i - \sin^2 i)^2 + \varkappa_1^2 \cos^2 i}{(\nu \cos r \cos i + \sin^2 i)^2 + \varkappa_1^2 \cos^2 i} \cdot u^2.$$

Durch ähnliche Behandlung der Gleichung für $\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta_s}{\lambda}$ erhält man ohne Mühe

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta_s}{\lambda} = \frac{2\varkappa_1 \{\varkappa_1^2 + \nu^2 \cos^2 r - \sin^2 i\} \cos i}{(\varkappa_1^2 + \nu^2 \cos^2 r - \sin^2 i)^2 \cos^2 i - \nu^2 \cos^2 r \cos^2 2i - \varkappa_1^2}.$$

Für $\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta_p}{\lambda}$ erhielten wir vorhin

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta_p}{\lambda} = - \frac{2\varkappa_1 \cos i}{1 - \nu^2 - \varkappa_1^2}.$$

Für die Phasendifferenz der senkrecht zur Einfallsebene und der parallel zu derselben polarisierten Strahlen

$$\delta = \delta_s - \delta_p$$

ergibt sich nach ziemlich langen aber nicht schwierigen Rechnungen

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\varkappa_1 \sin^2 i \cos i}{(\nu^2 \cos^2 r + \varkappa_1^2) \cos^2 i - \sin^4 i}.$$

Gegen die Theorie von Cauchy hat Ketteler[1]) den Einwand erhoben, dafs man nicht berechtigt sei, zur Entwicklung der Gleichungen für das reflektierte Licht die longitudinalen Schwingungen zu Hülfe zu nehmen, da man nirgendwo die Existenz dieser longitudinalen Schwingungen nachweisen könne. Wir müfsten daraus vielmehr schliefsen, dafs im Äther überhaupt keine longitudinalen Schwingungen bestehen können. Da die longitudinalen Wellen solche sind, in denen Verdichtungen und Verdünnungen sich fortpflanzen, würde aus der Unmöglichkeit des Entstehens longitudinaler Wellen folgen, dafs der Äther überhaupt nicht kompressibel wäre, dafs in demselben Dichtigkeitsänderungen nicht vorkommen können. Ketteler macht auch diese Annahme direkt, eine Annahme, die auch in der neuern Theorie der Brechung des Lichtes eine Stütze findet, welche nach § 23 davon ausgeht, dafs die Dichte des Äthers und seine Elasticität überall dieselbe ist, dafs der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den verschiedenen Medien in dem Mitschwingen der körperlichen Moleküle bedingt ist.

Mit dem Fortfall der longitudinalen Wellen genügen aber die Cauchyschen Kontinuitätsbedingungen nicht mehr, sie liefern für das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht Gleichungen, welche wesentlich von den oben gefundenen verschieden sind. Deshalb hat Ketteler auch dieses Princip fallen lassen und an Stelle desselben den Grundsatz der Gleichheit der elastischen Deformationen an beiden Seiten der Grenzfläche oder genauer der drei Drehungskomponenten und der linearen Dilatationen senkrecht zu der Trennungsfläche eingeführt.

Um die Bedeutung dieser Grenzbedingungen und die aus denselben sich ergebenden Gleichungen zu erkennen, dienen folgende Betrachtungen, die ich einer Mitteilung Kettelers verdanke. Wir denken uns den Äther an beiden Seiten der Grenzfläche in unendlich kleine Parallelepipede zerlegt, deren Seiten den Koordinataxen parallel sind. Im zweiten Medium enthalten diese Parallelepipede neben dem Äther auch die körperlichen Moleküle, von denen Ketteler annimmt, dafs sie bei grofser Masse doch nur ein sehr kleines Volumen haben, so dafs auch im zweiten Medium die Parallelepipede wesentlich mit Äther ausgefüllt sind, welcher dieselbe Elasticität und dieselbe Dichtigkeit hat wie im ersten Medium. Durch die an der Grenze ankommenden Schwingungen wirken auf diese Parallelepipede Kräfte ein, welche denselben den Elasticitätsgesetzen entsprechende Änderungen geben; die Parallelepipede werden verschoben, gedreht, im allgemeinen eine Änderung ihres Volumens und ihrer Gestalt erfahren.

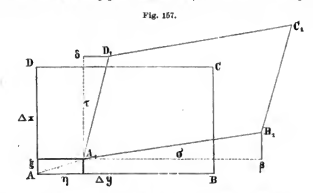
Sei Fig. 157 $ABCD$ etwa eine der Einfallsebene, also den Axen der x und y parallele Grenzfläche eines dieser Parallelepipede und nehmen wir der Einfachheit wegen an, es wirke auf dieselbe eine der XY Ebene parallele Kraft. Die Länge der Seiten sei Δx und Δy. Die Koordinaten

[1]) *Ketteler*, Wiedem. Annal. Bd. I. Bd. III.

des einen Eckpunktes A seien x, y und z, die des zweiten B seien x, $y + \Delta y$, z, die des dritten D seien $x + \Delta x$, y, z, die Lage des vierten ist dann gegeben durch $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, z.

Durch die parallel der XY Ebene wirkende Kraft möge der Punkt A nach A_1 verschoben werden, so daſs seine Koordinaten $x + \xi$ und $y + \eta$ werden. Da das Parallelepiped elastisch ist, so werden die entsprechenden

Fig. 157.



Verschiebungen für alle Punkte des Parallelepipedes, also auch der Grenzfläche verschieden sein, so daſs die Verschiebung irgend eines Punktes eine Funktion der Koordinaten ist; wir können daher schreiben

$$\xi = f_1(x, y, z) \qquad \eta = f_2(x, y, z).$$

Die Lage des Punktes B_1, zu welchem B verschoben ist, läſst sich dann zunächst schreiben

$$x + f_1(x, y, z)$$
$$y + \Delta y + f_1(x, y, z).$$

Da nach unserer Voraussetzung die Werte Δx nnd Δy verschwindend klein sind, können wir in den beiden Ausdrücken schreiben

$$f_1(x, y, z) = \xi + \frac{d\xi}{dy}\Delta y; \quad f_2(x, y, z) = \eta + \frac{d\eta}{dy}\Delta y.$$

Denn es bedeutet z. B. $\frac{d\xi}{dy}$ die Veränderung von ξ für einen um die Längeneinheit von A in der Richtung der y entfernten Punkt, vorausgesetzt, daſs sich für jedes dy auf dieser Strecke ξ um die gleiche Gröſse $d\xi$ ändert. Da wir Δy ausdrücklich als sehr klein angenommen haben, können wir auf dieser $d\xi$ für jedes dy ohne Ungenauigkeit als gleich annehmen. Dann werden die Koordinaten des Punktes B_1

$$x + \xi + \frac{d\xi}{dy}\Delta y; \quad y + \Delta y + \eta + \frac{d\eta}{dy}\Delta y.$$

In ganz entsprechender Weise können wir die Koordinaten des verschobenen Punktes D_1 schreiben

$$x + \Delta x + \xi + \frac{d\xi}{dx}\Delta x; \quad y + \eta + \frac{d\eta}{dx}\Delta x$$

und die des vierten Eckpunktes des verschobenen Vierecks C_1

$$x + \Delta x + \xi + \frac{d\xi}{dx}\Delta x + \frac{d\xi}{dx}\Delta y$$

$$y + \Delta y + \eta + \frac{d\eta}{dx}\Delta x + \frac{d\eta}{dy}\Delta y.$$

Daraus folgt, dafs das Rechteck $ABCD$ verschoben und in das Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ übergegangen ist, dessen Seiten gegenüber den entsprechenden Seiten des Rechtecks eine Verlängerung erfahren haben.

Setzen wir die Verlängerung der Seite AB gleich β, also

$$A_1B_1 = AB(1+\beta) = \Delta y(1+\beta),$$

so können wir, da die elastischen Verschiebungen der Moleküle gegen die ursprünglichen Abstände derselben immer sehr klein sind, sie stehen ja zu diesen Abständen in demselben Verhältnisse, wie die Veränderung des ganzen Körpers in der betreffenden Dimension zu der Ausdehnung des ganzen Körpers parallel dieser Dimension, einfach schreiben

$$A_1B_1 = \Delta y\left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right) \cdot \cdot \quad \beta = \frac{d\eta}{dy}.$$

Strenge ist

$$A_1B_1 = \sqrt{\Delta y^2\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 \Delta y^2}.$$

Wegen der Kleinheit des zweiten Gliedes unter dem Wurzelzeichen, oder auch, weil bei der Entwicklung der Wurzel in eine Reihe nur das Quadrat dieses kleinen Quotienten vorkommt, können wir denselben vernachläfsigen; dann ergibt sich aber für β der angegebene Wert.

Ebenso können wir für die zweite Seite des Parallelogramms A_1D_1 setzen

$$A_1D_1 = \Delta x(1+\alpha) = \Delta x\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)$$

$$\alpha = \frac{d\xi}{dx}.$$

Für die Gröfse der Drehung, welche die Seite AB erfahren hat, den Winkel σ erhalten wir

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{B_1\beta}{A_1\beta} = \frac{\frac{d\xi}{dy}\Delta y}{\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)\Delta y}.$$

Wegen der Kleinheit von σ können wir zunächst die Tangente gleich dem Bogen und wegen der Kleinheit von $\frac{d\eta}{dy}$ weiter setzen

$$\sigma = \frac{d\xi}{dy}\left(1 - \frac{d\eta}{dy}\right) = \frac{d\xi}{dy},$$

da wir das Produkt $\frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{d\xi}{dy}$ vernachläfsigen dürfen. Ebenso erhalten wir für die Drehung der Seite AD

$$\tau = \frac{d\eta}{dx}.$$

Die Differenz

$$\sigma - \tau = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$$

mifst die Drehung, welche die Grenzfläche als solche erfahren hat. Denn wir können uns die Änderung der Lage und Gestalt der Grenzfläche unseres Parallelepipeds in folgender Weise entstanden denken. Wir drehen zunächst das ganze Viereck als solches im Sinne der Drehung σ um einen Winkel w, und dann um die Deformation desselben hervorzubringen die Seite AB um den Winkel u weiter, so dafs $u + w = \sigma$ wird, die Seite AD dagegen in dem entgegengesetzten Sinne um denselben Winkel u zurück, so dafs $u - w$ gleich der für diese Seite gefundenen Drehung wird. Die Winkel u und w sind dann durch die beiden Gleichungen bestimmt

$$u + w = \sigma$$
$$u - w = \tau$$

und ergeben

$$\sigma - \tau = 2w,$$

so dafs diese Differenz gleich dem doppelten Winkel wird, um den das Viereck als solches gedreht ist. Die Summe $\sigma + \tau$ würde die Gröfse der Deformation des Vierecks messen.

Betrachten wir jetzt anstatt der einen Grenzfläche das ganze Parallelepiped und nehmen an, die Kraft sei beliebig gerichtet. Für die beiden Seiten Δx und Δy sind in dem Falle die Verlängerungen α und β durch dieselben Ausdrücke, für die dritte Seite Δz, wie wohl nicht mehr besonders abgeleitet zu werden braucht, durch einen ganz entsprechenden Ausdruck, $\gamma = \frac{d\zeta}{dz}$, gegeben, so dafs die drei Seiten des Parallelepipeds werden

$$\Delta x \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right) \quad \Delta y \left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right) \quad \Delta z \left(1 + \frac{d\zeta}{dz}\right).$$

Das Volumen des durch die Wirkung der Kraft deformierten Parallelepipedes ist

$$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)\left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right)\left(1 + \frac{d\zeta}{dz}\right),$$

da wir bei Berechnung des Volumens einen verschwindend kleinen Fehler begehen, wenn wir den deformierten Körper noch als ein mit diesen veränderten Seiten beschriebenes Parallelepiped ansehen. Die Volumänderung ausgedrückt in Bruchteilen des ursprünglichen Volums erhalten wir, indem wir von dem soeben bestimmten Volumen das ursprüngliche, $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ abziehen und die Differenz durch das ursprüngliche dividieren. Dieser Quotient wird, wenn wir die Produkte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ als verschwindend klein vernachläfsigen,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Durch die Einwirkung dieser Kraft erhält das Parallelepiped eine Drehung, die wir als die resultierende Drehung aus den drei Drehungen um die drei Koordinatenaxen bestimmen können. Die Drehung um die Z Achse ist jene, welche wir vorher berechnet haben, denn dieselbe ist

diejenige, welche ein der XYEbene paralleler Schnitt erfährt. Dieselbe ist somit

$$\Psi = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}.$$

In ganz der gleichen Weise bestimmen sich die Drehungen X nm die YAxe und Φ nm die XAxe, so dafs

$$\Phi = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}; \quad X = \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}.$$

Die Annahme, welche Ketteler an die Stelle der Canchyschen Kontinuitätsbedingungen setzt, sind dann folgende. Nehmen wir zwei der vorhin besprochenen Parallelepipede, die in der Grenzfläche znsammenstofsen, eines im ersten Mittel, eines im zweiten Mittel, nnd welche dort liegen, wo das einfallende Licht die Grenzfläche trifft, also im Koordinatenanfangspunkte, so ist

Erstens: die dnrch die im ersten Mittel, also die ankommenden und reflektierten Schwingungen eintretende Verlängerung der dem Einfallslote parallelen Seite des im ersten Medium liegenden Parallelepipedes gleich der durch die Schwingungen im zweiten Medium eintretenden Verlängerung derselben Seite des im zweiten Medium liegenden Parallelepipedes.

Zweitens: die Drehung beider Parallelepipede durch die im ersten und die im zweiten Mittel stattfindenden Schwingungen die gleiche. Dazn müssen somit die drei Drehungskomponenten einzeln gleich sein für das im ersten und für das im zweiten Medium liegende Parallelepiped.

Man sieht, diese Bedingungen sind im Grunde nichts anders als die eines kontinuierlichen Überganges der Bewegung aus dem ersten in das zweite Medium.

Zn diesen beiden Bedingungen fügt Ketteler als dritte diejenige, welche die Unmöglichkeit der longitndinalen Wellen einschliefst, nämlich dafs sowohl im ersten als im zweiten Medium der Äther nicht zusammendrückbar sei, somit dafs $\frac{\Delta V}{V}$ sowohl für das erste als anch für das zweite Medium gleich null sei.

Schwingen die Ätherteilchen im einfallenden Lichte senkrecht zur Einfallsebene, entsprechend der Gleichung

$$\zeta = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x \cos i + y \sin i}{\lambda}\right),$$

so ist in allen drei Wellen $\eta = 0$, $\xi = 0$. Da keine Verschiebung parallel der XAxe stattfindet, ist $\frac{d\xi}{dx}$ für beide Parallelepipede gleich null; die erste Bedingung liefert keine Gleichung.

Da die wirksame Kraft normal zur Einfallsebene wirkt, parallel der Axe der Z kann keine Drehung um die ZAxe eintreten, ist die oben mit Ψ bezeichnete Drehungskomponente gleich Null. Dagegen kann eine Drehung um die XAxe und nm die YAxe eintreten, es mufs daher

$$\Phi_1 = \Phi_2, \qquad X_1 = X_2,$$

wenn die Zeichen 1 und 2 die Komponenten der Drehung für das erste und zweite Medium bedenten.

Da wie erwähnt $d\xi = 0$, $d\eta = 0$, so liefern die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_1 = \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)_2; \quad \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_2.$$

Die Gleichungen der reflektierten und gebrochenen Wellen sind, wie wir sahen

$$\zeta_1 = u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos i - y \sin i}{\lambda} - \frac{\delta_p}{\lambda}\right)$$

$$\zeta_2 = v e^{\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa_1 x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x \cos r + y \sin r}{\lambda} \nu - \frac{\delta_2}{\lambda}\right).$$

Bilden wir die oben gefundenen Differentialquotienten nach y, so wird bei der schon vorhin benutzten Schreibweise

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin i \sin \varphi + u \frac{2\pi}{\lambda} \sin i \sin(\varphi - \Delta) = v \frac{2\pi}{\lambda} \nu \sin r \sin(\varphi - \Delta_1).$$

Da

$$\frac{\sin i}{\lambda} = \frac{\sin i}{\lambda} = \frac{\nu \cdot \sin r}{\lambda},$$

so wird die Gleichung

$$\sin \varphi + u \sin(\varphi - \Delta) = v \sin(\varphi - \Delta_2),$$

fällt also mit der ersten Cauchyschen zusammen. Da die zweite Cauchysche Gleichung mit der zweiten Kettelerschen identisch ist, liefern somit die Kettelerschen Bedingungen für das parallel der Einfallsebene polarisierte Licht ganz dieselben Gleichungen wie die Cauchyschen Bedingungen, und führen deshalb auch zu ganz demselben Resultat.

Schwingt das Licht in der Einfallsebene, so erhalten wir in allen Wellen Komponenten parallel x und parallel y. Wir erhalten demnach aus der ersten Bedingung, da nur die xKomponente eine Verlängerung der dem Einfallslote parallelen Seite der Parallelepipede bewirken kann,

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2 \cdots\cdots (1)$$

oder

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi_1}{dx} = \frac{d\xi_2}{dx}.$$

Da in den Gleichungen für die Schwingungen z nicht vorkommt, somit $\frac{d\xi}{dz} = 0$ $\frac{d\eta}{dz} = 0$, da ferner $\zeta = 0$ somit $d\zeta = 0$, so sind die beiden Drehungskomponenten Φ und X gleich null, es bleibt nur die dritte, welche die Gleichung liefert

$$\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right)_2 \cdots\cdots (2).$$

Eine dritte Gleichung liefert die Bedingung der Nichtzusammendrückbarkeit des Äthers, nach welcher

$$\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)_2 = 0.$$

Dieselbe gibt, da $\frac{d\zeta}{dz}$ in beiden Medien für sich Null ist, und da weiter nach der ersten Gleichung

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_2,$$

als dritte Gleichung

$$\left(\frac{d\eta}{dy}\right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dy}\right)_2 \cdots\cdots (3).$$

Die drei auf diese Weise zu bildenden Gleichungen zerfallen gerade wie die zwei für den ersten Hauptfall in je zwei Gleichungen, so daſs wir im ganzen 6 Gleichungen haben, welche ausreichen, um die in diesem Fall vorhandenen 6 Unbekannten, u_s, δ_s, v_1, v_2, δ_s' und δ_s'' zu bestimmen. Wenn auch die Rechnungen wegen der fehlenden longitudinalen Strahlen einfacher sind als mit den Cauchyschen Bedingungen, so würden dieselben doch hier zu viel Raum beanspruchen. Wir übergehen sie daher, indem wir auf die erwähnten Abhandlungen von Ketteler verweisen, um so mehr, da sie zu denselben Resultaten führen wie die Cauchyschen, wenn in ihnen die Gröſse ε, welche von den longitudinalen Strahlen herrührt, gleich null gesetzt wird.

Für die Theorie der Metallreflexion ist demnach die Annahme von longitudinalen Strahlen nicht erforderlich.

§ 86.

Beobachtungen über die Reflexion an Metallen. Die Theorie der Reflexion an stark absorbierenden Medien führt nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen zu dem Resultate, daſs das reflektierte Licht im allgemeinen elliptisch polarisiert sein muſs. Daſs das der Fall ist, hat Neumann[1]) an den ausführlichen Beobachtungen Brewsters[2]) über die Reflexion an Metallen nachgewiesen, indem er zeigte, daſs dieselben alle in dieser Annahme ihre Erklärung finden.

Brewsters Angaben sind im wesentlichen folgende. Wenn ein von einem Metallspiegel zurückgeworfener Lichtstrahl durch einen Doppelspath zerlegt wird, so bemerkt man, daſs er zum Teil polarisiert ist. Die Polarisation ist am stärksten bei der Zurückwerfung an Bleiglanz, am schwächsten bei der Reflexion von Silber. Der Winkel, unter welchem das Licht reflektiert werden muſs, damit die Wirkung am deutlichsten hervortritt, ist ungefähr 75^0, verändert sich jedoch von einem Metalle zum andern. Durch mehrfache Reflexion, bei konstanter Einfallsebene, nimmt die Menge des polarisierten Lichtes zu, und durch hinreichend oft wiederholte Reflexion wird das Licht vollständig in der Einfallsebene polarisiert. Läſst man das Licht einer Wachskerze von Stahlplatten reflektieren, so ist bei Einfallswinkeln zwischen 60^0 und 80^0 das Licht nach achtmaliger Reflexion vollständig in der Einfallsebene polarisiert; bei Bleiglanz, Blei, Kobalt genügt eine geringere Anzahl, bei Silber jedoch bedarf es einer bedeutend gröſseren Anzahl von Reflexionen.

[1]) *Neumann*, Poggend. Annal. Bd. XXVI. Bd. XL.
[2]) *Brewster*, Biot Traité de physique. T. IV. p. 580. 1816. Philosophical Transactions. 1830. part. II. p. 287. Poggend. Annal. Bd. XXI.

Wendet man zu den Versuchen polarisiertes Licht an, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene einen Winkel von 45° bildet, so ist nach zwei Reflexionen nnter einem bestimmten Einfallswinkel das Licht wieder linear polarisiert, wenn die beiden Reflexionsebenen zusammenfallen. Der Einfallswinkel ist für jedes Metall ein bestimmter, für Stahl 75°, er wird von Brewster der Winkel des Polarisationsmaximums oder schlechthin der Polarisationswinkel genannt; man bezeichnet ihn jetzt gewöhnlich als Haupteinfallswinkel. Die Polarisationsebene nach der zweimaligen Reflexion ist stets eine andere, nnd zwar liegt sie an der andern Seite der Einfallsebene, so zwar, dafs die Einfallsebene den spitzen Winkel, welchen die Polarisationsebene in der zweiten Lage mit der in der Lage vor der Reflexion bildet, schneidet.

Nach einer Reflexion ist das Licht weder gewöhnliches Licht, noch geradlinig polarisiertes. Ersteres kann es deshalb nicht sein, weil es nach einer zweiten Reflexion geradlinig polarisiert ist. Läfst man das zweimal reflektierte Licht noch ein drittes Mal reflektieren, so wird es wieder ebenso beschaffen wie nach der ersten Reflexion, dnrch eine vierte Reflexion wieder geradlinig u. s. f., so dafs das Licht immer nach einer geraden Anzahl von Reflexionen geradlinig, nach einer ungeraden Anzahl jedoch teilweise polarisiert ist wie nach einmaliger Reflexion.

Brewster schon nannte das einmal reflektierte Licht elliptisch polarisiert; er verband jedoch mit dieser Bezeichnung einen ganz andern Begriff, wie wir nach dem Vorgange Fresnels damit verbinden.

Neumann zeigte indes, dafs das Licht in der That elliptisch polarisiert ist, das heifst, dafs die Ätherteilchen in elliptischen Bahnen sich bewegen, indem er die sämtlichen von Brewster beobachteten Thatsachen aus folgenden zwei Grundsätzen ableitete:

1) Die Intensität eines von einer Metallfläche reflektierten Lichtstrahles ist verschieden, je nachdem seine Polarisationsebene in der Einfallsebene lag, oder zu ihr senkrecht war. In dieser Hinsicht verhalten sich die Metallflächen wie die Oberflächen durchsichtiger Körper bei der partiellen Reflexion, nicht wie bei der totalen Reflexion. Das Verhältnis der Intensitäten der parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiert reflektierten Strahlen hängt ab von dem Einfallswinkel, und zwar wird die Intensität der reflektierten Strahlen, welche senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sind, am kleinsten, wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich ist, ohne jedoch jemals gleich Null zu werden. Von diesem Einfallswinkel nimmt ihre Intensität zu, sowohl wenn der Einfallswinkel gröfser wird, als wenn er kleiner wird; wenn der Winkel 0° oder 90° wird, so ist ihre Intensität gleich derjenigen der parallel der Einfallsebene polarisierten Strahlen.

2) Zwei an einer Metallfläche reflektierte Strahlen, deren einer parallel, der andere senkrecht gegen die Einfallsebene polarisiert ist, verhalten sich so, dafs der eine, nämlich der parallel polarisierte, dem andern um den Bruchteil einer Undulationslänge voraus ist; in so weit ist also die Metallreflexion der totalen Reflexion ähnlich. Bei dem Winkel des Polarisationsmaximums beträgt die Verzögerung immer eine viertel Wellenlänge.

Es ist leicht zu zeigen, wie hieraus die Erscheinungen sich den Brewsterschen Beobachtungen gemäfs ergeben.

Wie wir in § 130 des ersten Teiles sahen, geben zwei senkrecht gegen einander gerichtete Schwingungen, wenn sie mit irgend einer Phasendifferenz zusammentreffen, oder zwei senkrecht gegen einander gerichtete Schwingungen verschiedener Intensität bei einer Phasendifferenz von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge durch Interferenz zu einer elliptischen Bewegung des von beiden Komponenten gleichzeitig getroffenen Punktes Anlafs. Wenn demnach bei der Reflexion von Metallen die Schwingungen des der Einfallsebene parallel polarisierten Lichtes immer eine gröfsere Intensität haben als die senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Strahlen, so mufs, wenn die Strahlen durch Reflexion zugleich eine Phasendifferenz erhalten, immer durch dieselbe elliptisch polarisiertes Licht entstehen.

Wenn bei der Reflexion polarisierten Lichtes, dessen Polarisationsebene unter einem Winkel von 45° gegen die Einfallsebene geneigt ist, unter einem bestimmten Winkel die Phasendifferenz der beiden Strahlen gerade eine viertel Wellenlänge beträgt, so erteilt eine zweimalige Reflexion denselben die Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge. Durch das Zusammenwirken der beiden Strahlen mufs dann wieder geradlinig polarisiertes Licht entstehen. Wäre die Amplitude beider Schwingungen dieselbe, so müfste die Richtung der Schwingungen senkrecht sein zu derjenigen, welche die Schwingungen des einfallenden Lichtes besafsen, oder die Polarisationsebene müfste um 90° gedreht sein, die Einfallsebene müfste den Winkel, welchen die Polarisationsebene in ihrer neuen Lage mit der frühern bildet, halbieren. Ist die Amplitude kleiner in den senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Strahlen, so mufs die Drehung der Polarisationsebene weniger als 90° betragen. Die Brewsterschen Beobachtungen haben letzteres ergeben.

Bei einer nochmaligen Reflexion wird die Phasendifferenz wieder um eine viertel Wellenlänge zunehmen, das geradlinig polarisierte Licht wird also wieder elliptisch polarisiert, bei einer vierten Reflexion wird die Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge, das Licht also wieder geradlinig polarisiert. Überhaupt mufs nach einer ungeraden Anzahl von Reflexionen das Licht elliptisch, nach einer geraden Anzahl geradlinig polarisiert sein, wie es die Brewsterschen Beobachtungen ergeben.

Da aber die zur Einfallsebene senkrecht polarisierte Komponente der Strahlen eine stärkere Schwächung der Amplitude erhalten, so mufs auch nach den mehrfachen Reflexionen die Polarisationsebene des reflektierten Lichtes der Reflexionsebene immer näher rücken, und wenn die Reflexionen oft genug wiederholt sind, so dafs die zur Einfallsebene senkrecht polarisierte Komponente verschwindet, mit der Reflexionsebene zusammenfallen. Dieselbe Anzahl von Reflexionen mufs dann aber bei Anwendung unpolarisierten Lichtes bewirken, dafs das Licht vollständig in der Einfallsebene polarisiert sei. Auch das zeigen die Versuche Brewsters, indem er fand, dafs bei der Reflexion von Stahl ein unter dem Azimuthe 45° polarisierter Strahl nach achtmaliger Reflexion ganz in der Einfallsebene polarisiert war, und dafs ebenso gewöhnliches Licht nach einer gleichen Anzahl Reflexionen geradlinig und der Einfallsebene parallel polarisiert war.

Eine genauere Untersuchung des von Metallen reflektierten Lichtes

haben später Jamin[1]) sowie Quincke[2]) vorgenommen. Quincke benutzte hauptsächlich zu seinen Messungen den Babinetschen Kompensator, mit welchem man nach § 84 direkt den Phasenunterschied der beiden Komponenten und das Amplitudenverhältnis derselben erhält. Ist das einfallende Licht unter dem Azimute α polarisiert, so sind seine beiden Komponenten $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, erstere senkrecht, letztere parallel der Einfallsebene polarisiert. Wird erstere nach der Reflexion $S\sin\alpha$, letztere $P\cos\alpha$, und nennen wir das Azimut der Polarisationsebene, wenn der elliptisch polarisierte Strahl durch den Babinetschen Kompensator wieder in geradlinig polarisiertes Licht verwandelt ist, β, so ist

$$\tang\beta = \frac{S}{P}\tang\alpha = C\tang\alpha$$
$$C = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}.$$

Gibt man dem einfallenden Lichte das Polarisationsazimuth 45^0, so ist $\tang\alpha = 1$ und $C = \tang\beta$.

Das Azimut β nennt man das Azimut der wiederhergestellten Polarisation und in dem Falle, dafs der Einfallswinkel der Polarisations- oder der Haupteinfallswinkel ist, für welchen die Phasendifferenz eine viertel Wellenlänge ist, das Hauptazimut. Nach den Versuchen Brewsters und der von Neumann ihnen gegebenen Deutung ist die Tangente des Hauptazimutes der Wert von C in dem Falle, in welchem das Licht der geradlinigen Polarisation am nächsten kommt, weil dort S seinen kleinsten Wert hat, sie liefert also den kleinsten Wert von C.

Um die Resultate mit der Theorie vergleichen zu können, wollen wir die Gleichungen für das reflektierte Amplitudenverhältnis und die Phasendifferenz der beiden Wellen etwas umformen. Ist $\alpha = 45^0$, $\tang\alpha = 1$, so ist

$$\tang^2\beta = \frac{S^2}{P^2} = \frac{u_s^2}{u_p^2} = \frac{(\nu\cos r\cos i - \sin^2 i)^2 + \varkappa_1^{\,2}\cos^2 i}{(\nu\cos r\cos i + \sin^2 i)^2 + \varkappa_1^{\,2}\cos^2 i}$$

$$\tang 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\varkappa_1\sin^2 i\cos i}{(\nu^2\cos^2 r + \varkappa_1^{\,2})\cos^2 i - \sin^4 i} \quad \ldots\ldots \text{I.}$$

Wir führen zwei neue Variable U und μ ein, die wir so bestimmen, dafs

$$\nu\cos r = U\cos\mu \qquad \varkappa_1 = U\sin\mu$$
$$\nu^2\cos^2 r + \varkappa_1^{\,2} = U^2.$$

Damit wird

$$\tang 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2U\sin\mu\sin^2 i\cos i}{U^2\cos^2 i - \sin^4 i} = \sin\mu\,\frac{2U\sin i\tang i}{U^2 - \sin^2 i\tang^2 i}.$$

Setzen wir

$$\tang w = \frac{\sin i\tang i}{U},$$

so wird

$$\tang 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \sin\mu\tang 2w = \sin\mu\tang\left(2\,\text{arc}\tang = \frac{\sin i\tang i}{U}\right).$$

[1]) *Jamin*, Annales de chim. et de phys. 3. Série. T. XIX. T. XXII.
[2]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXVIII. Bd. CXXIX.

Aus der Gleichung für $\tang^2 \beta$ können wir zunächst entwickeln

$$\cos 2\beta = \frac{2\nu \cos r \sin^2 i \cos i}{(\nu^2 \cos^2 r + \varkappa_1^2) \cos^2 i + \sin^4 i} \quad \ldots \quad \text{II}$$

$$\cos 2\beta = \cos\mu \, \frac{2\, U \sin i \tang i}{U^2 + \sin^2 i \tang^2 i}.$$

Dieser Ausdruck ist aber gleich

$$\cos 2\beta = \cos\mu \sin 2w = \cos\mu \sin\left(2 \operatorname{arc} \tang = \frac{\sin i \tang i}{U}\right).$$

Der Haupteinfallswinkel H ist dadurch bestimmt, dafs $\delta = \frac{1}{4}\lambda$, also $2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$. Da die Tangente von $\frac{\pi}{2}$ unendlich ist, so ist der Haupteinfallswinkel durch die Gleichung gegeben

$$U_1^2 = \frac{\sin^4 H}{\cos^2 H} = \sin^2 H \tang^2 H.$$

Setzen wir das Hauptazimut B, und den dem Haupteinfallswinkel entsprechenden Wert von μ gleich μ_1, so wird

$$\cos 2B = \cos\mu_1.$$

Nach diesen Gleichungen mufs das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht stets gegen das parallel derselben polarisierte Licht eine Verzögerung erfahren, welche von dem Werte null für $i = 0$ mit wachsendem i zunimmt bis $\frac{1}{4}\lambda$ für $i = H$ und bis $\frac{1}{2}\lambda$ für den Einfallswinkel 90°.

Für das Amplitudenverhältnis ergibt sich, dafs dasselbe für $i = 0$ und $i = 90°$ gleich 1 ist, dafs es für alle übrigen Werte kleiner als eins ist, und dafs es, da $\sin 2w$ für $i = H$ seinen gröfsten Wert hat, für den Haupteinfallswinkel am kleinsten sein mufs.

Die Versuche von Jamin und Quincke haben diese Folgerungen der Theorie bestätigt. So gibt Jamin durch direkte Messungen folgende Werte der von Stahl reflektierten Amplituden

Einfallswinkel	S	P	C
85°	0,719	0,951	0,756
80°	0,547	0,945	0,578
75°	0,566	0,946	0,598
70°	0,545	0,915	0,595
60°	0,630	0,897	0,703
40°	0,688	0,780	0,880
20°	0,770	0,780	0,988

Folgende Tabelle enthält eine Beobachtungsreihe von Quincke über die Reflexion an Silber, die wir zur Prüfung der Theorie benutzen wollen, das einfallende Licht war unter dem Azimute 45° polarisiert, bei der Beobachtung wurde ein rotes Glas vor das Auge gehalten, die Zahlen gelten also für rotes Licht:

Einfallswinkel i	β	$C = \text{tang}\ \beta$	δ in $\frac{\lambda}{4}$
25°	45° 39′	1,023	0,039
35°	44° 45′	0,991	0,165
45°	43° 44′	0,957	0,248
55°	43° 12′	0,939	0,389
65°	43° 45′	0,957	0,619
74° 50′	43° 20′	0,943	1
80°	44° 2′	0,967	1,262
85°	45° 14′	1,008	1,621

Um die Beobachtungen mit der Theorie zu vergleichen, haben wir zunächst aus dem Haupteinfallswinkel und dem Hauptazimute den Brechungsexponenten ν_1 bei dem Haupteinfallswinkel und den Absorptionskoefficienten $\varkappa_1$ zu berechnen. Dazu dienen die Gleichungen

$$U_1 = \sin H \text{ tang } H = \sin . 74^0 50' . \text{ tang } 74^0 50'$$

$$\nu_1^2 - \sin^2 H = U_1^2 \cos^2 2B = U_1^2 \cos^2 86^0 40'$$

$$\varkappa_1 = U_1 \sin 2B = U_1 \sin 86^0 40'.$$

Die Gleichungen liefern

$$\nu_1^2 = 0{,}974\,36 \qquad \varkappa_1^2 = 12{,}634$$

$$\nu_1 = 0{,}987\,1 \qquad \varkappa_1 = 3{,}554.$$

Mit Hülfe der im § 23 abgeleiteten Gleichungen für den dem Einfallswinkel i entsprechenden Brechungsexponenten ν und den Absorptionskoefficienten $\varkappa_1$

$$\nu^2 - \varkappa_1^2 = n^2 - \varkappa_0^2$$

$$\nu \varkappa_1 \cos r = n \varkappa_0,$$

berechnen wir weiter den Brechungsexponenten n und den Absorptionskoefficienten $\varkappa_0$ für senkrechte Incidenz, also für $i = 0$, indem wir mit den gefundenen Werten für ν_1 und $\varkappa_1$ die Gleichungen nach n und $\varkappa_0$ auflösen. Die zweite Gleichung liefert

$$\nu^2 \cos^2 r = \nu^2 (1 - \sin^2 r) = \nu^2 - \sin^2 i = \frac{n^2 \varkappa_0^2}{\varkappa_1^2}$$

$$\varkappa_0^2 = \frac{\nu^2 - \sin^2 i}{n^2} \varkappa_1^2,$$

somit

$$\nu^2 - \varkappa_1^2 = n^2 - \frac{\nu^2 - \sin^2 i}{n^2} \varkappa_1^2.$$

Die Gleichung nach n^2 aufgelöst liefert

$$2n^2 = \nu^2 - \varkappa_1^2 + \sqrt{(\nu^2 - \varkappa_1^2)^2 - 4 \sin^2 i . \varkappa_1^2},$$

und diese sofort $\varkappa_0^2$ durch die Beziehung

$$\nu^2 - \varkappa_1^2 = n^2 - \varkappa_0^2$$

$$\varkappa_0^2 = n^2 - (\nu^2 - \varkappa_1^2).$$

Setzen wir die dem Haupteinfallswinkel entsprechenden Werte von ν nnd $\varkappa_1$ in diese Gleichungen ein, so erhalten wir für Silber nach den in obiger Tabelle angegebenen Beobachtungen Quinckes

$$n_0^2 = 0{,}0470 \qquad \varkappa_0^2 = 11{,}706$$
$$n_0 = 0{,}2163 \qquad \varkappa_0 = 3{,}418.$$

Aus den so bestimmten Werten von n_0 und $\varkappa_0$ liefert uns dann die im § 23 abgeleitete Gleichung

$$2\,\nu^2 = n^2 - \varkappa_0^2 + \sin^2 i + \sqrt{4\,n_0^2\varkappa_0^2 + (n_0^2 - \varkappa_0^2 - \sin^2 i)^2},$$

den Wert von ν für jede Incidenz i und wieder die Beziehung

$$\nu^2 - \varkappa_1^2 = n^2 - \varkappa_0^2$$

die Werte von $\varkappa_1$. Mit diesen Werten lassen sich die Werte von δ und β nach den Gleichungen I und II oder einer der andern denselben gegebenen Formen berechnen. In folgender Tabelle sind die so berechneten Werte von ν, $\varkappa_1$ und die sich daraus ergebenden für β und δ, letztere in $\frac{\lambda}{4}$ ausgedrückt zusammengestellt. Daneben sind die von Quincke berechneten Werte angegeben, welcher die Rechnung unter der Voraussetzung geführt hat, dafs man U konstant gleich U_1 und ebenso μ konstant gleich $\mu_1 = 2\,B$ setzen könne. Die Voranssetzung fällt, wie man sieht, damit zusammen, dafs man $\varkappa_1$ konstant und ebenso

$$\nu \cos r = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 i} = \text{const.}$$

setzen dürfe.

i	ν	$\varkappa_1$	β			δ in $\frac{\lambda}{4}$		
			beob.	ber.	ber. Q	beob.	ber.	ber. Q
25°	0,517 7	3,450	45° 39′	44° 48′	44° 49′	0,039	0,072	0,070
35°	0,604 2	3,467	44° 45′	44° 38′	44° 37′	0,165	0,146	0,143
45°	0.734 6	3,491	43° 44′	44° 22′	44° 22′	0,248	0,250	0,249
55°	0,845 0	3,514	43° 12′	44° 0′	44° 1′	0,389	0,408	0,404
65°	0,929 6	3,535	43° 45′	43° 33′	43° 36′	0,619	0,640	0,633
74° 50′	0,987 1	3,554	43° 20′	—	—	1	—	—
80°	1,009 0	3,561	44° 2′	43° 25′	43° 29′	1,262	1,270	1,267
85°	1,017 5	3,562	45° 14′	44° 3′	44° 3′	1,621	1,613	1,613

Wie man sieht, stimmen die von Quincke berechneten Werte fast genau mit den nach der strengen Gleichung berechneten Werten überein; in der That ist auch bei dem Silber fast vollständig $\nu^2 - \sin^2 i$ konstant, nämlich sehr nahe für alle Einfallswinkel 0,043, ebenso ändert sich $\varkappa_1$ nur um etwa 3% seines mittleren Wertes.

Die Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen und den berechneten Werten ist weiter ein Beweis für die Folgerung der Brechungstheorie, dafs bei stark absorbierenden Medien der Brechungsexponent sowohl wie der Absorptionskoefficient von dem Einfallswinkel abhängig sind. Bei Silber wächst der Brechungsexponent von 0,216 3 für $i = 0$ bis 1,017 für $i = 85°$.

Ganz ebenso fand Quincke die Theorie in Übereinstimmung bei Versuchen über die Reflexion an Gold und Spiegelfolie; für Gold waren Hauptazimut B und Haupteinfallswinkel H

$$B = 42^0\,47' \quad H = 70^0\,40'.$$

Daraus ergibt sich

$$\nu_1 = 0{,}965\,7 \qquad \varkappa_1 = 2{,}681$$

und hieraus

$$n = 0{,}219\,0 \qquad \varkappa_0 = 2{,}512.$$

Wiederum ist $\nu \,.\, \cos r = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 i}$ fast konstant nahezu 0,21.

Für Spiegelfolie fand sich

$$B = 36^0\,24' \qquad H = 79^0\,31',$$

woraus sich ergibt

$$\nu_1 = 1{,}861\,7 \qquad \varkappa_1 = 5{,}076$$

$$n = 1{,}608 \qquad \varkappa_0 = 4{,}987.$$

Auch hier ist $\nu \cos r$ fast konstant nahezu 1,6.

Jamin[1]) hat bei seinen Versuchen die Abhängigkeit des Haupteinfallswinkels und des Hauptazimutes von der Wellenlänge verfolgt, nachdem schon Brewster gezeigt hatte, dass der Haupteinfallswinkel sich mit der Farbe des Lichtes ändert. Jamin wandte dazu die Methode von Brewster an, indem er den Einfallswinkel aufsuchte, der nach zweimaliger Reflexion das Licht geradlinig polarisierte, und dann das Azimut der wieder hergestellten Polarisation beobachtete. Der so gefundene Einfallswinkel ist der Haupteinfallswinkel; das Hauptazimut ergibt sich dann in folgender Weise. Ist das Azimut des einfallenden Lichtes α, so werden die Komponenten nach der ersten Reflexion $S \sin \alpha$, $P \cos \alpha$, nach der zweiten in derselben Einfallsebene stattfindenden Reflexion werden sie $S^2 \sin \alpha$ und $P^2 \cos \alpha$. Ist β_2 das Azimut der wieder hergestellten Polarisation, so wird

$$\operatorname{tang} \beta_2 = \frac{S^2}{P^2} \operatorname{tang} \alpha = C^2 \operatorname{tang} \alpha$$

$$C = \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \beta_2}{\operatorname{tang} \alpha}} = \operatorname{tang} B.$$

Folgende Tabelle enthält einige der von Jamin gegebenen Werte.

Farbe	Silber		Glocken-metall		Stahl		Zink		Spiegelfolie	
	H	B	H	B	H	B	H	B	H	B
Rot	75° 0′	40° 59′	74° 15′	28° 46′	77° 4′	16° 29′	75° 11′	17° 9′	76° 14′	28° 37′
D	72° 30′	40° 9′	73° 28′	28° 24′	76° 40′	16° 48′	74° 27′	18° 45′	74° 7′	27° 21′
E	71° 30′	40° 19′	72° 20′	25° 31′	75° 47′	17° 30′	73° 28′	21° 13′	73° 35′	25° 52′
F	69° 34′	39° 46′	71° 21′	23° 55′	75° 8′	18° 29′	72° 32′	22° 44′	73° 4′	26° 15′
H	66° 12′	39° 50′	70° 2′	23° 21′	74° 32′	20° 7′	71° 18′	25° 18′	71° 56′	28° 0′

[1]) *Jamin,* Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. XXII. Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

In der folgenden Tabelle sind die aus diesen Angaben berechneten Brechungsexponenten ν_1 und n, sowie die Absorptionskoefficienten $\varkappa_1$ und $\varkappa_0$ zusammengestellt für Silber, Stahl und Spiegelfolie.

Farbe	Silber		Stahl		Spiegelfolie	
Rot	ν_1 = 1,089 4 n = 0,522 9	$\varkappa_1$ = 3,569 $\varkappa_0$ = 3,430	ν_1 = 3,913 n = 3,873	$\varkappa_1$ = 2,368 $\varkappa_0$ = 2,301	ν_1 = 2,355 n = 2,212	$\varkappa_1$ = 3,333 $\varkappa_0$ = 3,248
D	ν_1 = 1,081 0 n = 0,536 9	$\varkappa_1$ = 2,982 $\varkappa_0$ = 2,830	ν_1 = 3,558 n = 3,516	$\varkappa_1$ = 2,272 $\varkappa_0$ = 2,196	ν_1 = 2,177 n = 2,035	$\varkappa_1$ = 2,759 $\varkappa_0$ = 2,648
E	ν_1 = 1,058 0 n = 0,491 5	$\varkappa_1$ = 2,795 $\varkappa_0$ = 2,633	ν_1 = 3,281 n = 3,236	$\varkappa_1$ = 2,195 $\varkappa_0$ = 2,127	ν_1 = 2,259 n = 2,138	$\varkappa_1$ = 2,532 $\varkappa_0$ = 2,425
F	ν_1 = 1,042 9 n = 0,487 3	$\varkappa_1$ = 2,473 $\varkappa_0$ = 2,295	ν_1 = 3,066 n = 3,028	$\varkappa_1$ = 2,189 $\varkappa_0$ = 2,136	ν_1 = 2,139 n = 2,005	$\varkappa_1$ = 2,493 $\varkappa_0$ = 2,380
H	ν_1 = 0,986 1 n = 0,410 0	$\varkappa_1$ = 2,041 $\varkappa$ = 1,838	ν_1 = 2,829 n = 2,762	$\varkappa_1$ = 2,659 $\varkappa_0$ = 2,166	ν_1 = 1,888 n = 1,722	$\varkappa_1$ = 2,418 $\varkappa_0$ = 2,220

Die Absorptionskoefficienten des Silbers bei senkrechter Incidenz hat Wernicke[1]) direkt gemessen; die von ihm gefundenen Werte stimmen vortrefflich mit den oben berechneten überein, er findet in fünf verschiedenen Silberschichten für

C	Werte	zwischen	3,44	und	3,86
D	„	„	3,05	„	3,54
E	„	„	2,77	„	3,18
F	„	„	2,53	„	2,94
G	„	„	2,26	„	2,59
$\frac{1}{2}(G-H)$	„	„	2,16	„	2,49.

Die Brechungsexponenten des Lichtes nehmen nach diesen Versuchen in den Metallen, welche für alle Farben sehr grosse Absorptionskoefficienten besitzen, mit den Wellenlängen ab, die Dispersion in Metallen würde also gerade die umgekehrte sein als in den durchsichtigen Medien. Aufserdem zeigen die Zahlen, wie schon die vorher aus den Versuchen von Quincke berechneten, dafs die Metalle sehr verschiedene Brechungsexponenten haben; Silber und Gold haben Brechungsexponenten, die erheblich kleiner als eins sind, Spiegelfolie und Stahl zeigen sehr grofse Brechungsexponenten. Der eigentümliche Gang in den Werten der Hauptazimute hat hauptsächlich auf die Absorptionskoefficienten Einflufs. Der gegen das blaue Ende des Spektrums stetig abnehmende Wert des Hauptazimutes bei Silber bedingt oder vielmehr ist bedingt durch das Abnehmen des Absorptionskoefficienten. Bei Stahl wächst das Hauptazimut, weil der Absorptionskoefficient für alle Farben nahezu denselben Wert hat.

Ganz entsprechend wie bei den Metallen sind nach den Versuchen von van der Willigen[2]), E. Wiedemann[3]), Lundquist[4]) die Reflexionserscheinungen an nicht metallischen aber stark absorbierenden Medien, welche in Substanz oder koncentrierten Lösungen anomale Dispersion zeigen, und welche demzufolge auch ein metallisches Aussehen, metallischen Glanz und Ober-

[1]) *Wernicke,* Poggend. Annal. Erg.-Bd. VIII.
[2]) *van der Willigen,* Poggend. Annal. Bd. CXVII.
[3]) *E. Wiedemann,* Poggend. Annal. Bd. CLI.
[4]) *Lundquist,* Poggend. Annal Bd. CLII.

flächenfarbe zeigen. Die Reflexion ist eine metallische gerade für jene Strahlen, welche stark absorbiert werden, für welche sich also die Mittel wie Metalle verhalten. Die Absorptionskoefficienten sind indes erheblich kleiner als in den Metallen. So gibt Lundquist für die Reflexion an Fuchsin in Glas für die Linie E, die etwa der Mitte des Absorptionsstreifens im Fuchsin entspricht,

$$H = 51^0\,48' \quad B = 15^0\,48'.$$

Daraus folgt

$$\nu_1 = 1{,}158 \quad \varkappa_1 = 0{,}523\,3 \quad \varkappa_1 \cos r_1 = 0{,}384\,4.$$
$$n = 1{,}108 \quad \varkappa_0 = 0{,}401\,9.$$

Ebenso wie sich der Brechungsexponent nur wenig mit der Incidenz in dem Falle ändert, so auch der Absorptionskoefficient, dessen Wert durch $\varkappa_1 \cos r$ gemäfs § 23 gegeben ist, da das Licht sich in der Richtung fortpflanzt, welche mit dem Einfallslote den Winkel r bildet.

Wenn so auch die Erscheinungen der Reflexion mit der entwickelten Theorie recht gut übereinstimmen, so liegen doch manche Erfahrungen vor, welche derselben nicht entsprechen, welche sie mindestens noch lückenhaft erscheinen lassen.

Zunächst sei nur erwähnt, dafs, wie Jochmann[1]) gezeigt hat, mit den Messungen Quinckes ebenso gut von Neumann aufgestellte Gleichungen übereinstimmen, welche Wild[2]) mitgeteilt hat, obwohl dieselben ohne Zweifel auf ganz anderen Voraussetzungen beruhen als die oben benutzten. Neumann hat die Ableitung seiner Formeln nicht mitgeteilt.

Weiter aber ergibt sich aus Versuchen Quinckes über die Reflexion an Metallen in andern Medien als in Luft keineswegs jener Brechungsexponent des Lichtes für den Übertritt aus diesen Medien in das Metall, welchen die Theorie verlangt. Ist n der Brechungsexponent des Lichtes bei senkrechter Incidenz bei dem Übertritt aus Luft, so ist nach dem Huyghensschen Princip, wenn v die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft, v_1 die im Metalle ist,

$$n = \frac{v}{v_1};$$

wird das Licht in einem andern Medium reflektiert, dessen Brechungsexponent gleich σ ist, bei dem Übertritt des Lichtes aus Luft in dieses Medium, so dafs

$$\sigma = \frac{v}{v'},$$

so mufs der Brechungsexponent n_1 zwischen diesem Medium und Metall

$$n_1 = \frac{v'}{v_1} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{v}{v_1} = \frac{n}{\sigma}$$

sein.

Quincke[3]) hat die Reflexionen an Silberplatten in Luft und in verschiedenen andern Medien beobachtet; folgende Tabelle enthält einige der von demselben erhaltenen Resultate.

[1]) *Jochmann*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVI.
[2]) *Wild*, Neue Denkschriften der schweizerischen Gesellsch. für Naturwissensch. Bd. XV p. 20.
[3]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXVIII.

Reflexionen an Silber.

in	H	B	σ	n_1	$\frac{n}{\sigma}$	$\varkappa_0$
Luft	74° 19′	43° 48′	1	0,141 4	0,141 4	3,334
Wasser	71° 28′	44° 3′	1,336	0,102 5	0,105 8	2,662
Terpentin	69° 16′	43° 21′	1,474	0,151 0	0,096	2,300
Luft	74° 50′	43° 20′	1	0,216 3	0,216 3	3,418
Flintglas	69° 48′	41° 22′	1,626	0,355 0	0,133 0	2,355

Mit Ausnahme des für die Reflexion in Wasser gefundenen Wertes sind die Werte von n_1 sogar gröfser als der für die Reflexion in Luft erhaltene, sie entsprechen somit der Theorie keineswegs. Ebenso ist es mit den Werten $\varkappa_0$; dieselben können nicht davon abhängig sein, aus welchem Mittel bei senkrechter Incidenz das Licht austritt, trotzdem liefern die Beobachtungen sehr verschiedene Werte von $\varkappa_0$.

Aus weitern Versuchen von Quincke[1]) ergibt sich ferner, dafs die Dicke der Metallschicht, an welcher die Reflexion stattfindet, auf die Konstanten der Reflexion von wesentlichem Einflufs ist. Stellt man nämlich in der schon früher erwähnten Weise keilförmige Silberschichten auf Glas her, und läfst von diesen an verschiedenen Stellen Licht reflektieren, so findet man Hauptazimut und Haupteinfallswinkel je nach der Dicke der Schicht verschieden. So erhielt Quincke z. B. an zwei Silberplatten folgende Werte:

Silberplatte No. 51			Silberplatte No. 52		
Dicke der Schicht	H	B	Dicke der Schicht	H	B
0^{mm},000 014	72° 4′	21° 1′	0^{mm},000 015	70°	24° 25′
0^{mm},000 024	72° 7′	33° 58′	0^{mm},000 043	71° 22′	40° 46′
0^{mm},000 040	72° 6′	38° 32′	0^{mm},000 060	71° 13′	45° 7′
0^{mm},000 047	72° 13′	42° 38′	0^{mm},000 075	71° 47′	45° 30′
0^{mm},000 055	72° 27′	43° 57′			

Bei einer Silberplatte von 0^{mm},000 038 Dicke fand Quincke

$$H = 69^0\ 39' \quad B = 31^0\ 17';$$

bei zwei durchsichtigen Platinplatten fand sich

$$H = 77^0\ 34' \text{ und } 75^0\ 23', \quad B = 27^0\ 44' \text{ und } 16^0\ 32'.$$

Man mufs daraus schliefsen, dafs die Reflexion keineswegs, wie die Theorie voraussetzt, in der Grenze stattfindet, dafs Schichten, die mehr als 0,1 Wellenlänge unter der Oberfläche liegen, darauf von wesentlichem Einflufs sind, oder man mufs annehmen, dafs der Brechungsindex und der Absorptionskoefficient der Grenzschicht ein ganz anderer ist, als derjenige des Metalls, und dafs, sobald die Dicke des Metalls unterhalb einer gewissen Grenze hinabgeht, die Beschaffenheit der Schicht, in welcher die Reflexion

[1]) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXXIX.

stattfindet, geändert wird. Auf einen solchen Einfluſs der Grenzschicht würde es auch hinweisen, daſs die aus den Reflexionen in andern Medien als Luft berechneten Brechungsexponenten nicht mit den aus der Theorie folgenden übereinstimmen, sowie daſs die Werte $\varkappa_0$ abhängig sind von dem Medium, in welchem die Reflexion stattfindet. Wie dem auch sei, es läſst sich nicht verhehlen, daſs trotz guter Übereinstimmung in manchen Punkten die Theorie uns über die Gesamtheit der Reflexionserscheinungen an Metallen noch nicht Rechenschaft zu geben vermag.

Noch widerspruchsvoller werden die Resultate nach den Beobachtungen Quinckes[1]), wenn man das in das Metall eingedrungene Licht in Betracht zieht. Metallschichten von Silber, Gold, Platin von so geringer Dicke, daſs das Licht dieselben durchdringen konnte, stellte Quincke in ähnlicher Weise dar, wie wir es § 76 erwähnten[2]). Die Dicke derselben wurde teils aus der Zeit bestimmt, während welcher sich das Metall auf dem Glase abgesetzt hatte, teils aus der Farbe der Newtonschen Ringe, welche eine Luftschicht von derselben Dicke wie das Metall gab. Für Silber endlich, welches zu den Versuchen hauptsächlich angewandt wurde, bestimmte Quincke die Dicke, indem er das Silber durch Auflegen von Jod in Jodsilber verwandelte und in diesem dann die Farben dünner Blättchen beobachtete.

An keilförmigen Metallschichten zeigten sich in der That ähnliche Erscheinungen, wie wenn die Metallschicht eine Luftschicht wäre zwischen zwei für die Newtonschen Farben eingerichteten Gläsern. Sah man nämlich auf eine solche Schicht herab oder durch dieselbe hindurch, so erschienen helle und dunkle Streifen, und zwar fand man stets bei den Dicken

	E_0	E_1	E_2	E_3
im reflektierten Licht	dunkel	hell	dunkel	hell
im durchgehenden Licht	hell	dunkel	hell	dunkel,

wo die Dicken mit steigender Ordnungszahl zunehmen. Bei gröſsern Dicken waren keine Interferenzstreifen mehr wahrzunehmen.

In einer Beziehung zeigten indes die Interferenzstreifen einen wesentlichen Unterschied gegenüber denjenigen in durchsichtigen Medien; für diese ist die Lage der dunklen Streifen gegeben durch den Ausdruck

$$\Delta \cos r = 2n \frac{\lambda_1}{4},$$

worin Δ die Dicke der Schicht bedeutet, in welcher der dunkle Streifen erscheint, wenn das Licht im Innern der Schicht mit dem Einfallslot den Winkel r bildet, n die Reihe der ganzen Zahlen und λ_1 die Wellenlänge des Lichtes ist. Gleichzeitig ist in dem Ausdruck vorausgesetzt, daſs allein schon durch die Reflexionen an den beiden Grenzen der Schicht eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge entsteht. Die Lage der Streifen hängt somit wesentlich von dem Einfallswinkel und der Wellenlänge des angewandten Lichtes ab. Bei den Metallen dagegen war die Lage der Streifen, somit die Dicke der Schicht von dem Einfallswinkel und der Wellenlänge des angewandten Lichtes nicht wesentlich abhängig, die Abstände der hellen und dunklen Streifen waren für rotes und blaues Licht wesentlich dieselben.

---

[1]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXIX, p. 177 ff.
[2]) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXIX, p. 44 ff.

Nehmen wir an, dafs in den Metallen eine regelmäfsige Fortpflanzung des Lichtes zustande kommt, so würde die Unabhängigkeit der Schichtdicke vom Einfallswinkel bedeuten, dafs der Winkel r im Innern der Metallschicht für alle Incidenzen derselbe ist, somit dafs der Brechungsexponent dem Sinus des Einfallswinkels proportional sei. Nach den Seite 552 aus den Beobachtungen Quinckes abgeleiteten Werten von ν ist das mit grofser Annäherung der Fall für alle Incidenzen, die gröfser sind als 35°, für kleinere Winkel sind die Werte von ν erheblich gröfser. Nach den aus den Reflexionsbeobachtungen sich ergebenden Brechungsexponenten hätten also die Schichtdicken für einen bestimmten Streifen sich bis zur Incidenz 35° erheblich ändern und erst bei weiterm Wachsen des Einfallswinkels konstant werden müssen.

Dafs die Streifenbreite bei senkrechter Incidenz nicht von der Farbe des Lichtes abhängig ist, würde mit den aus Jamins Versuchen abgeleiteten Werten der Brechungsexponenten der verschiedenen Farben im Einklang stehen. Berechnet man die Wellenlängen in Silber für D, E, F, H mit den dort gefundenen Werten von n, so werden dieselben

D		E		F		H	
in Luft	in Silber	in Luft	in Silber	in Luft	in Silber	in Luft	in Silber
5,89	11,00	4,91	10,8	4,87	10,00	3,96	9,60;

man sieht, die Unterschiede sind nur klein.

Berechnet man aber die Wellenlängen aus den Schichtdicken, in denen die Streifen liegen, so findet man Werte, die nicht entfernt mit den berechneten übereinstimmen. So fand Quincke bei 4 Silberplatten im reflektierten Licht

E_0	E_1	E_2	
0,014	0,030	0,061	in tausendstel Millimeter
0,020	0,027	0,056	" " "
0,011 5	0,018	0,040	" " "
0,012	0,021	0,036	" " "

Quincke nimmt an, die Dicke E_0 entspräche $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, weil annähernd $E_2 = 3\,E_0$ ist; mir scheint das nicht ganz richtig zu sein. Denn die Thatsache, dafs im durchgehenden Licht die Helligkeit dort liegt, wo im reflektierten Dunkelheit ist, beweist, dafs bei den Reflexionen an der Grenze des Silbers in Luft und am Glase in Silber eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\lambda_1$ entsteht. Dann entspricht die Dicke E_0 der Mitte der Newtonschen Ringe, wo die Schichtdicke noch kleiner ist, als dafs ihre doppelte Dicke den Wert einer halben Wellenlänge erreicht, E_1 entspricht dann $\frac{1}{4}\lambda_1$, E_2 ist $\frac{1}{2}\lambda_1$. In der That ist auch E_2 viel näher gleich $2\,E_1$, als die letzte Beobachtung ausgenommen E_2 dem Werte $3\,E_0$, aber auch bei der letzten weicht E_2 nur wenig von $2\,E_1$ ab. Die Wellenlängen werden dann, die zehntausendstel Millimeter als Einheit gesetzt,

1,2 1,1 0,76 0,78.

Setzt man mit Quincke die Wellenlänge der mittlern Strahlen gleich 5,5, so sind dieselben in Silber $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{7}$, so dafs darnach der Brechungsexponent des Silbers anstatt kleiner als eins zu sein, sehr grofse Werte hätte. Das Resultat ist also mit dem aus der Reflexion abgeleiteten in vollem Widerspruch.

Nach andern Methoden hat Quincke[1]) an denselben Platten indes Brechungsexponenten gefunden, die kleiner sind als 1. Denn brachte er in eines der beiden interferierenden Bündel des Jaminschen Interferentialrefraktors eine Glasplatte, in das andere eine genau ebensolche versilberte durchsichtige Platte, so wurden die Interferenzstreifen nach der dem Metall abgewandten Seite verschoben. Daraus ergibt sich das Resultat, dafs die Phase des Lichtstrahls bei dem Durchgange durch das Metall beschleunigt wird. Die Beschleunigung ergab sich um so gröfser, je dicker das Metall war, sie erreichte für einen bestimmten Einfallswinkel einen Maximalwert und war für parallel der Einfallsebene polarisiertes Licht gröfser als für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht. Die aus diesen Versuchen von Quincke für der Fraunhoferschen Linie F nahe liegendes Licht abgeleiteten Werte des Brechungsexponenten für senkrechte Incidenz von Silber sind 0,3 bis 0,6; wir fanden nach Jamin 0,487 3.

Bestimmt man die Dicke des Metalls, welches von dem Lichte durchdrungen werden kann, so findet man dieselbe für alle Farben gleich grofs, bei Silber für senkrechte Incidenz gröfser als $0^{mm},000\,112$. Für Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert bleibt die Tiefe für alle Incidenzen ziemlich dieselbe, für Licht parallel der Einfallsebene polarisiert nimmt die Tiefe mit dem Einfallswinkel ab.

Nach den letzten Erfahrungen werden bei dem Eindringen des Lichtes in Metalle, sobald der Einfallswinkel von Null verschieden ist, Phase und Amplitude der zu einander senkrecht polarisierten Komponenten des eindringenden Lichtes verschieden geändert; läfst man deshalb im Azimut α linear polarisiertes Licht durch eine Metallplatte hindurchgehen, so mufs dasselbe elliptisch polarisiert werden. In der That fand Quincke[2]) bei der Untersuchung des von dünnen Silber-, Gold- und Platinschichten durchgelassenen Lichtes mittels des Babinetschen Kompensators, dafs die $\perp$ zur Einfallsebene polarisierte Komponente stets gegen die $\parallel$ derselben polarisierte verzögert ist, wie bei dem von Metallen reflektierten Lichte, und dafs die Phasendifferenz und das Verhältnis $\frac{S}{P}$ mit wachsendem Einfallswinkel kontinuierlich zunimmt. Ein einfaches Gesetz für diese Zunahme der Phasendifferenz und des Amplitudenverhältnisses bei dem von Metallen durchgelassenen Lichte war nicht zu erkennen.

§ 87.

Elliptische Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion. Im § 82 haben wir bereits erwähnt, dafs die Fresnelsche Theorie der Reflexion des Lichtes nur einen Specialfall darstelle, dafs in der Regel nicht das zur Einfallsebene senkrecht polarisierte Licht bei der Reflexion unter dem Polarisationswinkel ganz ausgelöscht werde.

Schon Brewster[3]) selbst fand, dafs besonders bei der Reflexion an stark brechenden Medien das unter dem Polarisationswinkel zurückgeworfene Licht nicht vollständig polarisiert sei, eine Beobachtung, welche

[1]) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXIX. p. 379. Bd. CXX. p. 602.
[2]) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXIX.
[3]) *Brewster,* Philosophical Transactions for 1815. p. 125.

A. Seebeck[1]) bei der Untersuchung des von Diamant und Zinkblende zurückgeworfenen Lichtes bestätigte. Wenige Jahre später machte Airy ähnliche Beobachtungen am Diamant, und er schlofs bereits daraus[2]), dafs das vom Diamant zurückgeworfene Licht ähnlich dem von Metallen znrückgeworfenen elliptisch polarisiert sei, dafs somit die Phasendifferenz der senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisierten vom Diamant reflektierten Komponenten mit wachsendem Einfallswinkel von 0 bis $\frac{\lambda}{2}$ zunehme, nnd dafs bei dem Polarisationswinkel, den Jamin später Haupteinfallswinkel nannte, die Phasendifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$ wäre, gerade wie bei den Metallen. In einem Punkte unterscheidet sich indes die Reflexion bei dem Diamant von derjenigen an Metallen, während bei den letztern die Zunahme der Phasendifferenz stetig mit wachsendem Einfallswinkel erfolgt, ist sie bei dem Diamant bis zu Einfallswinkeln, die nur wenige Grade vom Polarisationswinkel abweichen, unmerklich, sie wächst dann rasch in der Nähe des Polarisationswinkels, zunächst bis $\frac{\lambda}{4}$, wenn derselbe erreicht ist, nnd dann anf fast $\frac{\lambda}{2}$, wenn derselbe nur um wenige Grade überschritten ist, um dann allmählich, während der Einfallswinkel bis 90° znnimmt, anf $\frac{\lambda}{2}$ anznsteigen. Anfserdem war die nnter dem Polarisationswinkel vom Diamant reflektierte Amplitude des senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichtes sehr klein gegen die Amplitnde des parallel zur Einfallsebene polarisierten Lichtes. Airy vermntet, dafs alle durchsichtigen Substanzen ähnliche Erscheinungen darbieten.

Dieser Schlufs Airys wurde später von Jamin[3]) für eine grofse Anzahl fester und flüssiger Körper bestätigt; derselbe zeigte, dafs in der Nähe des Polarisationswinkels, wie bei dem Diamant, die Phasendifferenz sehr rasch wachse, bei dem Polarisationswinkel, oder wie er besser nach Jamins Vorgang genannt wird, dem Haupteinfallswinkel $\frac{\lambda}{4}$ sei, und dafs das Licht nach der Reflexion elliptisch polarisiert sei.

Phasendifferenz und Amplitudenverhältnis bestimmte Jamin mit Hülfe des Babinetschen Kompensators. Um das Verhältnis $\frac{S}{P}$ bestimmen zu können, mufste sehr intensives Licht genommen und anfserdem das Licht sehr nahe senkrecht zur Einfallsebene polarisiert werden. Ist α das ursprüngliche Azimut nnd γ dasjenige der wiederhergestellten Polarisation, so ist wie früher

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{S}{P}\operatorname{tang}\alpha$$

$$\frac{S}{P} = \frac{\operatorname{tang}\gamma}{\operatorname{tang}\alpha} = \operatorname{tang}\beta.$$

[1]) *Seebeck,* Observationes de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis. Dissert. Berol. 1830. Poggend. Annal. Bd. XX. p. 35.

[2]) *Airy,* Philosophical Magazin. 3. Series. vol. I (1833). p. 25. Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

[3]) *Jamin,* Annales de chim. et de phys. III Série T. XXIX. T. XXXI. Poggend. Annal. Ergänzungsbd. III. Krönigs Jonrnal für Physik des Auslands. Bd. I.

In Bezug auf die den senkrecht und parallel der Einfallsebene polarisierten reflektierten Strahlen erteilte Phasendifferenz fand Jamin, dafs die von ihm untersuchten Körper in zwei Gruppen zerfielen. Bei der einen ist, wie bei den Metallen, wenn das Licht an der Grenze dieser Substanzen in Luft reflektiert wird, der senkrecht zur Einfallsebene polarisierte gegen die parallel derselben polarisierten verzögert. Zu dieser Gruppe gehören im allgemeinen alle diejenigen Körper, deren Brechungsexponent gröfser als 1,45 ist, also Glas und die meisten festen Körper. Jamin nennt diese Körper solche mit positiver Reflexion. Bei den Körpern der zweiten Gruppe ist die parallel der Einfallsebene polarisierte Komponente gegen die senkrecht zu derselben polarisierte verzögert. Zu dieser Gruppe gehören von festen Körpern Flufsspat, Hyalith, von flüssigen, Wasser und die meisten wässerigen Lösungen, im allgemeinen alle jene Substanzen, deren Brechungsexponent kleiner als 1,4 ist. Für einige wenige Substanzen nur fand Jamin, dafs das Licht nach der Reflexion stets geradlinig polarisiert sei, dafs also beide Komponenten ohne Phasendifferenz reflektiert werden. Für diese von Jamin als neutral bezeichneten Substanzen gilt also die Fresnelsche Theorie mit aller Strenge. Es sind von festen Körpern Menilit und Alaun senkrecht gegen die Oktaederaxe geschnitten, von flüssigen Glycerin und einige Salzlösungen.

Nach der neuern Theorie der Brechung des Lichtes, nach welcher die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Natur der Medien, in welchen dasselbe sich fortpflanzt, durch das Mitschwingen der körperlichen Moleküle bedingt ist, sind alle Medien zugleich absorbierende Medien, welche sich nur durch die Gröfse der Absorptionskoefficienten unterscheiden. Demnach sind die durchsichtigen Medien solche mit kleinem Absorptionskoefficienten. Die Reflexion des Lichtes an diesen Medien müfste sich deshalb durch dieselben Gleichungen darstellen lassen, wie die Reflexion an Metallen, nur mit kleinen Werten von $\varkappa_1$ und dem entsprechend vom Einfallswinkel unabhängigen Werten des Brechungsexponenten.

In der That lassen sich auch, wie Quincke[1]) hervorhebt, die Reflexionserscheinungen an Glas recht gut durch die für Metallreflexion aufgestellten Gleichungen darstellen. Für ein von Jamin benutztes Flintglas erhält man innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler mit den Beobachtungen übereinstimmende Werte von β und $\frac{\delta}{\lambda}$, wenn man

$$n = \nu = 1,714 \qquad \varkappa_1 = \varkappa_0 = 0,054$$

einsetzt.

Indes läfst sich die Reflexion an durchsichtigen Medien nicht allgemein so darstellen, da Jamin gezeigt hat, dafs für eine Reihe von Substanzen eine Verzögerung des parallel der Einfallsebene polarisierten Lichtes gegen das senkrecht zu derselben polarisierte eintritt. Da der Absorptionskoefficient nicht negativ sein kann, können die Gleichungen für Metallreflexion diesen Fall nicht darstellen.

Cauchy[2]) gab deshalb besondere Formeln für die Reflexion an durch-

[1]) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXXVIII. p. 551.
[2]) *Cauchy,* Comptes Rendus. T. IX. p. 729. 1839. T. XXVIII. p. 124. 1849.

sichtigen Medien, welche später mehrfach von Beer[1]), von Ettingshausen[2]), Fr. Eisenlohr[3]), von Lang[4]) abgeleitet wurden, und von denen Beer[5]) zeigte, dafs sie aus den im § 85 entwickelten allgemeinen Formeln der Reflexion hervorgehen, wenn man in diesen $\varkappa_1 = 0$, also den Einflufs der Absorption gleich null setzt, dagegen ε, also die den Einflufs der longitudinalen Strahlen darstellende Gröfse, als von null verschieden annimmt.

Setzen wir in den Gleichungen des § 85 $\varkappa_1 = 0$, so wird

$$\frac{S}{P} = \frac{u_s^2}{u_p^2} = \operatorname{tang}^2 \beta = \frac{\cos^2(i+r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i-r)}$$

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = -\varepsilon \sin i \frac{\operatorname{tang}(i+r) + \operatorname{tang}(i-r)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \operatorname{tang}^2(i+r) \operatorname{tang}^2(i-r)}.$$

Das Vorzeichen von δ hängt hier von dem Vorzeichen von ε ab, welches wesentlich von der Differenz der Absorptionskoefficienten $\mathfrak{k}_0 - \mathfrak{k}_0'$ der longitudinalen Strahlen abhängig ist, somit je nach der Gröfse dieser einzelnen Koefficienten positiv oder negativ sein kann. Die Theorie führt demnach zu dem Resultate, dafs die von Jamin beobachteten Fälle der Reflexion in der That vorkommen können.

Ketteler[6]) zeigt auch in diesem Falle, dafs man die longitudinalen Strahlen entbehren kann, wenn man annimmt, dafs an der Grenze zweier Medien in jedem eine Grenzschicht mit Absorptionskoefficienten vorhanden sei, welche etwas andere Werte haben als die Absorptionskoefficienten der Medien, ohne jedoch eine Gleichung für δ aus dieser seiner Annahme abzuleiten.

Den Faktor $-\varepsilon = \varepsilon_1$ nennt man den Elliptieitätskoefficienten; ist ε_1 positiv, so erhalten wir die von Jamin als positiv bezeichnete Reflexion, ist ε_1 negativ, die als negativ bezeichnete Reflexion, denn im ersten Falle bleibt das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht gegen das senkrecht polarisierte um δ zurück. In dem Falle würde unter Annahme longitudinaler Strahlen die Absorption im zweiten Medium gröfser sein als im ersten.

Dafs in der That obige Gleichungen die Erscheinungen der Reflexion an durchsichtigen Medien sehr gut darstellen, zeigt folgende Beobachtungsreihe Jamins an dem schon oben erwähnten Flintglas; Flintglas ist ein Körper mit positiver Reflexion, also ε_1 positiv.

---

1) *Beer*, Poggend. Annal. Bd. XCI.
2) *von Ettingshausen*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie für 1855.
3) *Fr. Eisenlohr*, Poggend. Annal. Bd. CIV.
4) *von Lang*, Einleitung in die theoretische Physik p. 264.
5) *Beer*, Poggend. Annal Bd. XCII. p. 410.
6) *Ketteler*, Wiedemann. Annal. Bd. III.

Reflexion an Flintglas in Luft.

$n = 1{,}714$; arc ($\tang = n$) $= 59^0\ 45'$; $\varepsilon_1 = 0{,}0170$.

Einfallswinkel i	δ beobachtet $\frac{\lambda}{2}$	δ berechnet $\frac{\lambda}{2}$	$\beta = \text{arc}\left(\tang = \frac{S}{P}\right)$ beobachtet	$\beta = \text{arc}\left(\tang = \frac{S}{P}\right)$ berechnet
53^0	0,026	0,027	$10^0\ 5'$	$10^0\ 6'$
55^0	0,039	0,041	$7^0\ 0'$	$7^0\ 3'$
57^0	0,064	0,071	$4^0\ 3'$	$4^0\ 17'$
59^0	0,217	0,223	$1^0\ 30'$	$1^0\ 30'$
$59^0\ 30'$	0,401	0,382	$1^0\ 4'$	$1^0\ 3'$
60^0	0,640	0,623	$1^0\ 13'$	$1^0\ 3'$
61^0	0,877	0,842	$2^0\ 45'$	$2^0\ 10'$
63^0	0,939	0,940	$5^0\ 46'$	$5^0\ 9'$
$65^0\ 15'$	0,959	0,965	$8^0\ 16'$	$8^0\ 31'$

Die Tabelle zeigt, wie entsprechend den Angaben von Airy sich in der That die Phasenänderung in die Nähe des Polarisationswinkels zusammendrängt, daſs wenn i etwa 6^0 kleiner ist, δ noch fast null, wenn i etwa 6^0 gröſser ist, dieselbe schon fast $\frac{1}{2}\lambda$ beträgt.

Betreffs der von Jamin gegebenen Einteilung der Körper in solche mit positiver und negativer Reflexion machte Quincke[1]) darauf aufmerksam, daſs nach der Cauchyschen Theorie dieselbe nur für die Reflexion in Luft gelte, daſs wenn man bei der Reflexion an der Grenzfläche zweier Medien positive Reflexion habe, wenn die Reflexion in Luft stattfinde, negative Reflexion sich zeigen müsse, wenn die Reflexion im zweiten Medium stattfinde. In der That, da ε in seinem Vorzeichen durch die Differenz $\mathfrak{k}_0 - \mathfrak{k}_0'$ bestimmt wird, muſs bei zwei gegebenen Medien, wenn die Reflexion in dem einen positiv ist, $\mathfrak{k}_0' > \mathfrak{k}_0$ sein; dann muſs notwendig bei der Reflexion in dem andern Medium die Reflexion negativ sein, da für diese Reflexion an die Stelle von $\mathfrak{k}_0 - \mathfrak{k}_0'$ die Differenz $\mathfrak{k}_0' - \mathfrak{k}_0$ tritt. Der Versuch bestätigte diese Folgerung.

Ferner zeigte Quincke, daſs der absolute Wert der Phasendifferenz und des Amplitudenverhältnisses merklich derselbe ist, mag die Reflexion in dem einen oder dem andern Medium stattfinden, wenn die Einfallswinkel korrespondierende sind, das heiſst, wenn derjenige in dem einen Mittel als Brechungswinkel zu demjenigen in dem andern gehört. Nennen wir i_1 den Einfallswinkel in dem einen Mittel, i_2 denjenigen, wenn das Licht in dem andern Mittel an derselben Grenzfläche reflektiert wird, so sind δ und $\frac{S}{P}$ gleich, wenn

$$\sin i_1 = n \sin i_2.$$

Daraus folgt, daſs wir die Erscheinungen der Reflexion im zweiten Medium

[1]) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXXVIII.

durch unsere Gleichungen einfach erhalten, wenn wir den Elliptieitätskoefficienten ε_2 für diese Reflexion setzen,

$$\varepsilon_2 = -n\varepsilon_1.$$

Die Gleichung für tang β liefert dann identische Werte, da, wenn bei der Reflexion in Luft r der zum Einfallswinkel gehörige Brechungswinkel ist, bei der Reflexion in Glas dann r der korrespondierende Einfallswinkel, i der Brechungswinkel ist. Es vertauschen also i und r ihre Stelle und der Faktor des zweiten Gliedes im Zähler und Nenner wird

$$\varepsilon_2^2 \sin^2 r = n^2 \varepsilon_1^2 \sin^2 r = \varepsilon_1^2 \sin^2 i.$$

In dem Ausdrucke für $\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ erhält bei der Vertauschung von i und r allerdings das zweite Glied des Zählers das entgegengesetzte Vorzeichen. Da aber die Differenz $i - r$ immer nur klein ist, hat dieses Glied auf den Wert von δ so wenig Einfluſs, daſs, wie Quincke zeigt, die Gleichung

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \varepsilon_1 \sin i \operatorname{tang}(i + r),$$

in der also auch im Nenner wegen der Kleinheit von ε^2 das zweite Glied vernachlässigt ist, die Beobachtungen ebenso gut darstellt als die genauere Cauchysche. Diese Gleichung wird aber bei der Reflexion im zweiten Mittel wieder gleich derjenigen bei der Reflexion im ersten Mittel, wenn im zweiten Mittel der Einfallswinkel r wird, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, da

$$\varepsilon_2 \sin r = -n\varepsilon_1 \sin r = -\varepsilon_1 \sin i$$

wird.

Reflexion an der Grenze von		H	B	$\nu = \operatorname{tang} H$	ε	$\varepsilon_2 = -n\varepsilon$	n_1
in	Luft	58° 8′	1° 16′	1,609	0,023 3		1,616 0
	Flintglas	31° 52′	1° 6′	$\frac{1}{1{,}609}$	− 0,032 7	− 0,037 4	
in	Wasser	50° 55′	1° 50′	1,231 2	0,040 4		1,209 6
	Flintglas	39° 5′	1° 24′	$\frac{1}{1{,}231\,2}$	− 0,037 9	− 0,049 6	
in	Luft	56° 29′	0° 23′	1,510	0,007 4		1,514 9
	Crown-glas	33° 20′	0° 26′	$\frac{1}{1{,}520}$	− 0,012 6	− 0,012 2	
in	Wasser	49° 10′	0° 19′	1,157	0,007 2		1,133 9
	Crown-glas	40° 50′	0° 23′	$\frac{1}{1{,}157}$	− 0,010 1	− 0,008 3	
in	Luft	53° 54′	0° 26′	1,364	− 0,008 9		1,361
	Eisen-chlorid	36° 27′	0° 26′	$\frac{1}{1{,}354}$	0,012 0	0,012 1	
in	Luft	53° 7′	0° 16′	1,333	− 0,005 6		1,336
	Wasser	37° 16′	0° 24′	$\frac{1}{1{,}314}$	0,011,6	0,007 5	

Vorstehende von Quincke gegebene Tabelle enthält die bei mehreren Medien bei der Reflexion sowohl in das dichtere als in das dünnere beobachteten Haupteinfallswinkel H, das Hauptazimuth B, den aus ersterm sich ergebenden Brechungsexponenten, und den aus H und B berechneten Wert von ε. Die vorletzte Kolumne enthält die Werte der Ellipticitätskoefficienten für das zweite Mittel berechnet unter der Voraussetzung

$$\varepsilon_2 = -n\varepsilon_1.$$

Diese Tabelle gibt gleichzeitig ein Bild, welche Genauigkeit bei diesen Beobachtungen erreicht werden kann. Die letzte Kolumne enthält den Brechungsexponenten in gewöhnlicher Weise bestimmt; man sieht, derselbe stimmt keineswegs mit dem aus dem Haupteinfallswinkel berechneten immer überein, wie auch andererseits die beiden Haupteinfallswinkel sich nicht immer zu 90° ergänzen. Der Grund dieser Ungenauigkeiten liegt, abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern, darin, dafs sich die oberflächlichen Schichten der reflektierenden Substanzen mit der Zeit ändern, eine Änderung, die nur an der Reflexion zu merken ist, da sie nicht weit in die Tiefe dringt, und die sich eben an der Änderung des Haupteinfallswinkels zu erkennen gibt. Ebendeshalb lassen sich auch noch andere Formen der Gleichungen als die Cauchyschen denken, welche innerhalb der erreichbaren Genauigkeitsgrenzen die Beobachtung wiedergeben[1]).

§ 88.

Die Newtonschen Farbenringe im polarisierten Lichte. Die aus der Reflexionstheorie sich ergebenden Gleichungen für die Amplitude des reflektierten Lichtes gestatten uns jetzt auch die Theorie der Farben dünner Blättchen zu vervollständigen, und einige besondere Erscheinungen bei Anwendung des polarisierten Lichtes, welche zuerst Airy[2]) genauer untersuchte, aus denselben abzuleiten. Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung der Ringe im reflektierten Licht, da diejenigen im durchgehenden Lichte sich dann von selbst ergeben.

Im reflektierten Lichte und wenn die dünne Schicht auf beiden Seiten von demselben Medium eingeschlossen ist, erscheinen die Ringe stets mit dunklem Centrum, wenn die Schicht in der Mitte unendlich dünn ist, weil, wie wir damals hervorhoben, bei der einen der beiden Reflexionen der Verlust einer halben Wellenlänge eintritt und der Wert der Reflexionskoefficienten r und ϱ, wie wir sie damals bezeichneten, an beiden Grenzen der Schicht derselbe ist. Wir nahmen damals an, dieser Verlust einer halben Wellenlänge finde stets an dem dichtern Medium statt. Für die in der Einfallsebene polarisierte Komponente ist das nach unsern Gleichungen auch

[1]) So werden die Werte der Phasendifferenzen mit derselben Genauigkeit wiedergegeben, wenn man anstatt $\varepsilon \cdot \sin i$ in die Gleichungen einen konstanten Wert p einführt, zu dem man gelangt, wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen, wie es nach dem Vorgange von *Green* (Cambridge philosophical transactions. p. I) *von Lang* in der erwähnten Einleitung thut, sehr grofs setzt. Man sehe darüber auch *Kurz*, Poggend. Annal. Bd. CVIII.

[2]) *Airy*, Cambridge philosoph. transactions for 1832. Poggend. Annal. Bd. XXVI. Bd. XXVII.

stets der Fall, denn für diese ist bei der Reflexion nach der für Betrachtung dieser Erscheinungen ausreichenden Theorie Fresnels

an dem dichtern an dem dünnern Medium

$$r = -\frac{\sin(i-i_1)}{\sin(i+i_1)}, \quad \varrho = \frac{\sin(i-i_1)}{\sin(i+i_1)},$$

also stets, wenn wir den Verlust der halben Wellenlänge nicht besonders in Rechnung ziehen, r negativ, welches auch der Wert von i ist.

Anders jedoch, wenn das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist; dann ist

$$r = -\frac{\tang(i-i_1)}{\tang(i+i_1)}, \quad \varrho = \frac{\tang(i-i_1)}{\tang(i+i_1)}.$$

Hier ist r nur so lange negativ, als i kleiner als der Polarisationswinkel oder $i + i_1 < 90^0$ ist. Es tritt dann eine plötzliche, oder vielmehr nach dem Vorigen eine rasche Änderung der Phasendifferenz bei der Reflexion an dem dichtern Medium ein. Wenn aber, wie wir damals annahmen, die Begrenzung der dünnen Schicht auf beiden Seiten dieselbe ist, hat diese Änderung auf die Erscheinung keinen Einfluſs, da in demselben Augenblicke, wo r sein Vorzeichen ändert, auch ϱ dasselbe ändert, also jedenfalls bei der einen Reflexion der Verlust einer halben Wellenlänge stattfindet, bei der andern nicht. Es ist also auch dann stets an den Stellen, wo der Gangunterschied der Strahlen null oder ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ist, die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge, somit erscheinen die Ringe mit dunklem Centrum, und so, wie wir sie früher ableiteten.

Ist dagegen das untere Mittel, welches die dünne Schicht begrenzt, von dem obern verschieden, ist sein Brechungsexponent bedeutend gröfser als der des obern Mittels, so werden die Erscheinungen in der Nähe der Polarisationswinkel wesentlich anders. Legen wir z. B. eine Glaslinse, deren Brechungsexponent 1,5 sei, auf einen Diamant, dessen Brechungsexponent gleich 2,4 ist. So lange der Einfallswinkel kleiner ist als der Polarisationswinkel dieses Glases, also kleiner als $56^0\,19'$, erscheint das Ringsystem wie früher; sobald aber dieser Winkel erreicht ist, wird von der obern Grenze der Luftschicht, da diese dann unter dem Polarisationswinkel bei der Reflexion an Luft in Glas getroffen wird, kein Licht reflektiert, sondern nur an der untern Grenze, am Diamant. Wird der Einfallswinkel noch gröfser, so wird an der obern Grenze wieder Licht reflektiert, aber jetzt mit Verlust einer halben Wellenlänge. So lange nun der Einfallswinkel kleiner ist als der Polarisationswinkel am Diamant, kleiner als $67^0\,40'$, tritt ebenfalls an der untern Grenze der Verlust einer halben Wellenlänge ein, also die Reflexion allein gibt den reflektierten Wellen keine Phasendifferenz, die Ringe erscheinen mit weifsem Centrum, und wo vorher ein heller Ring war, ist jetzt ein dunkler und umgekehrt. Wächst der Einfallswinkel bis $67^0\,40'$, so wird vom Diamant kein Licht reflektiert, die Ringe verschwinden wieder, und wird der Einfallswinkel über 70^0, so erscheinen sie wieder, wie bei kleinem Einfallswinkel. Um diese Erscheinungen wahrzunehmen, ist es nicht erforderlich das System mit polarisiertem Licht zu beleuchten, es genügt, dasselbe mit einem Kalkspath zu betrachten, der nur senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht in das Auge läfst.

Man kann ebenso Ringe mit weifsem Centrum erzeugen, wenn man zur Kombination, welche dieselbe erzeugen, drei verschiedene Mittel wählt, so dafs der Brechungsexponent des mittlern gröfser ist als der des obern, aber kleiner als der des untern. Man nimmt z. B. eine Linse aus Crownglas, dessen Brechungsexponent möglichst klein ist, legt dieselbe auf Flintglas mit möglichst grofsem Brechungsexponent, und bringt zwischen dieselben Canadabalsam. Hat das Crownglas den Brechungsexponenten 1,47, das Flintglas 1,7, so liegt der Brechungsexponent des Canadabalsams zwischen beiden, er ist 1,536. Die Reflexionen geschehen dann in beiden Grenzflächen unter denselben Verhältnissen, sie geben keine Phasendifferenz, und die Strahlen interferieren nur mit dem durch die verschiedenen zurückgelegten Wege erlangten Gangunterschiede.

Eine sehr hübsche Abänderung dieses Versuches gibt ein kleiner Apparat von Duboscq; derselbe setzt die untere Platte zur Hälfte aus Flintglas, zur Hälfte aus demselben Crownglas zusammen, aus welchem auch die Linse besteht, und legt die Linse dann so auf die Platte, dafs die Berührungsstelle gerade auf der Schnittlinie der beiden Platten sich befindet. Bringt man dann zwischen Linse und Platte Canadabalsam, so erhält man zwei Systeme von Halbkreisen; auf dem Flintglas erscheinen die Ringe mit hellem, auf dem Crownglas mit dunklem Centrum, und der dunkle Ring über der einen Platte setzt sich als heller in der andern Hälfte des Ringsystems fort. Im weifsen Lichte sind die beiden Hälften komplementär gefärbt.

Es genüge an der Betrachtung dieser einzelnen Fälle, die eine neue Bestätigung der Fresnelschen Reflexionstheorie bieten, andere Erscheinungen im polarisierten Lichte wird man mit derselben Leichtigkeit aus der Fresnelschen Theorie ableiten.

Drittes Kapitel.

Von der Doppelbrechung des Lichtes.

§ 89.

Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspat. Im § 78 haben wir die Erscheinung mitgeteilt, dafs ein unter senkrechter Incidenz in einen Kalkspat eintretender Lichtstrahl im allgemeinen in zwei zerlegt wird, deren einer im Hauptschnitt polarisiert ist, und von denen der andere senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert ist. Als Hauptschnitte definierten wir die Ebenen, welche die Axe in sich aufnehmen, bezeichneten aber in optischer Beziehung vorzugsweise jene dieser Ebenen als Hauptschnitt, welche zugleich das Einfallslot in sich aufnimmt. Diese Ebene ist dann die Polarisationsebene des ordentlich gebrochenen Lichtstrahls. Die Schwingungen des Äthers in diesem Strahle geschehen senkrecht zum Hauptschnitt, also auch, da eine Richtung, welche auf einer Ebene senkrecht ist, zu jeder in der Ebene liegenden Richtung senkrecht ist, senkrecht zur Axe des Krystalles, welches auch der Winkel ist, welchen der ordentlich gebrochene Strahl mit der Axe bildet.

Die Polarisationsebene des aufserordentlich gebrochenen Strahles ist zum Hauptschnitte senkrecht; die Ätherschwingungen dieses Strahles geschehen also im Hauptschnitte, in jener Ebene, welche die Axe des Krystalles in sich aufnimmt. Dieselben sind senkrecht zu dem aufserordentlich gebrochenen Strahle, sie bilden also immer andere Winkel mit der Axe, je nach der Neigung, welche der Strahl mit der Axe bildet. Ist der Strahl der Axe parallel, so sind die Schwingungen senkrecht zur Axe, ist der Strahl senkrecht zur Axe, so sind die Schwingungen mit ihr parallel; allgemein sieht man, bilden sie mit derselben immer einen Winkel, welcher denjenigen zwischen Strahl und Axe zu 90° ergänzt.

Durch den Krystall pflanzen sich demnach nur Schwingungen fort, welche in zwei zu einander senkrechten Ebenen vor sich gehen, die einen sind senkrecht zum Hauptschnitt und senkrecht zur Axe, die andern geschehen im Hauptschnitt und können mit der Axe beliebige Winkel bilden. Diese beiden Komponenten, in welche die einfallenden Lichtstrahlen immer zerlegt werden, pflanzen sich überdies durch den Krystall nach verschiedenen Gesetzen fort, da sie als gesonderte Strahlen den Krystall verlassen.

Lassen wir die Strahlen anstatt unter senkrechter Incidenz unter beliebiger Incidenz auf den Krystall auffallen, so zerfallen dieselben auch dann in zwei polarisierte Strahlen, und man erkennt leicht, dafs der eine der beiden Strahlen, den wir als den ordentlich gebrochenen bezeichnen, so gebrochen wird, wie es das bisher von uns angenommene Brechungsgesetz verlangt; sein Brechungsexponent ist konstant, wie auch der Strahl durch den Krystall hindurchtreten mag, und der gebrochene Strahl liegt in der durch das Einfallslot und den einfallenden Strahl bestimmten Ebene. Der andere Strahl, dem wir deshalb auch den Namen des aufserordentlich gebrochenen beilegten, weicht nach beiden Richtungen von dem Brechungsgesetz ab; sein Brechungsexponent ist verschieden, je nach dem Winkel, welchen er mit der Axe des Krystalles einschliefst, und er befindet sich nur dann mit dem einfallenden Strahle in derselben Ebene, wenn die Axe des Krystalls in der Einfallsebene liegt, letztere also ein Hauptschnitt des Krystalles ist, oder wenn die Axe des Krystalls zum einfallenden Strahle senkrecht ist; in allen andern Fällen tritt der gebrochene Strahl aus der Einfallsebene aus.

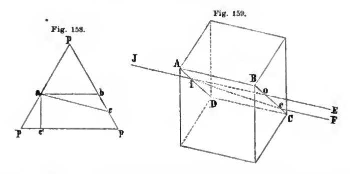
Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall, dafs die Einfallsebene zugleich ein Hauptschnitt ist, lassen also zum Beispiel die Lichtstrahlen in einer Ebene einfallen, welche durch die kurzen Diagonalen der Begrenzungsflächen eines Kalkspatrhomboeders gelegt ist, und bestimmen dann den Brechungsexponenten der Strahlen, so finden wir für den ordentlichen Strahl stets denselben Wert, nämlich 1,654 3, der Brechungsexponent des zweiten Strahles ist aber verschieden, je nach dem Winkel, welchen der Strahl mit der Axe einschliefst, und zwar wird er um so kleiner, je gröfser dieser Winkel ist; man findet ihn gleich 1,483 3 für mittlere Strahlen, wenn der Strahl senkrecht zur Axe durch den Krystall hindurchtritt; er nimmt zu bis auf 1,654 3, den Brechungsexponenten des ordentlichen Strahles, wenn die Neigung des Strahles von 90° gegen die Axe des Krystalles bis zu 0° abnimmt.

Die Messung dieser Brechungsexponenten läfst sich am besten dadurch ausführen, dafs man aus einem Kalkspatkrystalle verschiedene Prismen

herstellt, so daſs die brechende Kante derselben senkrecht ist zur optischen Axe, daſs aber die Seiten derselben gegen die Axe verschieden geneigt sind. Läſst man den Lichtstrahl in der Richtung ab Fig. 158 durch das Prisma treten, so daſs der auſserordentliche Strahl immer mit den Seiten gleiche Winkel bildet, so findet man je nach der Lage der Axe ac den Brechungsexponenten verschieden. Fällt ac mit ab zusammen, so erhält man nur einen durchtretenden Strahl mit dem Brechungsexponenten 1,654; ist bei einem andern Prisma die Lage der Axe $ac' \perp ab$, so erhält man für ab den Brechungsexponenten 1,483. Man erhält dann aber noch einen zweiten Strahl nach ac, mit dem Brechungsexponenten des ordentlichen Strahles. Die gebrochenen Strahlen liegen aber alle in der Einfallsebene.

Dasselbe ist auch dann der Fall, wenn wir ein Prisma anwenden, dessen brechende Kante der Axe parallel ist, und als Einfallsebene einen zur brechenden Kante senkrechten Schnitt des Prismas nehmen. In dem Falle können wir die Brechungsexponenten beider Strahlen aus dem Minimum der Ablenkung ableiten, da dann der auſserordentliche Strahl immer senkrecht zur Axe durch den Krystall hindurchtritt.

Daſs der auſserordentliche Strahl im allgemeinen aus der Einfallsebene heraustritt, haben wir schon im § 78 erwähnt, und bemerkt, daſs derselbe, als wir ihn senkrecht auf eine natürliche Grenzfläche des Krystalls auffallen lieſsen, im Hauptschnitt verschoben erscheint. Man kann sich davon durch einen einfachen Versuch überzeugen. Lassen wir auf die natürlichen Begrenzungsflächen eines Kalkspatrhomboeders einen Lichtstrahl mit senkrechter Incidenz auffallen Ji Fig. 159, so treten zwei Strahlen aus der



Fläche CB hervor. Der eine derselben oE geht ungebrochen hindurch, es ist die Verlängerung des einfallenden Strahles. Der zweite aber hat in dem Krystalle die Richtung ie angenommen und tritt als eF parallel mit oE hervor, wie wir daraus schlieſsen, daſs auf einem Schirme, auf welchem wir die Strahlen auffangen, die von den beiden Strahlen herrührenden hellen Flecke immer gleich weit von einander entfernt sind, wie weit auch der Abstand des Schirmes von dem Krystalle ist.

Eine durch die beiden Strahlen gelegte Ebene schneidet den Krystall in der Ebene $ABCD$, im Hauptschnitt, ein Beweis, daſs der auſserordentliche Strahl im Hauptschnitte verschoben ist. Drehen wir den Krystall um den einfallenden Strahl als Axe, so dreht sich auch die Ebene, welche

die beiden Strahlen in sich aufnimmt, und zwar so, dafs dieselbe immer der augenblicklichen Lage der Ebene $ABCD$ parallel ist.

Das Gesetz, nach welchem die Brechung des Lichtes in einem Kalkspate erfolgt, ist sonach ein ziemlich verwickeltes; indes gelang es schon Huyghens bald nach der Entdeckung der beschriebenen Erscheinungen durch den dänischen Physiker Erasmus Bartholinus[1]), durch eine einfache, derjenigen für isotrope Mittel analoge Konstruktion dasselbe darzustellen[2]).

Was zunächst den ordentlichen Strahl angeht, so erhält man die Richtung desselben nach den gewöhnlichen Brechungsgesetzen, also auch nach der aus der Undulationstheorie abgeleiteten Konstruktion. Da der Brechungsexponent konstant und gleich 1,654 3 ist, so folgt, dafs zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in Luft und derjenigen ω des ordentlichen Strahles die Beziehung besteht

$$\frac{c}{\omega} = 1{,}654\,3; \quad \omega = \frac{c}{1{,}654\,3}.$$

Wir haben demnach mit den hiernach sich ergebenden Radien kugelförmige Wellen im Kalkspat zu konstruieren; die Tangentialebene an diesen Wellen ist die gebrochene Welle, der gebrochene Strahl ist die Verbindung des Mittelpunktes jeder Elementarwelle mit dem Punkte, wo sie von der Tangentialebene berührt wird.

Für den aufserordentlichen Strahl ist der Brechungsexponent verschieden je nach dem Winkel, den der Strahl mit der Axe bildet. Da auch für diesen der Brechungsexponent in jedem Falle der Quotient aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft und des aufserordentlichen Strahles im Krystall ist, so folgt, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben verschieden ist, je nach dem Winkel, den derselbe mit der Axe des Krystalles bildet, sie ist jedesmal dem reciproken Werte des Brechungsexponenten proportional. Hieraus ergibt sich, dafs für den aufserordentlichen Strahl die Form der Elementarwellen, welche uns die Grenze geben, bis zu welcher nach den verschiedenen Richtungen sich die Bewegung fortgepflanzt hat, wenn sie in einem Punkte des Krystalles erregt war, nicht eine Kugel, sondern eine anders geformte Fläche ist. Aus einer Vergleichung der aus den Brechungsexponenten sich ergebenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und der Neigung der Strahlen gegen die Krystallaxe erkannte Huyghens, dafs wenn die Strecke, durch welche ein Strahl parallel der Axe sich fortpflanzt, gleich ω, durch welche er in derselben Zeit senkrecht zur Axe sich fortpflanzt, gleich ε ist, dafs er dann nach einer Richtung, welche mit der Krystallaxe den Winkel φ bildet, sich in derselben Zeit durch eine Strecke fortpflanzt, welche durch die Gleichung gegeben ist

$$c_1^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi}.$$

Daraus folgt, dafs die Wellenfläche, also die Grenze, bis zu welcher sich die Bewegung gleichzeitig fortpflanzt, wenn im Innern des Krystalls in

[1]) *Erasmus Bartholinus*, Experimenta crystalli Islandici disdiaclastici. Hafniae 1670.

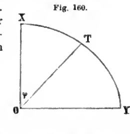
[2]) *Huyghens*, Traité de la lumière. Leiden 1690. Man sehe *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853.

irgend einem Punkte O eine Lichtbewegung erzeugt war, ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsaxe parallel der Axe des Krystalls, $\varphi = 0$, gleich ω und dessen Äquatorialradius gleich ε ist.

Zunächst dafs die Fläche eine Rotationsfläche ist, folgt daraus, dafs die Strecke c_1 für alle Richtungen, welche mit der Axe den gleichen Winkel φ bilden, denselben Wert hat; die Endpunkte dieser Strecken bilden also die Basis eines geraden Kreiskegels, dessen Axe die Axe des Krystalles ist. Die zur Axe des Krystalles senkrechten Schnitte der Wellenfläche sind somit sämtlich Kreise, und das zeigt, dafs die Fläche eine Rotationsfläche ist.

Um den Charakter der Rotationsfläche zu erkennen genügt es einen durch die Axe derselben gelegten Schnitt zu betrachten. Sei Fig. 160 XOY ein Quadrant eines solchen Schnittes und OX parallel der Axe gleich ω, OY senkrecht zur Axe gleich ε. Die Länge OT, durch welche sich das Licht in der mit der Axe den Winkel φ bildenden Richtung fortgepflanzt hat, ist dann durch die Gleichung gegeben

Fig. 160.



$$c_1^2 = OT^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi}$$

Wir können die Gleichung schreiben

$$\frac{OT^2 \cos^2 \varphi}{\omega^2} + \frac{OT^2 \sin^2 \varphi}{\varepsilon^2} = 1.$$

Wenden wir OX und OY als Koordinatenaxen an und zwar OX als Axe der x, OY als Axe der y, so ist

$$OT \cos \varphi = x \qquad OT \sin \varphi = y$$

und die Gleichung der von den Endpunkten T gebildeten Kurve wird

$$\frac{x^2}{\omega^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2} = 1,$$

die bekannte Gleichung der Ellipse, deren Axen ω und ε sind.

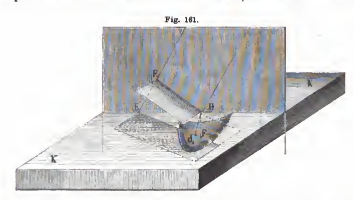
Die Wellenfläche des aufserordentlichen Strahles ist also nicht eine Kugel, sondern ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe der Axe des Krystalls parallel ist. Wenn eine Lichtbewegung in der Grenzfläche des Krystalls durch eine ankommende Welle erregt wird, sind demnach zur Konstruktion der aufserordentlichen im Krystall sich fortpflanzenden Lichtwelle anstatt der halbkugelförmigen Elementarwellen, welche zur Konstruktion der ordentlich gebrochenen Welle dienen, halbe Rotationsellipsoide der eben abgeleiteten Form zu verwenden, deren Rotationsaxe mit der Axe des Krystalls zusammenfällt. Die gebrochene Welle ist dann die alle die Elementarellipsoide berührende Tangentialebene, gerade so, wie die ordentlich gebrochene Welle die an die halbkugelförmigen Elementarwellen gelegte Tangentialebene ist.

Ist demnach DE die Wellenfläche eines den Kalkspat KK treffenden Strahlencylinders, und tritt die Axe des Krystalles nach vorn aus der Einfallsebene hervor (Fig. 161), so konstruieren wir um den zuerst von der Lichtwelle getroffenen Punkt D der Grenzfläche die Wellenfläche F des Krystalles in der angegebenen Weise mit den Dimensionen, wie sie der Zeit entsprechen, während welcher sich das Licht in dem ersten Mittel von E

bis zur Grenzfläche fortpflanzt. Nennen wir die Zeit t, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der Axe ω, diejenige senkrecht zur Axe ε, so ist die Axe des um die Krystallaxe zu legenden Rotationsellipsoides gleich ωt, der zur Axe senkrechte Äquatorialradius gleich εt. Wir legen durch den Punkt E' eine zur Einfallsebene senkrechte Tangentialebene, und diese ist die gebrochene Lichtwelle, welche, sich selbst parallel bleibend, in dem Krystall sich fortpflanzt.

Die Richtung des gebrochenen Strahles ist nach dem Huyghensschen Principe gegeben durch die Verbindungslinie der Punkte D und d, des Mittelpunktes der Elementarwelle mit dem Punkte, in welchem dieselbe durch

Fig. 161.



die sämtliche Elementarwellen umhüllende Fläche oder berührende Ebene tangiert wird (Teil I, § 133 und 135). Die Axe des gebrochenen Strahlenbündels und somit dieses selbst ist demnach der Verbindungslinie des Mittelpunktes der Wellenfläche mit dem Punkte, in welchem dieselbe von jener tangiert wird, parallel.

Diese Verbindungslinie fällt im allgemeinen nicht in die Einfallsebene und ist auch nicht zur gebrochenen Welle senkrecht, da bekanntlich der Halbmesser des Ellipsoides nicht auf der durch seinen Endpunkt gelegten Tangentialebene senkrecht ist. Ziehen wir aber von dem Mittelpunkte D des Rotationsellipsoides die Richtung DF senkrecht zur Welle, so folgt, da wir die Tangentialebene senkrecht zur Einfallsebene gelegt haben, dafs diese Senkrechte, die Normale der Welle in der Einfallsebene liegt. Der Halbmesser Dd liegt dann in der Ebene, welche wir durch die Normale der gebrochenen Welle und die Axe legen, denn führen wir einen Schnitt durch die Normale einer an ein Ellipsoid gelegten Tangentialebene und die Axe des Ellipsoides, so geht dieser Schnitt auch durch den Tangierungspunkt, es mufs deshalb der Halbmesser ganz in diesem Schnitt liegen. Die Lage des Schnittes, somit die Lage der Ebene, in welcher der gebrochene Strahl liegt, hängt also wesentlich von der Lage der Krystallaxe gegen die Einfallsebene ab.

In der Einfallsebene bleibt nach dieser Konstruktion der aufserordentlich gebrochene Strahl nur dann, wenn die optische Axe in der Einfallsebene liegt, oder wenn der Halbmesser senkrecht auf der gebrochenen Welle ist, derselbe also mit der Normale der Welle zusammenfällt. Letzteres ist

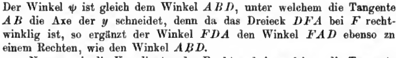
der Fall, wenn die Axe des Krystalles senkrecht zur Einfallsebene ist, wie wir nachher sehen werden.

Es ergibt sich also, dafs für das aufserordentlich gebrochene Licht Strahl und Wellennormale von einander verschieden sind, somit auch, da die Welle sich parallel der Wellennormale fortpflanzt, dafs der Strahl nach einer andern Richtung fortschreitet als die Welle. Ist die Welle ganz in den Krystall übergetreten, so bekommen wir die fortgepflanzte Wellenebene, indem wir im Krystall die gebrochene Welle parallel sich selbst verschieben, der gebrochene Strahl ist aber die Verlängerung von Dd, da das zur Konstruktion der Welle angewandte Elementarellipsoid um D sich gewissermafsen mit wachsender Zeit vergröfsert, indem es immer sich ähnlich bleibt; der Tangierungspunkt d rückt dadurch einfach auf der Linie Dd weiter. Daraus ergibt sich dann auch, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle eine andere ist, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles. Denn die Strecke, um welche die Welle sich innerhalb einer gewissen Zeit fortpflanzt, ist der senkrechte Abstand der Wellenebene in ihren beiden Lagen am Anfange und am Ende der betrachteten Zeit, jene aber, um welche der Strahl sich fortgepflanzt hat, die gegen die Wellennormale geneigte Verbindungslinie der beiden Punkte, in denen die Wellenebene in den beiden Lagen das zur Konstruktion der Welle verwandte Ellipsoid berührt. Oder auch von dem Momente, in welchem bei D die Welle in den Krystall eingetreten ist, bis zu dem Momente, in welchem sie bei E eintritt, hat die Welle sich durch die Strecke DF fortgepflanzt, der Strahl dagegen um die Strecke Dd. Kennen wir die Lage des fortgepflanzten Strahles, so können wir leicht die Lage und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle berechnen. Sei zu dem Ende DXY Fig. 162 der Quadrant des Durchschnitts des Ellipsoides, in welchem die Wellennormale DF und der Strahl Dd liegen, und sei der Winkel, den der Strahl mit der Axe bildet, $XDd = \varphi$, derjenige, welchen die Normale mit der Axe bildet, $XDF = \psi$, sei ferner AB der Durchschnitt der Tangentialebene, welcher die Tangente an die durch den Schnitt gegebene Ellipse im Punkte d ist. Dann ist, wie wir vorhin sahen, wenn wir die Zeit $t = 1$ setzen, während der die Welle in der Luft sich von E bis E' fortpflanzt,

Fig. 162.

A X C d F D Y B

$$Dd^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi}.$$



Der Winkel ψ ist gleich dem Winkel ABD, unter welchem die Tangente AB die Axe der y schneidet, denn da das Dreieck DFA bei F rechtwinklig ist, so ergänzt der Winkel FDA den Winkel FAD ebenso zu einem Rechten, wie den Winkel ABD.

Nennen wir die Koordinaten des Punktes d, in welchem die Tangente die Ellipse berührt, x' und y', so wird in der Lehre von der Ellipse bewiesen, dafs die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{x'}{\omega^2} x + \frac{y'}{\varepsilon^2} y = 1.$$



Nun ist DA der Abstand von D, in welchem die Tangente AB die XAxe schneidet, also der aus dieser Gleichung sich ergebende Wert x_0, der dem Werte $y = 0$ entspricht; derselbe wird aus der Gleichung

$$\frac{x'}{\omega^2} x_0 = 1; \quad x_0 = \frac{\omega^2}{x'} = AD.$$

DB ist der Wert y_0, in welchem die Tangente die YAxe schneidet; er wird, indem wir in der Gleichung der Tangente $x = 0$ setzen,

$$\frac{y'}{\varepsilon^2} y_0 = 1; \quad y_0 = \frac{\varepsilon^2}{y'} = DB.$$

Der Winkel ψ ist gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{AD}{DB} = \frac{\omega^2 y'}{\varepsilon^2 x'}.$$

Ziehen wir dC senkrecht zu DX, so ist $dC = y'$, $DC = x'$, somit

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tang} dDC = \operatorname{tang} \varphi,$$

und daraus für den Winkel, den die Wellennormale mit der Axe bildet,

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \operatorname{tang} \varphi.$$

Die Länge DF ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, wenn Dd jene des Strahles ist. Wir erhalten dafür

$$DF = DA \,.\, \cos \psi = \frac{\omega^2}{x'} \cos \psi \ldots \quad \text{(a)}$$

Um hierin x' durch ω, ε und φ auszudrücken, haben wir die beiden Gleichungen

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\omega^2 y'}{\varepsilon^2 x'}; \qquad \frac{\omega^2}{x'} = \frac{\varepsilon^2}{y'} \operatorname{tang} \psi \ldots \quad \text{(b)},$$

und aus der Gleichung der Tangente, indem wir $x = x'$, $y = y'$ setzen, wodurch der Punkt d der Tangente bestimmt wird,

$$\frac{x'^2}{\omega^2} + \frac{y'^2}{\varepsilon^2} = 1,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\varepsilon^2}{y'} = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\omega^2 - x'^2}}.$$

Setzen wir das in Gleichung (b), so wird

$$\frac{\omega^2}{x'} = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2 \operatorname{tang}^2 \psi},$$

und daraus

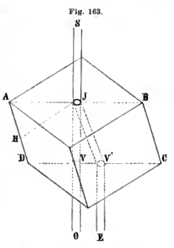
$$DF = \frac{\omega^2}{x'} \cdot \cos \psi = \sqrt{\omega^2 \cos^2 \psi + \varepsilon^2 \sin^2 \psi}.$$

Die Gleichung zeigt, daſs im allgemeinen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle eine ganz andere ist, daſs beide nur dann gleich sind, wenn $\psi = \varphi$, gleich 0 oder 90°, also wenn Strahl und Wellennormale zusammenfallen, was nur, wenn ψ und φ diese Werte haben, der Fall ist.

§ 90.

Betrachtung einzelner Fälle. Um den aus der Huyghensschen Konstruktion sich ergebenden Gang der Lichtstrahlen im Kalkspat besser zu übersehen, wollen wir einige specielle Fälle näher ableiten, und zwar zunächst die Doppelbrechung in einem Kalkspatrhomboeder bei senkrechter Incidenz. Ist SJ Fig. 163 ein die Grenzfläche treffendes Strahlenbündel, so spaltet sich dasselbe in das ungebrochen weiter gehende Bündel JVO und in das aufserordentlich gebrochene Bündel JV', welches in der Ebene $ABCD$ verschoben ist, welche die Axe des Krystalls in sich enthält, und nach unserer frühern Definition, da sie auch das Einfallslot in sich enthält, ein Hauptschnitt ist. Bei dem Austreten aus dem Krystall wird das Bündel $V'E$ wieder seiner frühern Richtung parallel.

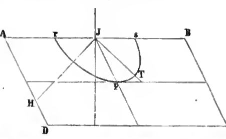
Fig. 163.



Dafs das ordentliche Bündel ungebrochen weiter geht, ergibt sich aus den gewöhnlichen Brechungsgesetzen, nach denen, wenn der Einfallswinkel gleich null ist, auch der Brechungswinkel denselben Wert hat.

Um den aufserordentlichen Strahl zu erhalten, legen wir um drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte der Grenzfläche, welche von der einfallenden Welle gleichzeitig getroffen werden, die in den Krystall fallende Hälfte der ellipsoidischen Wellenfläche und an diese eine gemeinsame Berührungsebene. Da diese drei Wellenflächen, welche ihren Mittelpunkt in der Grenzfläche haben, einander vollkommen gleich sind, so folgt, dafs diese Berührungsebene der Grenzfläche parallel ist. Daraus folgt, dafs die Normale der Welle, die von dem Mittelpunkte auf dieselbe gezogene Senkrechte mit dem Einfallslot parallel ist. Da nun der gebrochene Strahl, die Verbindungslinie des Wellenmittelpunktes mit dem Berührungspunkte der gebrochenen Welle und der Wellenfläche, in der durch die Wellennormale und die Axe gelegten Ebene liegt, so folgt, dafs der gebrochene Strahl in der Ebene $ABCD$ liegen mufs, welche durch das Einfallslot und die Axe gelegt ist.

Fig. 164.



Um die Richtung des gebrochenen Strahles zu bestimmen, sei $ABCD$ Fig. 164 jener Hauptschnitt und J einer der drei Punkte, um welchen wir das Wellenellipsoid konstruiert haben, und sei rps der Durchschnitt dieses Ellipsoides und des Hauptschnittes. Die Richtung der Axe ist JH, sie bildet mit AB einen Winkel AJH von $44^0\ 37'$. Da der Schnitt

durch die Axe des Rotationsellipsoides geht, ist rps eine Ellipse, deren Axen parallel JH und senkrecht zu JH, also JT sind. Letztere ist, weil der aufserordentliche Strahl im Kalkspat sich rascher fortpflanzt als der ordentliche, die grofse Axe der Ellipse. Die Ellipse wird im Punkte p von der Tangentialebene berührt, die Verbindungslinie Jp ist somit der aufserordentlich gebrochene Strahl. Da die Wellennormale mit dem Einfallslot zusammenfällt, ist der im vorigen Paragraph mit ψ bezeichnete Winkel gleich dem, welchen die Axe mit dem Einfallslote bildet, also da AJH gleich $44^0\ 37'$ ist, gleich $45^0\ 23'$; der Winkel $pJH = \varphi$ ist dann gegeben durch

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \operatorname{tang} \psi.$$

Setzen wir die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft gleich 1, so ist ω die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles

$$\omega = \frac{1}{1{,}654\ 3},$$

ε ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, wenn es senkrecht zur Axe durch den Krystall geht. Da, wie wir gleich sehen werden, wenn das Licht senkrecht zur Axe des Krystalls sich fortpflanzt, Strahl und Wellennormale zusammenfallen, ist ε der reciproke Wert des Brechungsexponenten des aufserordentlichen, senkrecht zur Axe sich fortpflanzenden Strahles. Der Wert desselben ist, wie wir vorhin schon angaben, 1,483 3. Daraus folgt

$$\operatorname{tang} \varphi = \left(\frac{1{,}654\ 3}{1{,}483\ 3}\right)^2 \operatorname{tang} 45^0\ 23' = \operatorname{tang} 51^0\ 35',$$

somit bildet der aufserordentlich gebrochene Strahl mit dem Einfallslot einen Winkel von $6^0\ 12'$.

Da die Wellenebene der aufserordentlich gebrochenen Strahlen der Grenzfläche parallel bleibt, so werden, wenn die untere Grenzfläche der obern parallel ist, die Punkte derselben, welche überhaupt von der gebrochenen Welle getroffen werden, alle gleichzeitig getroffen, es pflanzen sich daher von allen diesen Punkten gleichzeitig Elementarwellen in das folgende Mittel fort, und die allen gemeinsame Berührungsebene ist der zweiten brechenden Fläche wieder parallel. Ist das zweite Mittel isotrop, etwa Luft, so dafs Wellennormale und Strahl wieder identisch sind, so folgt, dafs dann der austretende Strahl dem eintretenden wieder parallel ist. Die Verschiebung des aufserordentlichen Strahles ist somit der Dicke des Krystalls proportional, sie ist

$$V = D \,.\, \operatorname{tang} 6^0\ 12'.$$

Alle diese Folgerungen werden durch die Erfahrung bestätigt.

Die Huyghenssche Konstruktion der gebrochenen Welle ergibt, wie wir sahen, im allgemeinen, dafs der gebrochene Strahl aus der Einfallsebene heraustritt; in zwei Fällen indes ergibt sie, dafs der gebrochene Strahl in der Einfallsebene bleibt, nämlich wenn die Axe in der Einfallsebene liegt und wenn die Axe zu derselben senkrecht ist. Es folgt das aus der vorhin schon gemachten Bemerkung, dafs die Normale der Welle stets in der Einfallsebene liegt und dafs der gebrochene Strahl in der durch diese Normale und die Axe des Krystalls gelegten Ebene liegt. Liegt nun die Axe in der Einfallsebene, so fällt die durch die Wellennormale und die Axe gelegte Ebene

mit der Einfallsebene zusammen, ist die Axe zur Einfallsebene senkrecht, so fällt der Strahl mit der Wellennormale zusammen. Dafs letzteres der Fall ist, folgt daraus, dafs der zur Axe senkrechte Durchschnitt des Wellenellipsoides ein Kreis ist. Die gebrochene Wellenebene, welche immer senkrecht zur Einfallsebene ist, ist somit der Axe parallel, sie berührt deshalb das Wellenellipsoid in einem Äquatorialschnitt, also in einem durch den Mittelpunkt senkrecht zur Axe gelegten Schnitt. Da dieser Schnitt ein Kreis ist, so steht der von dem Mittelpunkte des Ellipsoides an den Berührungspunkt gezogene Halbmesser senkrecht zur Tangente und ist deshalb gleichzeitig Strahl und Wellennormale und liegt als solche in der Einfallsebene. Wenn die Axe des Krystalls senkrecht zur Einfallsebene ist, so ist der gebrochene Strahl immer auch senkrecht zur Axe, oder der vorhin mit φ bezeichnete Winkel ist ebenso wie $\psi = 90^0$.

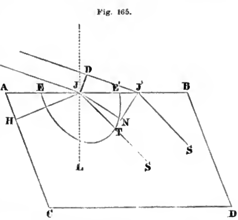
Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles oder der Welle erhalten wir somit den konstanten Wert ε, es mufs deshalb der Brechungsexponent für jeden Einfallswinkel derselbe, und zwar

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{\varepsilon} = 1{,}483\ 3$$

sein, so dafs wir die Richtung des gebrochenen Strahles nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz erhalten, weil der Strahl mit der Wellennormale zusammenfällt.

Wenn die Axe in der Einfallsebene liegt, ist die Richtung des gebrochenen Strahles ebenfalls leicht mit Hülfe des abgeleiteten Ausdruckes für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle zu erhalten. Sei Fig. 165 JD eine unter dem Winkel i einfallende Welle, JH die Axe, welche mit dem Einfallslot den Winkel $HJL = \alpha$ bilde, ETE' das Wellenellipsoid des aufserordentlichen Strahles, welches in T von der durch J' gelegten Tangentialebene berührt werde, so dafs JTS der aufserordentliche Strahl sei. JN sei die zur Welle gezogene Normale. Wir suchen den Winkel $LJT = r$. Bezeichnen wir den Winkel TJH, den der Strahl mit der Axe bildet, mit φ, so ist $r = \varphi - \alpha$.

Fig. 165.



Zur Bestimmung von φ suchen wir zunächst den Winkel $NJH = \psi$, welchen die Wellennormale mit der Axe bildet, zwischen welchem und φ die im vorigen Paragraphen abgeleitete Beziehung besteht

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \operatorname{tang} \psi.$$

Nennen wir den Winkel, den die Wellennormale mit dem Einfallslote

bildet, $NJL = \chi$, so dafs $\chi = \psi - \alpha$, so ist auch der Winkel, den die gebrochene Welle mit der Grenzfläche bildet, $NJ'J = \chi$, somit

$$\sin \chi = \frac{JN}{JJ'}.$$

Für den Einfallswinkel i haben wir ebenso

$$\sin i = \frac{J'D}{JJ'},$$

somit

$$\frac{\sin i}{\sin \chi} = \frac{\sin i}{\sin (\psi - \alpha)} = \frac{J'D}{JN}.$$

JN ist die Strecke, welche die aufserordentliche Welle im Krystall zurücklegt, während die einfallende Welle die Strecke $J'D$ zurücklegt. Der Quotient beider ist also gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeit des Lichtes in Luft und jener der aufserordentlichen Welle im Krystall, deren Normale mit der Axe den Winkel ψ bildet. Somit ist

$$\frac{\sin i}{\sin (\psi - \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \cos^2 \psi + \varepsilon^2 \sin^2 \psi}},$$

da nach dem vorigen Paragraphen der Nenner diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, wenn wir jene in Luft gleich 1 setzen.

Lösen wir diese Gleichung nach ψ auf, so erhält man leicht

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \varepsilon^2 \sin^2 i} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 \sin^2 i - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \varepsilon^2 \sin^2 i} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \varepsilon^2 \sin^2 i)^2}},$$

also den Winkel ψ in seiner Abhängigkeit von α und i. Aus diesem erhalten wir φ und daraus r. Setzen wir z. B. voraus, die Platte sei senkrecht zur Axe geschnitten, also $\alpha = 0$, so wird

$$\operatorname{tang} \psi = \pm \frac{\omega \,.\, \sin i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Da dann jedenfalls $\psi < 90^0$, müssen wir dem Ausdrucke das positive Vorzeichen geben. Dann ist

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \operatorname{tang} \psi = \frac{\varepsilon^2 \sin i}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} = \operatorname{tang} r.$$

da wenn $\alpha = 0$, auch $\varphi = r$ ist

Nehmen wir an, die Platte sei parallel der Axe geschnitten, also $\alpha = 90^0$, so ist, da dann $\psi > 90^0$,

$$\operatorname{tang} \psi = -\frac{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}{\varepsilon \sin i}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{\varepsilon \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}{\omega^2 \sin i}$$

und schliefslich

$$\operatorname{tang} r = \operatorname{tang} (\varphi - 90^0) = -\frac{1}{\operatorname{tang} \varphi} = \frac{\omega^2 \sin i}{\varepsilon \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}.$$

Indem man die Verschiebung des aufserordentlichen Strahles bei dem Durchtritt durch eine planparallele Platte mifst, kann man diese Resultate

durch den Versuch prüfen. Malus[1]) hat bei seinen Untersuchungen über die Doppelbrechung die Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung nachgewiesen.

Betreffs der Schwingungsrichtung des ordentlich und aufserordentlich gebrochenen Strahles bemerkten wir bei Besprechung der Polarisationserscheinungen, dafs die Schwingungen des ordentlichen Strahles senkrecht zur Axe, die des aufserordentlichen Strahles in einer durch die Axe gelegten Ebene geschehen. In den bisher betrachteten Fällen können wir daher die Schwingungsrichtungen leicht bestimmen. Im Falle der senkrechten Incidenz geschehen, wie wir damals auch erwähnten, die Schwingungen des ordentlichen Strahles immer senkrecht zum Hauptschnitt, die des aufserordentlichen immer im Hauptschnitt. Fällt die Axe in die Einfallsebene, so sind die Schwingungen des ordentlichen Strahles senkrecht zur Einfallsebene. Die Schwingungen des aufserordentlichen Strahles geschehen in der Einfallsebene, in der gebrochenen Welle; sie sind also nicht senkrecht zum gebrochenen Strahl, sondern zur Wellennormale. Steht die Axe zur Einfallsebene senkrecht, so geschehen die Schwingungen des ordentlichen Strahles in der Einfallsebene, senkrecht zum gebrochenen Strahle, die des aufserordentlichen geschehen senkrecht zur Einfallsebene, somit, da der gebrochene Strahl, der in diesem Falle mit der Wellennormale zusammenfällt, ganz in der Einfallsebene liegt, auch senkrecht zum Strahl.

Die Brechungsebene des aufserordentlichen Strahles fällt weder mit der Einfallsebene noch mit dem Hauptschnitt zusammen, wenn bei schiefer Incidenz der Hauptschnitt weder mit der Einfallsebene zusammenfällt, noch zu ihr senkrecht ist. Wir begnügen uns hier nur für einen Fall die Lage der Brechungsebene anzudeuten, nämlich wenn die Axe der brechenden Fläche parallel ist und die Einfallsebene mit dem Hauptschnitt irgend einen Winkel χ bildet. Schon die vorher berechneten Fälle zeigen, dafs es sich bei Berechnung dieser Lage nur um Probleme der analytischen Geometrie des Ellipsoides handelt, wir geben deshalb sofort das Resultat. Nennen wir den Winkel, den die Brechungsebene des aufserordentlichen Strahles mit der Axenebene bildet, χ', so wird

$$\sin \chi' = \frac{\varepsilon^2 \sin \chi}{\sqrt{\omega^4 \cos^2 \chi + \varepsilon^4 \sin^2 \chi}},$$

wenn wieder wie vorhin ω die Rotationsaxe des Ellipsoides ist, und der Brechungswinkel wird, wenn i der Einfallswinkel ist,

$$\operatorname{tang} r = \frac{\sin i \sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \chi + \omega^4 \cos^2 \chi}}{\varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 i \,(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi)}}.$$

Dieser Ausdruck für tang r gibt auch sofort die vorhin betrachteten beiden Fälle; setzen wir $\chi = 0$, so fällt die Axe in die Einfallsebene und es wird wie vorhin

$$\operatorname{tang} r = \frac{\omega^2 \sin i}{\varepsilon \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}.$$

[1]) *Malus*, Théorie de la double réfraction. Paris 1810.

Wird $\chi = 90^0$, so wird auch $\chi' = 90^0$ und

$$\operatorname{tang} r = \frac{\varepsilon \,.\, \sin i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Da ε die Strecke ist, durch welche das Licht senkrecht zur Axe sich fortpflanzt, während es in der Luft die Strecke 1 zurücklegt, so ist

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{\varepsilon}; \quad \varepsilon \,.\, \sin i = \sin r;$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{\sin r}{\cos r}.$$

Die Bestimmung der Schwingungsrichtungen ist in dem Falle ziemlich schwierig, wir gehen daranf nicht ein[1]); sie liegt im aufserordentlichen Strahl in der dnrch den Strahl und die Wellennormale gelegten Ebene, im ordentlichen in einer zn der dnrch die Axe und den ordentlichen Strahl gelegten Ebene senkrechten Richtung.

§ 91.

Einaxige Krystalle. Der Kalkspat ist nicht der einzige Krystall, in welchem die in dem vorigen Paragraphen beschriebenen und durch die Huyghenssche Konstruktion abgeleiteten Erscheinungen der Doppelbrechung des Lichtes sich zeigen, sondern alle zn den beiden krystallographischen Systemen mit einer Hauptaxe, dem tetragonalen oder quadratischen und dem hexagonalen Systeme gehörigen Krystalle zeigen ganz ähnliche Erscheinungen.

Den Gestalten des tetragonalen oder quadratischen Systemes liegt ein rechtwinkliges dreiaxiges Kreuz zu Grunde, von denen zwei Axen in einer Ebene liegen und unter einander gleich sind; die dritte Axe, welche auf dieser senkrecht steht und von den beiden andern verschieden ist, ist die Hauptaxe des Krystalles. Fällt Licht auf eine Platte eines Krystalles ans diesem System, so erleidet es im allgemeinen eine Doppelbrechung, aufser dann, wenn die gebrochenen Strahlen der krystallographischen Hauptaxe parallel, die gebrochene Wellenebene also zu derselben senkrecht ist.

Das hexagonale System wird am beqnemsten auf vier Axen bezogen, von welchen drei in einer Ebene liegen nnd sich unter einem Winkel von 60° schneiden; die vierte steht auf dieser Ebene senkrecht; die drei ersten sind unter einander an Gröfse gleich, die vierte ist entweder gröfser oder kleiner, sie ist daher die krystallographische Hanptaxe. Auch diese Krystalle erteilen dem Lichte im allgemeinen eine Doppelbrechung; der eine der Strahlen folgt dem gewöhnlichen Brechungsgesetz, sein Brechungsexponent ist immer derselbe; der andere ist durch die entwickelte Huyghenssche Konstruktion mit ellipsoidischer Wellenfläche zu erhalten. Nur wenn die gebrochenen Strahlen der krystallographischen Hauptaxe parallel sind, tritt keine Doppelbrechung ein.

Die Krystalle dieser beiden Systeme haben also das Gemeinsame, dafs

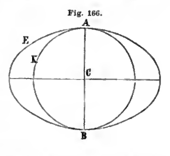
[1]) Man sehe *Beer*, Einleitung in die höhere Optik p. 257 ff.

sie bei der Brechung das Licht im allgemeinen in einen ordentlichen und einen aufserordentlichen Strahl zerlegen, und dafs es nur eine Richtung gibt, in der eine solche Doppelbrechung nicht stattfindet. Sie sind demnach in optischer Beziehung nicht verschieden und werden deshalb mit dem gemeinsamen Namen der optisch einaxigen Krystalle bezeichnet. Unter optischer Axe wird dann eben die Richtung verstanden, in welcher keine Doppelbrechung stattfindet, und wie erwähnt, fällt diese Richtung mit der krystallographischen Hauptaxe zusammen.

Die einaxigen Krystalle zerfallen aber nach einer andern Richtung in zwei grofse Klassen, in die positiven oder attraktiven und in die negativen oder repulsiven Krystalle. Ein Repräsentant der letztern Klasse ist der Kalkspat; zu ihr gehören alle jene Krystalle, bei denen die Geschwindigkeit der aufserordentlichen Strahlen gröfser, der Brechungsexponent derselben also kleiner ist als der der ordentlichen Strahlen. Das die Wellenfläche der aufserordentlichen Strahlen darstellende, um die Axe herumgelegte Rotationsellipsoid ist somit ein abgeplattetes, der zur Axe senkrechte Durchmesser des Äquatorialschnittes ist gröfser als die Axe der Wellenfläche.

Man kann die Wellenflächen der beiden im Krystall sich fortpflanzenden Strahlen vereinigen und die beiden Flächen zusammen als die Wellenfläche der einaxig negativen Krystalle bezeichnen. Dieselbe besteht dann offenbar aus einer Kugel und einem Rotationsellipsoid, die wir erhalten, wenn wir den Kreis K und die Ellipse E (Fig. 166) um ihre gemeinsame Axe AB rotieren lassen. Die aus der Rotation des Kreises entstehende Kugel ist die Grenze, bis zu welcher sich in einer gegebenen Zeit von dem im Innern des Krystalls liegenden Punkte C die ordentlichen Strahlen fortgepflanzt haben, während das Ellipsoid die Grenze der gleichzeitig fortgepflanzten aufserordentlichen Strahlen darstellt. Die beiden Flächen berühren sich an den Endpunkten der kleinen Axe des Ellipsoides; die Wellenfläche der ordentlichen Strahlen ist ganz von derjenigen der aufserordentlichen eingeschlossen.

Fig. 166.



Der Name repulsive Krystalle für die zu dieser Klasse gehörigen rührt daher, weil der aufserordentlich gebrochene Strahl, wenn die Einfallsebene ein Hauptschnitt des Krystalles ist, immer weiter von der Axe entfernt ist als der ordentliche Strahl und man deshalb bei Zugrundelegung der Emissionstheorie annahm, dafs von der Axe der Krystalle eine abstofsende Kraft ausgehe, welche einige Lichtteilchen der eingedrungenen Strahlen ablenke und so den aufserordentlichen Strahl veranlasse.

Die gröfsere Mehrzahl der einaxigen Krystalle gehört zu dieser Kategorie. Aus der von Beer[1]) gegebenen Zusammenstellung entnehmen wir folgende; die Brechungsexponenten der ordentlichen Strahlen sind mit o, die der aufserordentlichen mit e bezeichnet.

---

[1]) *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853.

A. Tetragonale Krystalle.

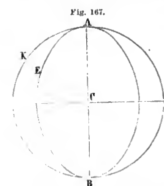
Ammoniak, doppelt-arseniksaures	$o = 1,578$;	$e = 1,524$	Sénarmont[1]),
Ammoniak, doppelt-phosphorsaures	$o = 1,515$;	$e = 1,477$	Sénarmont,
Anatas	$o = 2,554$;	$e = 2,493$	Miller[2]),
Kali, doppelt-arseniksaures	$o = 1,592$;	$e = 1,536$	Sénarmont,
Kali, doppelt-phosphorsaures	$o = 1,507$;	$e = 1,476$	Sénarmont,
Kupferoxyd-Ammoniak, salzsaures	$o = 1,744$;	$e = 1,724$	Sénarmont.

B. Hexagonale Krystalle.

Apatit,			
Chlorcalcium,			
Kalkspat	$o = 1,654\,3$;	$e = 1,483\,3$	Malus[3]),
Korund,			
Natron, salpetersaures	$o = 1,481$;	$e = 1,251$	Marx[4]),
Rubin,			
Smaragd,			
Turmalin, weifser	$o = 1,636\,6$;	$e = 1,619\,3$	Miller.

Lange Zeit glaubte man, dafs sämtliche einaxige Krystalle in diese Klasse gehörten, bis Biot im Jahre 1814 die Entdeckung machte[5]), dafs in vielen Krystallen der aufsergewöhnliche Brechungsexponent der gröfsere sei. In diesen pflanzt sich also das Licht parallel der optischen Axe und somit als ordentlicher den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgender Strahl am schnellsten fort. Die aufserordentlichen Strahlen pflanzen sich immer langsamer fort, am langsamsten in einer zur optischen Axe senkrechten Richtung. Auch für diese Krystalle ist die Huyghenssche Konstruktion unmittelbar anwendbar, nur ist das Rotationsellipsoid, welches die Wellenfläche der aufserordentlichen Strahlen darstellt, ein anderes, es ist ein in die Länge gezogenes Rotationsellipsoid, dessen der Axe parallele Rotationsaxe gröfser ist als der Durchmesser des darauf senkrechten Äquatorialschnittes. Auch hier können wir die Wellenfläche des gebrochenen Lichtes gemeinsam durch eine Kugel und ein Rotationsellipsoid darstellen, welche wir erhalten, wenn wir den Kreis K und die Ellipse E (Fig. 167) um die beiden gemeinschaftliche Axe AB rotieren lassen. Die durch Rotation des Kreises K entstehende Kugel ist die Grenze, bis zu welcher der ordentlich gebrochene Strahl sich von einem Punkte C im Innern des Krystalles in einer gegebenen Zeit fortgepflanzt hat, während das Ellipsoid die

Fig. 167.



[1]) *Sénarmont*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. 33.
[2]) *Miller*, Poggend. Annal. LVII.
[3]) *Malus*, Théorie de la double réfraction. Paris 1810.
[4]) *Marx*, Schweigger Journal LVII.
[5]) *Biot*, Mémoires de l'Institut de France 1814.

Grenze ist, bis zu welcher sich die Lichtbewegung der aufserordentlichen Strahlen in derselben Zeit ausgebreitet hat. Die beiden Teile der Fläche, Kugel und verlängertes Rotationsellipsoid, berühren sich an den Endpunkten der grofsen Axe des Ellipsoides, die Fläche der ordentlichen Strahlen umgibt also rings diejenige der aufserordentlichen Strahlen.

Da die aufserordentlichen Strahlen stärker gebrochen werden, sind sie der Axe näher gerückt als die ordentlichen Strahlen, sie schliefsen mit der Richtung der Axe einen kleinern Winkel ein. Wegen der Annahme, dafs die Axe der Krystalle einige der in den Krystall eingedrungenen Lichtteilchen anzöge und dadurch den aufserordentlichen Strahl erzeuge, nannte Biot diese im Gegensatz zu der ersten Klasse attraktive Krystalle. Jetzt nennt man sie allgemein solche mit positiver Doppelbrechung.

Folgende Krystalle gehören in diese Kategorie:

A. Tetragonale Krystalle.

Apophyllit,		
Kalk-Kupfer, essigsaures		
Rutil,		
Schwerstein	$o = 1{,}970$;	$e = 2{,}129$,
Zirkon	$o = 1{,}961$;	$e = 2{,}015$.
Zinnstein.		

B. Hexagonale Krystalle.

Amethyst,			
Bergkrystall	$o = 1{,}5471$;	$e = 1{,}5563$	Rudberg[1]),
Dioptas	$o = 1{,}667$;	$e = 1{,}723$	Miller,
Eis			
Kali, schwefelsaures	$o = 1{,}493$;	$e = 1{,}502$	Sénarmont.

Um die Richtung der Strahlen in einem dieser Krystalle zu bestimmen, hat man nur die Wellenflächen um den Einfallspunkt zu bestimmen, indem man den Radius der Kugel und die Rotationsaxe des Ellipsoides dem reciproken Werte des Brechungsexponenten o, die zweite Axe des Rotationsellipsoides oder den Durchmesser von dessen Äquatorialschnitt dem reciproken Werte des aufserordentlichen Brechungsexponenten e proportional macht.

§ 92.

Physikalische Erklärung der Doppelbrechung. Die Doppelbrechung des Lichtes besteht nach den Mitteilungen der vorigen Paragraphen darin, dafs die an der Grenzfläche eines einaxigen Krystalles ankommende Lichtbewegung in zwei zu einander senkrechte Komponenten zerlegt wird, deren eine in einer zur Axe des Krystalles senkrechten Ebene liegt, es sind die Schwingungen des ordentlichen Strahles, während die andere in einer Ebene liegt, welche durch die Axe des Krystalles gelegt wird.

[1]) *Rudberg*, Poggend. Annal. XIV.

Diese beiden Komponenten pflanzen sich im allgemeinen durch den Krystall mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort, die erstere jedoch mit konstanter, welches auch die Richtung ist, in welcher sie den Krystall durchsetzt, die letztere mit verschiedener Geschwindigkeit, je nach dem Winkel, welchen die Schwingungen mit der Axe des Krystalles bilden. Das Fortpflanzungsgesetz der Wellen und Strahlen, sowie die Polarisationsrichtung der aufserordentlichen Strahlen wird uns durch die Huyghenssche Konstruktion geliefert.

Eine physikalische Erklärung der Doppelbrechung hat daher die doppelte Aufgabe, erstens nachzuweisen, wie es kommt, dafs eine Zerlegung des Lichtes in jene beiden Komponenten stattfindet und dann das Gesetz aufzusuchen, nach welchem jede der beiden Komponenten in dem Krystalle sich fortpflanzt; oder vielmehr, da jenes Gesetz vollständig durch die Huyghenssche Konstruktion gegeben ist, die letztere theoretisch zu begründen. Beides ergibt sich unmittelbar aus einer einfachen Hypothese über die die Lichtbewegung bestimmenden elastischen Kräfte im Innern der einaxigen Krystalle, auf welche wir leicht durch Beachtung der im dritten Abschnitt des ersten Teiles untersuchten Gesetze der Wellenbewegung geführt werden[1]).

Denken wir uns einen durchaus homogenen cylindrischen Stab oder eine cylindrische gespannte Saite und versetzen diese in transversale Schwingungen. Ein solcher Stab verhält sich rings um die Axe durchaus gleich, und in welcher Richtung wir ihn auch stofsen und schwingen lassen, für alle diese Schwingungen sind die Gröfsen, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmen, Elasticität und Dichtigkeit des Stabes sich genau gleich; alle diese Schwingungen pflanzen sich daher mit eben derselben Geschwindigkeit durch den Stab fort. Haben wir z. B. einen solchen Stab nach einer Richtung in Schwingung versetzt und stofsen ihn dann nach einer andern Richtung, so setzen sich die Schwingungen nach beiden Richtungen zusammen, und so lange der Stab schwingt, beschreibt jedes Teilchen desselben die resultierende Bahn, welche aus jenen Teilbewegungen sich ergibt. Stofsen wir den Stab noch nach einer dritten, vierten etc., aber immer zur Axe senkrechten Richtung, so setzen auch die hieraus hervorgehenden Schwingungen mit den ersten sich zusammen und jedes Teilchen des Stabes beschreibt die aus allen diesen Impulsen resultierende Bahn, so lange der Stab schwingt. Könnten wir diesem Stabe in sehr kurzer Zeit Stöfse nach

[1]) Die Theorie der Doppelbrechung müfsten wir strenge genommen in ähnlicher Weise behandeln, wie die Theorie der Brechung in isotropen Medien, also die Gleichungen für die Beschleunigungen bilden, welche durch die elastischen Kräfte des Äthers und der mitschwingenden Moleküle der Krystalle erzeugt werden, und aus diesen die Gleichungen der Lichtbewegung in den Krystallen ableiten. Es würde das aber hier zu viel Raum beanspruchen. Wir begnügen uns daher die Fresnelsche Theorie der Doppelbrechung vorzuführen, welche über die von uns zu besprechenden Erscheinungen der Doppelbrechung vollständig Rechenschaft gibt, allerdings nicht die Dispersion und den Zusammenhang derselben mit der Absorption zeigt. Eine Ausdehnung der im ersten Abschnitt vorgeführten Theorie der Brechung und Dispersion in isotropen Medien auf die Krystalle hat Ketteler gegeben. Monatsberichte der Berliner Akademie November 1879. Eine sehr übersichtliche Darlegung der Doppelbrechung in Krystallen auf Grund dieser Principien gibt Lommel Wiedem. Annal. Bd. IV. 1878.

allen zur Axe senkrechten Richtungen geben, so würden sich alle diese Schwingungen mit gleicher Geschwindigkeit durch denselben fortpflanzen, sie würden sich daher überall kombinieren, und jedes Teilchen würde die aus allen Impulsen resultierenden Bahnen beschreiben.

Die Schwingungen des Lichtäthers, welche wir als Licht wahrnehmen, geschehen alle parallel den Lichtwellen, in diesen aber nach allen möglichen zur Wellennormale senkrechten Richtungen; welches nun auch in einem isotropen Mittel, also im leeren Raume oder in der Luft etc. die Richtung der Schwingungen sei, sie pflanzen sich immer mit derselben Geschwindigkeit fort. In einem unpolarisierten Lichtstrahl beschreibt jedes Lichtteilchen eine Bahn, welche aus den Impulsen nach allen Azimuten resultiert. Ein sich in einem isotropen Mittel fortpflanzender Lichtstrahl verhält sich also gerade so wie der eben betrachtete homogene cylindrische Stab.

Denken wir uns jetzt aber einen Stab von elliptischem Querschnitt und versetzen diesen in Schwingungen. Weil die Dicke dieses Stabes nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, ist auch die Elasticität des Stabes nach verschiedenen Richtungen verschieden, die durch eine der grofsen Axe des Querschnittes parallele Biegung entwickelte Elasticität ist gröfser als diejenige, welche durch eine Biegung nach einer andern Richtung entwickelt wird. Wir wollen der Kürze des Ausdruckes wegen die durch die erste Biegung entwickelte Elasticität, welche für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen mafsgebend ist, als die Elasticität des Stabes nach der grofsen Axe, die andere als die Elasticität nach der Richtung der kleinen Axe bezeichnen; überhaupt soll, wenn von der Elasticität eines Mittels nach einer bestimmten Richtung die Rede ist, darunter immer die durch eine Biegung, oder durch Schwingungen, welche nach dieser Richtung geschehen, entwickelte Elasticität verstanden werden, welche die aus der Gleichgewichtslage verschobenen Teilchen zurückzieht und nach § 126 des ersten Teils für die Oscillationsdauer und Geschwindigkeit der Fortpflanzung mafsgebend ist.

Versetzen wir den Stab mit elliptischem Querschnitt in Schwingungen parallel der grofsen Axe, so pflanzen sich die Schwingungen in dem Stabe am raschesten fort, versetzen wir ihn in Schwingungen parallel der kleinen Axe, so pflanzen sich diese am langsamsten fort. Stofsen wir aber den Stab nach einer zwischen jenen beiden Richtungen liegenden, so beobachten wir immer (man sehe § 145 des ersten Teiles) eine Zerlegung der dadurch erzeugten Schwingungen nach der Richtung der gröfsten und kleinsten Elasticität; dieselben pflanzen sich unabhängig von einander durch den Stab fort, jede mit der ihr eigenen Geschwindigkeit. Wir schliefsen das aus der Beobachtung der Kurven, welche ein Punkt dieses Stabes bei einem solchen schiefen Stofse durchläuft.

Wir haben schon mehrfach gesehen, dafs die Ätherschwingungen des Lichtes denselben mechanischen Gesetzen folgen, welche wir im dritten Abschnitt des ersten Teiles entwickelt haben. Wenn demnach eine Lichtwelle sich in einem Mittel fortpflanzt, dessen Elasticität nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, so mufs auch hier eine Zerlegung der Schwingungen nach der Richtung der gröfsten und kleinsten Elasticität stattfinden, welches auch die ursprüngliche Richtung der Schwingungen war. Jede dieser polarisierten Wellen pflanzt sich dann mit der durch die Elasticität nach der

betreffenden Richtung bedingten Geschwindigkeit fort, gemäfs der früher entwickelten Gleichung

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Wenn nun in einem besondern Falle von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung auch die Richtung der Fortpflanzung abhängt, so werden sich die beiden senkrecht zu einander polarisierten Wellen von einander trennen müssen und jede nach der durch ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmten Richtung fortpflanzen.

In dem soeben Gesagten liegt sofort die Erklärung für die Teilung des Lichtes in zwei nach verschiedenen Richtungen sich fortpflanzende Strahlen bei seinem Eintritte in einen doppelbrechenden Krystall, wenn wir die Hypothese machen, dafs die Elasticität des Äthers im Krystalle nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene ist. Eine in den Krystall eintretende Welle unpolarisierten Lichtes mufs sich dann in zwei polarisierte Wellen spalten, deren jede mit der ihr eigenen Geschwindigkeit sich fortpflanzt, und da die Fortpflanzungsrichtung derselben bei der Brechung von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängt, so müssen diese Wellen nach verschiedenen Richtungen sich fortpflanzen.

Auf eine solche Verschiedenheit der elastischen Kräfte für die Lichtschwingungen führt die Helmholtzsche Theorie der Dispersion, die wir § 22 kennen lernten, und die bekannte Erfahrung, dafs die Krystalle selbst anisotrope Körper sind, die nach verschiedenen Richtungen verschiedene Eigenschaften haben. Wenn wir deshalb auch voraussetzen, dafs der Äther selbst im Innern der Krystalle ganz dieselben Eigenschaften hat als im freien Raume, so mufs doch infolge der Wechselwirkung zwischen dem Äther und den körperlichen Molekülen die durch die nach verschiedenen Richtungen durch die Schwingungen geweckte elastische Kraft eine verschiedene sein, weil durch gleiche Verschiebung der Atome im Moleküle in den Krystallen verschiedene elastische Kräfte geweckt werden. Von den beiden der Helmholtzschen Theorie zum Grunde liegenden Bewegungsgleichungen würde deshalb in der zweiten, welche die Bewegung der körperlichen Moleküle darstellt,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\beta}{m}(\eta - y) - \frac{\gamma}{m}y - \frac{\delta}{m}\frac{dy}{dt}$$

je nach der Richtung der Schwingungen verschieden sein, indem γ und vielleicht auch δ für die verschiedenen Richtungen einen verschiedenen Wert hätten.

Nach dieser Bemerkung läfst sich leicht erkennen, in welcher Weise zu verfahren ist, um nach der Helmholtzschen Theorie die Fortpflanzung des Lichtes in Krystallen zu behandeln. Wir müfsten die Verschiebungen der Ätherteilchen und der körperlichen Atome durch ihre Komponenten parallel drei Koordinatenaxen, deren eine mit der Axe des Krystalls zusammenfiele, darstellen, und für jede dieser Komponenten die Bewegungsgleichungen, für die Komponenten der Verschiebungen der körperlichen Moleküle, mit den je nach den Axen verschiedenen Werten von γ und δ bilden, und dann in ähnlicher Weise, wie wir es § 23 gethan haben, die

Integrale dieser Gleichungen aufsuchen. Indes, wie gesagt, würden die Entwicklungen zu viel Raum beanspruchen, wir verweisen deshalb auf die vorhin erwähnten Abhandlungen von Ketteler und besonders diejenige von Lommel wegen ihrer Übersichtlichkeit.

Fresnel sah, wie es die frühere Theorie der Brechung für sämtliche brechende Medien that, die Krystalle als einfach elastische Medien, das heifst er sieht nur den Äther als das sich Bewegende an, der nur insoweit von den körperlichen Molekülen beeinflufst wird, dafs seine Dichtigkeit eine andere ist, als im freien Raum, und dafs er an der krystallinischen Struktur teilnimmt, das heifst, dafs die durch die nach verschiedenen Richtungen stattfindenden Schwingungen geweckten elastischen Kräfte verschieden sind. Diese Annahme läfst die Gesetze der Fortpflanzung elastischer Schwingnngen, die für einfache Medien gültig sind, auch für Krystalle gelten, wodurch eben sich die Doppelbrechung in Krystallen so sehr viel einfacher ergibt, als nach der unsern jetzigen Anschauungen entsprechenden Theorie, allerdings nur die Doppelbrechung selbst, nicht die Dispersion und Absorption des Lichtes.

Fresnel nimmt an[1]), dafs die Elasticität des Äthers im Krystall nach verschiedenen Richtungen verschieden ist; für Schwingungen in der Richtung der Axe ist sie am gröfsten bei negativen, am kleinsten bei positiven Krystallen. Bei negativen Krystallen nimmt sie stetig ab, so wie die betrachteten Schwingungsrichtungen mit der Axe gröfsere Winkel bilden, nach allen Richtungen jedoch, welche mit der Axe gleiche Winkel χ bilden, ist sie dieselbe. Am kleinsten ist sie in negativen Krystallen in einer zur Axe senkrechten Ebene, dort aber, da alle die möglichen in dieser Ebene liegenden Richtungen mit der Axe gleiche Winkel von 90° bilden, nach allen Richtungen dieselbe. Bei positiven Krystallen ist es umgekehrt, dort nimmt die Elasticität mit der Neigung der Schwingungsrichtungen gegen die Axe zu, und in allen zur Axe senkrechten Richtungen ist sie am gröfsten.

Das Gesetz, nach welchem sich die Elasticität in den einaxigen Krystallen mit der Schwingungsrichtung ändert, läfst sich durch eine rings geschlossene Fläche darstellen, welche Fresnel Elasticitätsfläche nennt. Dieselbe ist eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe in die optische oder krystallographische Hauptaxe des Krystalles fällt. Die Elasticität des Äthers nach irgend einer Richtung ist dann dem Quadrate des von dem Mittelpunkte in dieser Richtung an die Fläche gezogenen Halbmessers proportional. Die Kurve, welche wir zur Erzeugung der Elasticitätsfläche um die Axe rotieren lassen müssen, bestimmt Fresnel folgendermafsen. Ist die Elasticität des Äthers für Schwingungen, welche parallel der Axe geschehen, proportional β^2 und für solche, welche zu derselben senkrecht sind, proportional α^2, so ist sie für Schwingungen, welche mit der Axe irgend einen Winkel χ bilden, parallel der Richtung der Schwingungen, proportional ϱ^2, wo dann ϱ aus der Gleichung bestimmt wird

$$\varrho^2 = \beta^2 . \cos^2 \chi + \alpha^2 . \sin^2 \chi.$$

Diese Gleichung der Elasticitätsfläche folgt schon unmittelbar aus der

[1]) *Fresnel*, Mémoires de l'Acad. de Sciences Tome VII Poggend. Annal. XXIII. Oeuvres complètes T. II. p. 487 ff.



Annahme, dafs die Elasticität nach irgend einer Richtung sich einfach aus den Komponenten der Verschiebungen nach zweien zu einander senkrechten Axen gemäfs dem Satze vom Kräfteparallelogramm berechnen lasse. Nach dieser Annahme soll die Elasticität, wenn ein Molekül in der Richtung der Axe um die Länge 1 aus der Gleichgewichtslage entfernt wird, gleich β^2 sein, senkrecht zur Axe gleich α^2. Wird dasselbe Molekül in der Richtung χ um die Länge 1 aus der Gleichgewichtslage entfernt, so ergibt sich nach dieser Annahme die dasselbe bewegende Kraft in folgender Weise. Die Verschiebung parallel der Axe ist $\cos\chi$, jene senkrecht zur Axe $\sin\chi$, und die Komponenten der das Molekül parallel diesen Richtungen zurücktreibenden Kraft R sind $\beta^2\cos\chi$ und $\alpha^2\sin\chi$; nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm ist dann

$$R^2 = \beta^4\cos^2\chi + \alpha^4\sin^2\chi.$$

Die Richtung dieser Resultierenden, den Winkel χ', den sie mit der Axe bildet, erhalten wir dann nach demselben Satze aus

$$\cos\chi' = \frac{\beta^2\cos\chi}{R}; \qquad \sin\chi' = \frac{\alpha^2\sin\chi}{R},$$

und den Winkel $\chi - \chi'$, welchen diese Kraft mit der Richtung der Schwingung bildet, durch

$$\cos(\chi - \chi') = \frac{\beta^2\cos^2\chi + \alpha^2\sin^2\chi}{R}.$$

Man sieht somit, dafs bei allen Verschiebungen, die nicht parallel oder senkrecht zur Axe sind, die Richtung der Resultierenden nicht mit der Richtung der Schwingungen zusammenfällt; die in die Richtung der Schwingungen fallende Komponente, die wir mit ϱ^2 bezeichneten, ist dann

$$\varrho^2 = R\cos(\chi - \chi') = \beta^2\cos^2\chi + \alpha^2\sin^2\chi,$$

somit jene, welche wir vorhin als die von Fresnel gegebene Gleichung für die Elasticität parallel χ anführten.

Die zur Schwingungsrichtung senkrechte Komponente der Resultierenden brauchen wir nicht zu beachten, da diese, wie sofort näher hervor-

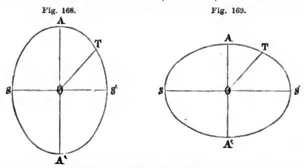


Fig. 168. Fig. 169.

treten wird, zu longitudinalen gegen die Wellenebene senkrechten Schwingungen Anlafs gibt, die, wie wir wissen, bei den Lichtbewegungen aufser Betracht sind.

Ist demnach AO Fig. 168 und Fig. 169 gleich β und $OS = \alpha$, Fig. 168

für negative, Fig. 169 für positive Krystalle, und beschreiben wir um diese beiden zu einander senkrechten Axen eine Kurve $ASA'S'$, so dafs die Halbmesser OT, welche mit der Axe einen beliebigen Winkel χ bilden, bestimmt sind durch die Gleichung

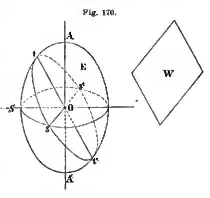
$$OT^2 = AO^2 \cdot \cos^2 AOT + OS^2 \cdot \cos^2 S'OT = \beta^2 \cdot \cos^2 \chi + \alpha^2 \cdot \sin^2 \chi,$$

so würde diese Kurve dem von Fresnel aufgefundenen Gesetz, nach welchem die Elasticität des Äthers in einem Krystall sich ändert, genügen, das heifst, denken wir uns in einem Krystall in einer durch die Axe gelegten Ebene diese Kurve konstruiert, so würde das Quadrat des in die Richtung OT fallenden Halbmessers der Kurve der Elasticität des Äthers für Schwingungen, welche dieser Richtung parallel sind, proportional sein. Denken wir uns diese Kurve um die Axe rotieren, so ist die entstehende Rotationsfläche die Elasticitätsfläche des Äthers; für Schwingungen, welche nach irgend einer Richtung geschehen, ist der Halbmesser der Fläche, welcher in dieser Richtung liegt, das Mafs der Elasticität, seinem Quadrate ist die durch solche Schwingungen erregte Elasticität proportional. Bezeichnen wir dieselbe mit e, so ist

$$e = m \cdot OT^2 = m \cdot \varrho^2 = m\,(\beta^2 \cdot \cos^2 \chi + \alpha^2 \cdot \sin^2 \chi).$$

Wir erhalten die Fortpflanzungsverhältnisse einer in einen Krystall eindringenden nicht polarisierten Lichtwelle folgendermafsen. Die Lichtwelle sei eine Ebene W und die Richtung, nach welcher sie zunächst im Krystalle sich fortpflanzt, bilde mit der Axe den Winkel ψ. Wir denken uns um die Axe des Krystalles, den wir als negativ voraussetzen wollen, die Elasticitätsfläche E (Fig. 170) konstruiert, W sei die eintretende Wellenebene. Legen wir nun durch die Fläche E einen mit der eintretenden Wellenebene parallelen Diametralschnitt $tst's'$, so geben uns die Halbmesser dieses Schnittes Ot, Os, die Elasticität des Äthers für die Schwingungen, welche in der Welle diesen Richtungen parallel geschehen. Denn man erkennt sofort, dafs die durch die Schwingungen nach Ot senkrecht zu Ot geweckte Komponente der Resultierenden ebenfalls senkrecht gegen die Wellenebene $tst's'$ gerichtet ist, somit, als nur longitudinale Schwingungen erregend ganz aufser Betracht

Fig. 170.



kommt. Da die Fläche E durch die Rotation einer rings geschlossenen Kurve entstanden ist, so ist sie selbst und deshalb auch jeder durch sie gelegte Schnitt rings geschlossen. Von den Halbmessern dieses Schnittes ist jedenfalls einer der gröfste und einer der kleinste, aufser wenn der Schnitt senkrecht zur Axe, also ein Kreis ist; dann erhalten alle den kleinsten gleichen Wert α. Welches aber auch die Lage des Schnittes ist, immer fällt einer der Halbmesser, da der Schnitt durch den Mittelpunkt, geht in

den Äquatorialschnitt; und da der Äquatorradius den kleinsten Wert von allen möglichen Halbmessern hat, so ist auch in diesem Schnitt der Radius Os, welcher in der Äquatorebene liegt, der kleinste.

Der gröfste Halbmesser des Schnittes $tst's'$ ist der zu Os senkrechte Ot, da dieser von allen der Axe am nächsten ist. Derselbe ist der Durchschnitt des durch die Axe gelegten zu $tst's'$ senkrechten Schnittes $AtA't'$ und des Schnittes $tst's'$, und bildet mit der Axe den Winkel $\chi = 90 - \psi$, er liegt also in dem durch die Axe gelegten auf Os senkrechten Hauptschnitte der Elasticitätsfläche.

Da nun immer eine Teilung der Schwingungen nach der Richtung der gröfsten und kleinsten Elasticität stattfinden mufs, so zerspaltet sich die in dem Krystall parallel der Normale von W sich fortpflanzende Welle in zwei, deren Schwingungen parallel Os, also senkrecht zur Axe und parallel Ot, also in einer durch die Axe gelegten Ebene und unter einer Neigung $90^0 - \psi$ gegen die Axe geschehen.

Welches nun auch der Winkel ψ sei, welchen die Normale der Welle mit der Axe bildet, es wird immer bei der Fortpflanzung der Welle durch den Krystall eine solche Teilung derselben eintreten müssen, denn immer schneidet ein der Welle paralleler Diametralschnitt die Elasticitätsfläche in einer solchen Kurve, deren kleine Axe zu At' senkrecht ist, deren grofse in einem durch die Axe gelegten Schnitt auf der Wellennormale senkrecht ist und mit der Axe AA' den Winkel $90^0 - \psi$ bildet. Nur in dem einen Falle, in welchem die Wellenebene W senkrecht zur Axe ist, schneidet ein ihr paralleler Diametralschnitt die Elasticitätsfläche in einem Kreise; in dem Falle ist also die Elasticität nach allen Richtungen gleich, es tritt keine Spaltung der Welle ein, sie pflanzt sich ungeteilt durch den Krystall fort.

Die Teilung der Wellen, wie sie durch den Versuch gegeben wird, folgt also unter Annahme dieser Elasticitätsverhältnisse unmittelbar, es müssen sich immer durch den Krystall zwei Wellen fortpflanzen, aufser wenn die Fortpflanzungsrichtung der Welle in die Axe des Krystalles fällt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist immer verschieden, deshalb mufs auch im allgemeinen bei dem Übergange des Lichtes in den Krystall die Fortpflanzungsrichtung der Wellen verschieden sein. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c einer Wellenbewegung können wir auch für ein zusammengesetztes Medium, wie es ein Krystall ist, die allgemeine Gleichung

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}}$$

anwenden, worin e die durch die Schwingungen in dem Mittel hervortretende elastische Kraft, wie wir sie vorhin definierten, und d die Dichtigkeit des Mittels bedeutet. Für die erste der beiden Wellen, in welche W in dem Krystall zerlegt wird, ist e konstant, nach welcher Richtung auch W in dem Krystalle sich fortpflanzt, und da die Dichtigkeit des Äthers in dem Krystalle als einem homogenen Mittel überall dieselbe ist, so folgt, dafs für diese Welle die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Richtung ist, in welcher die Welle sich fortpflanzt. Bezeichnen wir den Äquatorialdurchmesser unserer Elasticitätsfläche mit α, so haben wir für diese Wellen

$$e = m \cdot \alpha^2$$

und somit für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω dieser Wellen

$$\omega = C \cdot \sqrt{\frac{m\alpha^2}{d}}.$$

Setzen wir nun

$$C \cdot \sqrt{\frac{m}{d}} = A,$$

so wird

$$\omega = A \cdot \alpha.$$

Wenn daher im Innern des Krystalles im Punkte O eine Lichtbewegung beginnt, hat sich immer nach der Zeit t eine Lichtwelle um O ausgebreitet, deren Schwingungen senkrecht zur Axe geschehen und deren Grenze eine Kugel vom Radius $r = \omega t$ ist.

Ist aber der Punkt O ein Punkt in der Grenzfläche des Krystalles, in welchem eine ankommende Welle eine Lichtbewegung erzeugt, so wird auch von diesem in den Krystall sich eine solche Bewegung fortpflanzen, deren Grenze im Krystall eine Halbkugel vom Radius ωt ist. Es folgt somit, daſs wir, um die Richtung der in den Krystall übergegangenen Wellenebene zu erhalten, die gewöhnliche Huyghenssche Konstruktion anwenden können. Die Schwingungsrichtung der so erhaltenen gebrochenen Wellenebene ist senkrecht zur Axe, und senkrecht zur Normale der Welle, also zum ordentlichen Strahl, die Polarisationsebene des Strahles ist somit die durch den Strahl und die Axe des Krystalls gelegte Ebene. In den von uns specieller betrachteten Fällen, der senkrechten Incidenz, oder wenn die Axe in der Einfallsebene oder zu ihr senkrecht ist, fällt diese Ebene mit dem Hauptschnitte zusammen, in allen den Fällen ist also die Polarisationsebene der Hauptschnitt des Krystalles. Die Verhältnisse des ordentlich gebrochenen Strahles ergeben sich also vollkommen so, wie die Erfahrung sie festgestellt hat.

Die Oscillationsrichtung der zweiten im Krystall sich fortpflanzenden Welle bildet mit der Axe den Winkel $\chi = 90 - \psi$, die durch diese Oscillationen entwickelte Elasticität ist nach der Fresnelschen Gleichung der Elasticitätsfläche

$$e = mOt^2 = m\,(\alpha^2 \sin^2\chi + \beta^2 \cos^2\chi).$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist deshalb

$$c_1 = C\sqrt{\frac{m\,(\alpha^2 \sin^2\chi + \beta^2 \cos^2\chi)}{d}} = A\sqrt{\alpha^2 \sin^2\chi + \beta^2 \cos^2\chi}.$$

Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, deren Schwingungen der Axe parallel sind, für welche also $\chi = 0$, mit ε, so wird

$$\varepsilon = A\beta;$$

führen wir diesen Wert in die Gleichung für c_1 ein und setzen gleichzeitig $A\alpha = \omega$, so wird

$$c_1 = \sqrt{\omega^2 \sin^2\chi + \varepsilon^2 \cos^2\chi}.$$

Setzen wir schlieſslich an Stelle des Winkels χ in unsere Gleichung den

Winkel ψ, den die Fortpflanzungsrichtnng der Wellen mit der Axe hildet, und der mit χ dnrch die Gleichung

$$\psi + \chi = 90^0$$

verhunden ist, so wird

$$c_1 = \sqrt{\omega^2 \cos^2 \psi + \varepsilon^2 \sin^2 \psi}.$$

Das ist aber die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, zu welcher auch die aus der Erfahrung ahgeleitete Konstruktion von Hnyghens führte, nach welcher die Wellenfläche des aufserordentlichen Strahles ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsaxe gleich ω, und dessen Äquatorialradius gleich ε war, wenn ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles, oder da bei diesem Strahl und Wellennormale zusammenfallen, der ordentlichen Welle, und ε die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des aufserordentlichen Strahles senkrecht zur Axe ist. Da auch der senkrecht zur Axe sich fortpflanzende Strahl nach § 90 mit der Wellennormale zusammenfällt, ist ε gleichzeitig die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der anfserordentlichen senkrecht zur Axe sich fortpflanzenden Welle. Es ergibt sich das auch unmittelbar aus der Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles, von welcher wir § 89 als ans den Beobachtungen sich ergebend ausgingen

$$c_1'^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi},$$

denn wird $\varphi = 0$, so ist $c_1' = \varepsilon$.

Da somit die Fresnelsche Theorie zu derjenigen Wellenfläche der aufserordentlichen Strahlen führt, welche der Huyghensschen Konstruktion für die gebrochenen Strahlen und Wellen zn Grunde liegt, ist auch diese Konstruktion selhst eine Folge der Theorie.

Gleichzeitig ergiht sich daraus, dafs die Schwingungsrichtung unseren vorherigen Angahen gemäfs ist. Die Schwingungen der anfserordentlichen Welle geschehen in dem zur Welle normalen Meridianschnitt der Elasticitätsfläche, sie sind also parallel der durch die Axe nnd die Wellennormale gelogten Ehene, und da der aufserordentliche Strahl in dieser Ehene liegt, auch parallel der durch die Axe und den aufserordentlichen Strahl gelegten. Die Schwingungen in der Wellenehene sind senkrecht zur Wellennormale, also nicht senkrecht zum Strahl. Fällt die Axe in die Einfallsehene, so dafs die Einfallsebene ein Hauptschnitt ist, oder ist die Axe senkrecht zur Einfallsehene, so schwingt der anfserordentliche Strahl im Hauptschnitt, seine Polarisationsehene ist senkrecht znm Hauptschnitt, wie wir es in den von uns specieller hetrachteten Fällen fanden. Bildet der Hauptschnitt irgend einen andern Winkel mit der Einfallsebene, so schwingen die aufserordentlichen Wellen nicht im Hauptschnitt, ihre Richtnng ist immer durch die durch Axe und Wellennormale gelegte Ebene bestimmt, deren Lage man auf Grund der ahgeleiteten Sätze bestimmen kann.

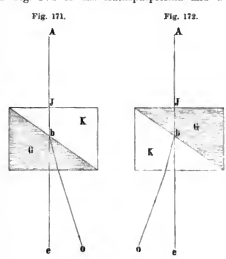
§ 93.

Anwendung einaxiger Krystalle als Polarisationsapparate. Die beiden aus einem einaxigen Krystall austretenden Strahlen sind vollständig polarisiert, man kann sich daher solcher Krystalle am sichersten bedienen,

um vollständig linear polarisiertes Licht zu erhalten, sicherer als dieses durch Reflexion geschehen kann, da durch diese fast immer, wenn auch nur schwach elliptisch polarisiertes Licht erhalten wird.

In den meisten Fällen sind jedoch die doppelten Strahlen, welche uns die Krystalle liefern, unbequem, man hat daher auf verschiedene Weise bewirkt, dafs nur einer von den beiden Strahlen nach der gewünschten Richtung aus dem polarisierenden Krystall heraustritt, dessen Polarisationsebene dann durch die Natur des Strahles gegeben ist.

Der einfachste Apparat dieser Art ist das achromatisierte Kalkspatprisma. Man kittet ein rechtwinkliges Prisma aus einem Kalkspatkrystall, dessen brechende Kante der optischen Axe des Krystalls parallel ist, mit einem ganz gleichen Prisma aus Glas, dessen mittlerer Brechungsexponent gleich dem der aufserordentlichen Strahlen ist, so zusammen, dafs ihre brechenden Kanten parallel, aber entgegengesetzt liegen, so dafs also ein Parallelepiped entsteht. Als Kitt benutzt man Kanadabalsam. Läfst man Licht senkrecht auf die Kathetenflächen dieser Kombination fallen, welche mit den Hypothenusenflächen sich in den brechenden Kanten schneiden, so geht der aufserordentliche Strahl ungebrochen hindurch, der ordentliche wird abgelenkt; man erhält also einen polarisierten Strahl, dessen Polarisationsebene durch das Einfallslot und eine der brechenden Kante parallele Linie bestimmt ist. Ist nämlich Fig. 171 *K* das Kalkspatprisma und *G* das Glasprisma, so gehen nach § 90 zunächst der ordentliche und der aufserordentliche Strahl bis *b* in gleicher Richtung fort. Da der Brechungsexponent des Glases gleich dem des Kalkspates für die aufserordentlichen Strahlen ist, so gehen diese auch ungebrochen durch das Glas weiter. Für die ordentlichen Strahlen ist der Brechungsexponent des Glases kleiner als der des Kalkspates, es tritt daher eine Ablenkung derselben nach der brechenden Kante ein, dieselben treten nach *o* aus. Ähnliches tritt in der Lage Fig. 172 ein, im Glasprisma *G* pflanzt sich das ankommende Licht ungebrochen fort, die aufserordentlichen auch durch das Kalkspatprisma; die ordentlichen jedoch, für welche der Brechungsexponent beim Übergange aus Glas in Kalkspat gröfser als eins ist, werden von der brechenden Kante fort gebrochen, sie treten nach *o* in anderer Richtung aus, als die aufserordentlichen Strahlen.



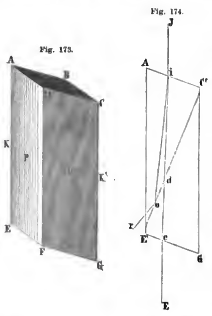
In etwas anderer Weise hat Sénarmont [1]) aus Kalkspat einen polarisierenden Apparat hergestellt; er wendet zwei Prismen von Kalkspat an,

[1]) *de Sénarmont,* Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. L.

von denen das erste K Fig. 171 so geschnitten ist, dafs die Axe des Krystalls senkrecht ist zur Eintrittsfläche des Lichtes, also parallel Jb, während dieselbe in dem zweiten Prisma parallel ist der Austrittsfläche des Lichtes, also parallel der Schraffierung in der Zeichnung des Prismas G. In dem Falle geht der ordentliche Strahl ungebrochen durch, der aufserordentliche dagegen verfolgt den Weg $AJbo$. Denn im ersten Prisma findet keine Doppelbrechung statt, es kommt also ein unpolarisierter Strahl in b an; dort tritt Doppelbrechung ein. Für den ordentlichen Strahl ist das zweite Mittel G von derselben optischen Dichtigkeit als das erste, derselbe geht also ungebrochen weiter. Für den aufserordentlichen Strahl ist dagegen das zweite Prisma optisch dünner, er wird also der brechenden Kante zugebrochen, und bei dem Austritte in Luft wird er nochmals in demselben Sinne abgelenkt.

Die Ablenkung ist dieselbe, wenn man die Prismen umkehrt. Der Vorzug, den dieser Apparat vor dem achromatisierten Kalkspatprisma hat, ist der, dafs der austretende ordentliche Strahl in der That vollkommen achromatisch ist.

Nicolsches Prisma. Weil aus dem achromatisierten Kalkspatprisma, auch dem Sénarmontschen, stets zwei Strahlen austreten, gestattet dasselbe nicht ein grofses Gesichtsfeld mit einfach polarisiertem Licht zu erhalten. Das erreicht man mittelst des jetzt in allen Polarisationsapparaten angewandten Nicolschen Prismas[1]), welches den Vorzug bietet, dafs aus demselben überhaupt nur ein Strahl austritt. Dasselbe ist eine Kombination zweier Kalkspatprismen, welche mit entgegengesetzt liegender aber paralleler brechender Kante durch eine Schicht Kanadabalsam an einander gekittet sind. Man stellt dasselbe auf folgende Weise dar. Ist AG ein natürliches verlängertes Kalkspatrhomboeder, dessen Axe durch die beiden Ecken C oder E geht, so dafs eine durch $ACGE$ gelegte Ebene ein Hauptschnitt des Krystalles ist, so bildet die Ebene $ABCD$ mit der Kante K einen Winkel von 71°. Man schleift nun zunächst anstatt dieser und der ihr parallelen Fläche EFG andere an den Krystall, welche auf der durch $ACGE$ gelegten Ebene ebenfalls senkrecht stehen, aber mit den Kanten K Winkel von 68° bilden. Ist das geschehen, so schneidet man den Kalkspat durch eine Ebene, welche ebenfalls senkrecht ist zur Ebene $ACGE$, und welche zugleich senkrecht ist



[1]) *Nicol*, Poggend. Annal. Bd. XXIX und XLIX.

zu den neu angeschliffenen Flächen. Die Schnittflächen werden gut poliert und darauf die beiden Stücke des Krystalles wieder in ihrer frühern Lage mit Kanadabalsam auf einander gekittet.

Läfst man auf ein solches Prisma ein Bündel paralleler Lichtstrahlen auf die neu angeschliffene Fläche parallel der Kante K auffallen, so tritt aus der dieser parallelen Fläche aus dem Prisma nur ein Strahlenbündel, und zwar das aufserordentliche, dessen Polarisationsebene senkrecht ist zum Hauptschnitt $ACGE$. Das ordentliche Strahlenbündel wird durch totale Reflexion an der Balsamschicht am Austreten gehindert. Sei, um dieses nachzuweisen Fig. 174 $AC'GE'$ der durch den einfallenden Lichtstrahl Ji gelegte Hauptschnitt des Krystalles, $E'C'$ sei der Durchschnitt dieser Ebene mit dem zu AC' senkrecht gelegten Schnitt, also mit der Schicht Kanadabalsam. Beim Eintritt in den Krystall wird der Lichtstrahl Ji in einen ordentlichen und aufserordentlichen gespalten; ersterer mit dem Brechungsexponenten 1,654 wird am stärksten abgelenkt, er pflanzt sich nach io fort. Der aufserordentliche Strahl, welcher in der Einfallsebene bleibt, weil dieselbe die Axe des Krystalles in sich aufnimmt, hat einen weit kleinern Brechungsexponenten, er pflanzt sich daher nach id fort, durchsetzt bei d die Balsamschicht und verläfst bei e den Krystall, um sich nach eE parallel mit Ji fortzupflanzen.

Der ordentliche Strahl wird bei o total nach r reflektiert. Denn der Brechungsexponent der ordentlichen Strahlen ist 1,654, der des Kanadabalsams beim Übergange des Lichtes aus Luft in dieses Mittel ist 1,536, der letztere also optisch dünner als der Kalkspat für die ordentlichen Strahlen. Der relative Brechungsexponent der mittleren Strahlen beim Übergange aus Kalkspat in Kanadabalsam ist

$$n = \frac{1,536}{1,654} = 0,928\,63 = \sin 68^0.$$

Die Grenzincidenz, bei welcher die ordentlichen Strahlen aus dem Kalkspat noch in den Balsam austreten können, ist demnach 68°. Der Einfallswinkel der ordentlichen Strahlen, welcher gerade 68° betragen würde, wenn die ordentlichen Strahlen parallel AE' aufträfen, beträgt wegen der Ablenkung der Strahlen bei i immer mehr als 70°, diese Strahlen können deshalb in die Schicht nicht eindringen; sie müssen total reflektiert werden.

Ein so hergestelltes Prisma liefert uns demnach nur ein Strahlenbündel und zwar ein senkrecht zur Ebene AG vollkommen polarisiertes Bündel. Es ist deshalb das sicherste und bequemste Mittel, um ein ungefärbtes vollkommen polarisiertes Strahlenbündel zu erhalten.

Durch eine kleine Modifikation in der Konstruktion des Nicolschen Prismas hat Foucault[1]) demselben eine Form gegeben, welche gestattet dasselbe viel billiger herzustellen; er legt die vorher zerschnittenen Hälften eines Kalkspatrhomboeders in ihrer ursprünglichen Lage wieder zusammen, ohne indes eine Kanadabalsamschicht dazwischen zu bringen, so dafs die beiden Hälften durch eine dünne Luftschicht getrennt sind. Führt man den Schnitt so, dafs er mit der Grenzfläche AC Fig. 174 einen Winkel von 51° bildet, so werden die ordentlich gebrochenen Komponenten der

[1]) *Foucault*, Comptes Rendus. XLV. p. 239.

parallel der Kante K oder in einer Neigung bis zu 4^0 gegen dieselbe in den Krystall eintretenden Strahlen total reflektiert, die aufserordentlichen gehen wie bei den Nicolschen Prismen hindurch.


Fig. 175.

Von andern einaxigen Krystallen wendet man noch den Turmalin zur Herstellung von Polarisationsapparaten an. Man schneidet zu dem Ende aus einem Turmalin zwei planparallele Platten der Axe parallel heraus und fafst sie mittelst Korkscheiben nach Art der Fig. 175 in Drahtringe, welche an einem mehrfach gebogenen Drahte befestigt sind und durch die Elasticität des Drahtes gegen einander gedrückt werden. Der Turmalin besitzt die Eigenschaft die ordentlich gebrochenen Strahlen ganz zu absorbieren und nur die aufserordentlichen Strahlen, deren Polarisationsebene in diesen Platten zur Axe des Krystalles senkrecht ist, hindurchzulassen. Die Absorption vertritt also hier die Stelle der totalen Reflexion bei den Nicolschen Prismen.

Dieser Polarisationsapparat, der sich durch seine grofse Einfachheit empfiehlt, hat nur den Nachteil, dafs meist wegen der dunklen Färbung der Krystalle auch die aufserordentlichen Strahlen sehr geschwächt werden. Überdies ist das polarisierte Licht in den Fällen immer gefärbt, zum Beobachten von Farbenerscheinungen ist daher der Apparat weniger geeignet. Dieser Apparat in etwas anderer Form ist zuerst von Marx angegeben[1]).

§ 94.

Rochons Mikrometer[2]). Eine besondere Anwendung der Doppelbrechung in einaxigen Krystallen ist im Rochonschen Mikrometer gemacht, welches dazu dient, aus der bekannten Entfernung eines Gegenstandes seine Gröfse und aus der bekannten Gröfse seine Entfernung zu bestimmen. Zwei Prismen P und P' aus Bergkrystall (Fig. 176) sind so hergestellt, dafs in dem ersten abc die optische Axe des Krystalles zur Seite ab senkrecht, im zweiten dagegen der brechenden Kante c parallel, also zur Ebene der Zeichnung senkrecht ist. Die beiden bei a und d rechtwinkligen Prismen sind dann mit ihren Hypotenusenflächen an einander gekittet, so dafs sie ein rechtwinkliges Parallelepiped geben. Fällt nun ein Lichtstrahl senkrecht

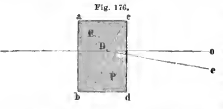


Fig. 176.

oder nahezu senkrecht auf die Fläche ab des ersten Prismas, so pflanzt er sich ungebrochen und ungeteilt bis D fort. Wenn er bei D in das zweite Prisma tritt, zerteilt er sich in zwei Strahlen; der ordentliche, dessen

[1]) *Marx*, Schweigger Jahrbuch XLIX.
[2]) *Rochon*, Nova Acta Academiae Petropolitanae VI.

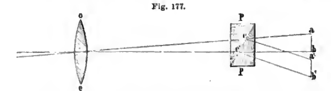
Brechungsexponent konstant ist, pflanzt sich ungebrochen fort, und tritt nach *o* parallel mit dem einfallenden Strahle aus. Ein Teil erleidet die aufserordentliche Brechung und wird, da der Bergkrystall ein positiver Krystall ist, von der brechenden Kante fortgebrochen, und da die brechende Kante auf der Einfallsebene senkrecht steht, in der Einfallsebene gegen *d* hin abgelenkt. Beim Austritt wird er nochmals gebrochen und tritt dann nach *e* aus. Die Ablenkung des Strahles hängt, da die Axe zur Einfallsebene senkrecht und die Incidenz bei ein und demselben Apparat als konstant angesehen werden kann, nur von dem brechenden Winkel *bcd* ab und kann leicht nach den im ersten Abschnitt entwickelten Sätzen aus diesem und dem bekannten Brechungsexponenten für die aufserordentlichen Strahlen berechnet werden. Es ist für einen

brechenden Winkel	30^0	40^0	50^0	60^0
die Ablenkung	19′ 30″	28′ 20″	40′	57′ 40″.

Diese für die senkrechte Incidenz berechneten Werte gelten mit sehr geringer Abweichung, wenn, wie es in der Praxis vorkommt, der Winkel, welchen die einfallenden Strahlen mit dem Einfallslot bilden, ein wenig von Null Grad verschieden ist.

Bringt man diese Kombination zweier Prismen zwischen das Objektiv *o* (Fig. 177) eines Fernrohrs und das objektive Bild *ab*, welches jenes von

Fig. 177.



einem in der Entfernung *x* befindlichen Gegenstande entwirft, so sieht man durch das Okular aufser dem ordentlichen Bilde auch noch das zweite abgelenkte aufserordentliche Bild *a′b′*. Da der Winkel, um welchen die aufserordentlichen Strahlen abgelenkt werden, bei einem gegebenen Prisma konstant ist, so hängt der Abstand der gleichliegenden Punkte *b* und *b′* in den beiden Bildern nur ab von der Entfernung der Bildebene von dem Punkte im Mikrometer, nach welchem die ordentlichen und aufserordentlichen Strahlen konvergieren. Sei *c′* dieser Punkt, und sei α der Winkel, welchen die ordentlichen und aufserordentlichen Strahlen mit einander bilden, so ist offenbar

$$bb' = c'b \cdot \operatorname{tang} \alpha.$$

In den Fernrohren, in welchen das Mikrometer angebracht ist, kann man dasselbe verschieben, und an einer aufserhalb des Fernrohrs angebrachten Skala den Abstand der Prismen von der Hauptbrennebene ablesen. Verschiebt man das Mikrometer so weit, dafs die beiden Bilder sich gerade berühren, so hat man, wenn man den Abstand der Prismen von der Hauptbrennebene bestimmt, die notwendigen Daten, um aus der bekannten Gröfse des Gegenstandes seine Entfernung zu bestimmen, oder aus der Entfernung die Gröfse.

Die Verschiebung des Bildes bb' ist nämlich dann gerade gleich der Gröfse des Bildes. Nennen wir die Gröfse des Bildes y, diejenige des Gegenstandes Y, die Entfernung des Bildes von der zweiten Hauptebene f, die des Gegenstandes von der ersten Hauptebene x, und die Hauptbrennweite F, so ist

$$bb' = y = \frac{f}{x} \cdot Y.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{x},$$

$$f = \frac{x \cdot F}{x - F},$$

$$y = \frac{x \cdot F}{x(x - F)} \cdot Y = \frac{F}{x - F} \cdot Y.$$

Da F gegen x immer sehr klein ist, dürfen wir dafür setzen

$$y = \frac{F}{x} \cdot Y.$$

Nennen wir den Abstand der Prismen von der Hauptbrennebene a, so können wir, da wegen der immer sehr grofsen Entfernung x, f nur sehr wenig von F verschieden ist, auch die Entfernung $c'b$ gleich a setzen und erhalten dann

$$\frac{F}{x} \cdot Y = a \tang \alpha,$$

$$\frac{Y}{x} = \frac{a \tang \alpha}{F}.$$

Die Gröfse $\frac{\tang \alpha}{F}$ ist für jedes bestimmte mit einem solchen Apparat versehene Fernrohr konstant, ist sie ein für allemal bestimmt und gleich c, so wird

$$Y = cax$$

für die Gröfse und

$$x = \frac{Y}{ca}$$

für die Entfernung des beobachteten Gegenstandes, wenn x oder Y bekannt sind.

§ 95.

Anwendung einaxiger Krystalle zur Photometrie. Lassen wir auf ein Nicolsches Prisma polarisiertes Licht fallen, so tritt durch dasselbe je nach der Lage der Polarisationsebene des durch das Prisma hindurchtretenden Strahles zur Polarisationsebene des eintretenden Lichtes durch das Prisma Licht sehr verschiedener Intensität. Ist die Polarisationsebene des durchtretenden Strahles derjenigen des eintretenden Lichtes parallel, so ist die Intensität des durchtretenden Lichtes derjenigen des eintretenden fast gleich, sind die beiden Ebenen senkrecht zu einander, ist die Intensität des durchtretenden Lichtes gleich null. Bilden die beiden Ebenen einen Winkel α

mit einander, so ist die Intensität des durchtretenden Lichtes

$$J = J_0 \cos^2 \alpha,$$

worin J_0 die Intensität des durchtretenden Lichtes ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

Durch diese Eigenschaft der Nicolschen oder ähnlicher Prismen sind dieselben ein wertvolles Mittel zur Photometrie, und von Bernard[1]), Beer[2]) und in vollkommenster Weise von Zöllner[3]) zu diesem Zwecke verwandt worden.

Denken wir uns ein kleines kreisförmiges Gesichtsfeld, ein vertikaler Durchmesser teile dasselbe in zwei Hälften, die eine Hälfte sei mit natürlichem Lichte beleuchtet, dessen Intensität wir bestimmen wollen, die andere Hälfte sei mit polarisiertem Lichte beleuchtet, dessen Intensität gröfser sei als die des natürlichen Lichtes. Betrachtet man das Gesichtsfeld durch ein Nicolsches Prisma, so erscheint diejenige Hälfte, welche nicht polarisiertes Licht auf das Prisma sendet, bei jeder Lage desselben gleich hell, die andere Hälfte des Gesichtsfeldes ist am hellsten, wenn die Polarisationsebene des Nicols derjenigen des in dieser Hälfte des Gesichtsfeldes eintretenden Lichtes parallel ist, sie ist dunkel, wenn die beiden Polarisationsebenen zu einander senkrecht sind. Ist nun die Helligkeit der polarisierten Hälfte bei Parallelstellung der Polarisationsebenen gröfser als die der unpolarisierten Hälfte, so gibt es eine Stellung des Nicols, wo beide Hälften des Gesichtsfeldes gleich hell erscheinen. Ist J die von der unpolarisierten Hälfte des Gesichtsfeldes durch den Nicol dringende Lichtmenge, J_0 die von der polarisierten Hälfte, wenn die Polarisationsebenen parallel stehen, und ist nach einer Drehung um den Winkel α die Intensität beider Hälften gleich, so ist

$$J = J_0 \cos^2 \alpha.$$

Ist die polarisierte Hälfte durch eine konstante Lichtquelle beleuchtet, und finden wir, wenn wir die unpolarisierte Hälfte durch eine andere Lichtquelle beleuchten, dafs die Gleichheit beider Hälften des Gesichtsfeldes unter einem andern Winkel α_1 eintritt, so ist

$$J_1 = J_0 \cos^2 \alpha_1$$

$$\frac{J}{J_1} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha_1}.$$

Dasselbe Verhältnis besteht zwischen den beiden Intensitäten, welche die unpolarisierte Hälfte des Gesichtsfeldes in beiden Fällen beleuchteten, denn auf dem Wege durch das Nicolsche Prisma erfahren die Lichtmengen in allen Fällen dieselbe Schwächung, das heifst, fällt auf das Nicolsche Prisma die unpolarisierte Lichtmenge i, so tritt durch dasselbe die Lichtmenge ki, worin k eine nur von der Beschaffenheit des bei diesen Vergleichungen konstanten Nicolschen Prismas abhängig ist.

Ein noch empfindlicheres Vergleichungsmittel erhalten wir, wenn wir die beiden Hälften des Gesichtsfeldes mit zu einander senkrecht polarisiertem

---

1) *Bernard,* Annal. de chim. et de phys. III. Série. T. XXXV.

2) *Beer,* Poggend. Annal. Bd. LXXXVI.

3) *Zöllner,* Poggend. Annal. Bd. C. Bd. CVIII. Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865.

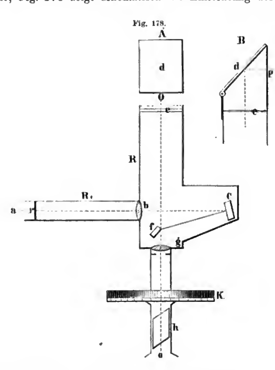
Licht beleuchten. Ist J_0 die von der einen, J' die von der andern Hälfte des Gesichtsfeldes durch den Nicol dringende Lichtmenge, wenn die Polarisationsebene des Nicols der einen oder der andern Polarisationsebene parallel ist, so ist die Bedingung der Gleichheit beider Hälften

$$J_0 \cos^2 \alpha = J' \sin^2 \alpha,$$

und die Einstellung wird in diesem Falle eine weit schärfere, weil eine Verdrehung des Nicols gleichzeitig die eine Hälfte des Gesichtsfeldes heller, die andere dunkler erscheinen läfst.

Diese letztere Anordnung hat Zöllner schliefslich für sein Photometer angewandt; Fig. 178 zeigt schematisch die Einrichtung des Photometers,

Fig. 178.



wie Zöllner dasselbe vorzugsweise zur photometrischen Vergleichung von Sonne und Mond verwandt hat.

Vor einem etwa 6 cm weiten und 20 cm langen innen geschwärzten Messingrohr ist ein Polarisationsspiegel von schwarzem Glase so angebracht (Fig. B), dafs die Axe des Rohres den Spiegel unter dem Polarisationswinkel trifft. Auf den Spiegel kann nur Licht von der matten Glastafel p gelangen, welche von dem Objekte, dessen Lichtintensität gemessen werden soll, beleuchtet wird. Das in die Axe des Apparates von dem Spiegel d reflektierte Licht ist dann vollständig in der Einfallsebene, welche in Fig. A zur Ebene der Zeichnung senkrecht ist, polarisiert. Das Licht gelangt durch

die Linse *g*, ein hinter derselben angebrachtes kleines kreisförmiges Diaphragma und das Nicolsche Prisma in das bei *o* befindliche Auge.

An das Rohr *R* ist seitlich ein zweites Rohr R_1 angesetzt, dessen Axe senkrecht ist zur Axe des Rohres *R*. Vor demselben bei *a* wird die konstante Lichtquelle aufgestellt, mit welcher das zu messende Licht verglichen wird. Als konstante Lichtquelle benutzte Zöllner eine Erdöllampe, welche sich als sehr konstant erwies. Das Licht der Lampe geht durch die Linse *b* zu einem Silberspiegel *c*, der so gestellt ist, dafs das von ihm reflektierte Licht unter dem Polarisationswinkel auf den Polarisationsspiegel *f* fällt, von dem dann das Licht der Axe der Röhre *R* parallel nach *O* geworfen wird. Die Polarisationsebene des Spiegels *f* ist senkrecht zu derjenigen des Spiegels *d*. Die Linse *g* ist so gestellt, dafs das in den Apparat blickende Auge die in der Axe des Rohres *R* liegende Kante des Spiegels *f* scharf sieht, die Linse *b* so, dafs die von *a* aus durch das 9^{mm} im Durchmesser haltende Diaphragma *r* in den Apparat eintretende Licht als parallele Strahlen auf die Netzhaut des Auges bei *o* gelangt, so dafs dem Auge die sichtbare Fläche des Spiegels *f* gleichförmig und intensiv beleuchtet erscheint.

Man sieht somit von *o* aus ein kreisförmiges Gesichtsfeld, dessen Gröfse durch das hinter *g* befindliche Diaphragma bedingt ist, das durch die scharfe Kante des Spiegels *f* in zwei Hälften geteilt ist. Ist das von dem Spiegel *d* herkommende Licht mit dem der Lampe genau gleich gefärbt, so läfst sich durch Drehung des Nicolschen Prismas *h*, deren Gröfse man an dem geteilten Kreise *K* abliest, die Einstellung der beiden Hälften auf gleiche Helligkeit sehr scharf erreichen, indem, wie Zöllner bemerkt, durch eine fast momentan eintretende optische Täuschung die vorher sichtbare scharfe Kante verschwindet und das Gesichtsfeld ganz homogen erscheint.

Läfst man den Spiegel *d* fort, setzt bei *e* eine matte Glasplatte ein, die man durch die zu messende Lichtquelle direkt beleuchtet, so ist die eine Hälfte des Gesichtsfeldes unpolarisiert, die Helligkeit dieser Hälfte bei jeder Stellung des Nicols *h* dieselbe, man erhält also zur Messung den zuerst betrachteten Fall.

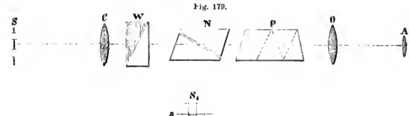
In welcher Weise die Messungen anzustellen sind braucht wohl nicht näher auseinandergesetzt zu werden; wegen der Einzelnheiten verweisen wir auf die Arbeiten Zöllners, besonders auf die photometrischen Untersuchungen.

Das Zöllnersche Photometer gestattet ebenso wie die früher beschriebenen Photometer nur gleichgefärbte Lichtmengen zu vergleichen, da nur bei solchen die Gleichheit der beiden Hälften des Gesichtsfeldes herzustellen ist. Will man die Intensität verschieden gefärbter Lichter vergleichen, so geht das nur dadurch, dafs man von jedem ein Spektrum entwirft und nun die gleichgefärbten Teile der Spektra mit einander vergleicht. Ein für diesen Zweck bestimmter Apparat, der besonders geeignet ist, die Absorption des Lichtes zu untersuchen, ist von Glan[1]) angegeben. Das Princip des Glanschen Spektrophotometers ist das gleiche wie bei dem Zöllnerschen, eigentümlich an demselben ist die äufserst sinnreiche Methode, durch welche Glan die beiden zu vergleichenden Spektra unmittelbar neben einander bringt. Das Schema des Glanschen Spektrophotometers zeigt Fig. 179. Der

[1]) *Glan*, Wiedem. Annalen. Bd. I.

vordere Teil desselben, wenn wir den dem Lichte zugewandten Teil den vordern nennen, besteht aus einem Kollimatorrohre mit Spaltöffnung S, welche in der Brennweite der Kollimatorlinse C angebracht ist. Der Spalt ist in seiner Mitte durch ein Messingblech von etwa 4^{mm} Breite verdeckt, dessen Ränder genau parallel und senkrecht zur Längsausdehnung des Spaltes sind; die oben und unten frei bleibenden Teile der Spaltöffnung haben ungefähr die gleiche Länge von 4^{mm} wie der verdeckte Teil. Das aus der Kollimatorlinse als paralleles Strahlenbündel austretende Licht tritt in ein Wollastonsches Doppelprisma, dessen brechende Kante horizontal, also in dem Schema Fig. 179 senkrecht zur Ebene des Papieres ist.

Fig. 179.



Das Wollastonsche Prisma besteht aus zwei mit den Hypotenusenflächen an einander gekitteten Kalkspathprismen, in deren einem, in der Zeichnung das erste, die Axe senkrecht zur brechenden Kante, in der Zeichnung also in der Ebene des Papiers liegt, in deren anderem die Axe der brechenden Kante parallel ist. Im ersten Prisma wird das eindringende Bündel in seine zwei senkrecht zu einander polarisierten Komponenten zerlegt, der ordentliche Strahl im ersten wird dann im zweiten Prisma aufserordentlicher, der aufserordentliche im ersten wird im zweiten ordentlicher. Da der Brechungsexponent des aufserordentlichen Strahles kleiner ist als der des ordentlichen, wird der im zweiten Prisma aufserordentliche Strahl nach oben, der im zweiten ordentliche Strahl nach unten abgelenkt. Das Objektiv O des Fernrohrs, auf welches schliefslich die Strahlen treffen, entwirft daher in seiner Brennebene zwei in vertikaler Richtung etwas gegen einander verschobene Bilder des Spaltes. Der in der Mitte der Spaltöffnung S liegende Messingstreif ist nun von einer solchen Breite genommen, dafs die in der Brennebene von O entworfenen Bilder gerade um die Bildbreite des Messingstreifens gegen einander verschoben werden, wie es bei S_1, wo die in Wirklichkeit von a bis b sich deckenden Bilder neben einander gezeichnet sind, angedeutet ist. Das Gesichtsfeld ist dann soweit abgeblendet, dafs das bei A in das Fernrohr blickende Auge nur den zwischen ab (S_1) liegenden Teil des Bildes sieht. Das Auge sieht also ein Spaltbild, dessen eine Hälfte dem obern hellen, dessen andere dem untern hellen Teil des Spaltes entspricht, so dafs diese beiden Hälften scharf aneinanderstofsen, ohne dafs zwischen denselben ein dunkler oder ein heller Zwischenraum ist. Die beiden Bildhälften sind senkrecht zu einander polarisiert.

Die aus dem Wollastonschen Prisma austretenden Strahlen passieren



zuerst ein Nicolsches Prisma und dann ein geradsichtiges Prisma, welche das Lichtbündel in ein horizontales Spektrum auseinanderlegt. Das durch das Okular A in das Fernrohr blickende Auge sieht deshalb ein Spektrum, dessen eine Hälfte der durch den Nicol dringenden Komponente des ordentlichen, dessen andere Hälfte derjenigen des aufserordentlichen Strahles entspricht, die eine Hälfte ist also das Spektrum der obern, die andere das der untern Spalthälfte.

Ist i die Intensität des Lichtes einer bestimmten Farbe, welches durch die obere Spalthälfte dringt, a ein Koefficient, der die Schwächung bezeichnet, die das Licht bei dem Durchgange durch den Apparat erleidet, ist α der Winkel, den die Polarisationsebene des Nicols mit derjenigen der obern Spalthälfte bildet, so ist $ia\cos^2\alpha$ die Intensität des betreffenden Teiles des Spektrums, welcher der obern Hälfte des Spaltes entspricht. Bedenten i_1 und a_1 dasselbe für das durch die untere Spalthälfte dringende Licht, so ist $i_1 a_1 \sin^2\alpha$ die Intensität derselben Farbe im untern Spektrum. Je nach der Lage des Nicols ist somit die Intensität der beiden Spalthälften verschieden, und man kann immer dem Nicol eine solche Lage geben, dafs die beiden Spalthälften resp. die entsprechenden Teile der beiden Spektra gleich hell sind, dann ist

$$ia\cos^2\alpha = i_1 a_1 \sin^2\alpha$$

$$\frac{i_1}{i} = \frac{a}{a_1}\cdot\cot^2\alpha.$$

Kennt man den Koefficienten $\frac{a}{a_1}$, so erhält man hieraus das Verhältnis der Intensitäten der durch beide Hälften des Spaltes dringenden Lichtmenge. Zur Bestimmung dieses Koefficienten richtet man das Photometer gegen eine gleichmäfsig beleuchtete Fläche, so dafs $i = i_1$, und bestimmt den Winkel α, bei welchem die beiden Bilder genau gleich hell sind. Nennen wir diesen Winkel α_0, so ist

$$\frac{a_1}{a} = \cot^2\alpha_0.$$

Um ganz bestimmte Teile der Spektra, also bestimmte Farben mit einander vergleichen zu können, ohne dafs das Auge durch die gleichzeitige Sichtbarkeit anderer Farben gestört wird, sind in der Focalebene des Okulars, dort wo die vom Objektiv des Fernrohrs entworfenen Bilder des Spaltes liegen, zwei geschwärzte Messingplatten in einem Schlitten gegen einander verschiebbar angebracht. Die zugekehrten Ränder sind geradlinig und parallel und können beliebig einander genähert werden, so dafs die Spektra bis auf beliebig schmale Streifen, für welche man die photometrische Vergleichung durchführen will, abgeblendet werden können. Das Fernrohr ist schliefslich um eine vertikale Axe, welche durch die Ebene des Objektivs O geht, etwas drehbar, um dasselbe so nach und nach auf die verschiedenen Stellen des Spektrums einstellen zu können, wenn man den zwischen den Messingplatten gelassenen Spalt in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht hat.

Zur Messung der Absorptionskoefficienten hat man folgendermafsen zu verfahren. Man beleuchtet den Spalt mit parallelem Lichte und stellt das Fernrohr bei Anwendung von Tageslicht so, dafs man die Fraunhoferschen

Linien scharf sieht, und überzeugt sich zunächst, dafs beide Spalthälften gleich beleuchtet sind, durch Einstellung des Nicols auf den Winkel α_0. Dann bringt man vor die untere Spalthälfte eine Schicht der absorbierenden Substanz von bekannter Dicke, so dafs die obere Grenze dieser Schicht sich vor dem die Mitte des Spaltes verdeckenden Messingstreifen befindet, und mifst für die verschiedenen Stellen des Spektrums den Winkel α, bei welchem die beiden Hälften des Spaltbildes gleiche Helligkeit haben. Wir erhalten dann für jede Farbe die Gleichung

$$\frac{i_1}{i} = \frac{a}{a_1} \cot^2 \alpha = e^{-2kd},$$

wenn d die Dicke der Schicht und k den Absorptionskoefficienten bedeutet, wie wir ihn zuerst im § 23 einführten.

Betreffs der Beobachtungen mit dem Glanschen Spektrophotometer müssen wir noch auf einen Punkt aufmerksam machen. Wir bemerkten, dafs die Breite des Messingstreifens in der Spaltöffnung so gewählt sei, dafs die beiden im Fernrohr sichtbaren Spaltbilder resp. deren Spektra sich gerade berühren, wenn der Spalt sich im Brennpunkt der Kollimatorlinse befinde. Das ist indes immer nur für eine Farbe möglich, da die Ablenkung im Wollastonschen Prisma von der Farbe des Lichtes abhängig ist. Die Breite ist diejenige, dafs die Bilder für die mittlern Strahlen des Spektrums sich berühren. Da die weniger brechbaren Strahlen weniger, die stärker brechbaren Strahlen stärker abgelenkt werden, so sind dann rot und gelb noch nicht zur Berührung gebracht, man sieht dort zwischen beiden Spektris eine gegen das Rot hin breiter werdende dunkle Linie, im Blau und Violett dagegen greifen die beiden Spektra zum Teil über einander. Um für jede einzelne Farbe des Spektrums die beiden Spektra gerade zur Berührung zu bringen, hat man nur den Abstand des Spaltes vom Objektive des Kollimators passend zu regeln. Wie aus der Theorie des Rochonschen Mikrometers sich ergibt, mit der die des Wollastonschen Prismas ganz übereinstimmt, wird durch eine Annäherung des Spaltes an das Objektiv ein immer brechbarer Teil des Spektrums gerade zur Berührung gebracht, während die vorher sich berührenden Teile auseinanderrücken, eine Entfernung des Spaltes vom Objektiv dagegen bewirkt, dafs die weniger abgelenkten Teile des Spektrums gerade zur Berührung kommen, die brechbareren übereinander greifen.

Man kann somit die zu einer scharfen Vergleichung der Helligkeit notwendige Bedingung, dafs die zu vergleichenden Felder gerade aneinander liegen, so dafs sie bei gleicher Helligkeit als ein einziges erscheinen, durch passende Regulierung des Abstandes der Spaltöffnung von dem Kollimatorobjektiv für jeden Spektralstreifen herstellen.

§ 96.

Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen. Die Brechungserscheinungen der drei übrigen Krystallsysteme mit drei ungleichen Axen, des isoklinischen oder rhombischen, des monoklinischen oder klinorhombischen, des triklinischen oder klinorhomboidischen, weichen von der Doppelbrechung in den beiden bisher betrachteten Systemen in mehrfacher Beziehung ab.

Während nämlich das Licht bei seinem Eintritt in einen einaxigen Krystall im allgemeinen in zwei Strahlen zerspalten wird, von denen der eine dem gewöhnlichen Brechungsgesetz folgt, der andere aber mittelst der Huyghensschen Konstruktion aus dem die Wellenfläche dieser Strahlen darstellenden, für jeden Krystall konstanten und konstant liegenden Rotationsellipsoide erhalten werden kann, gibt es bei den Krystallen der drei andern Systeme keinen Strahl, welcher dem gewöhnlichen Brechungsgesetz folgt. Es tritt im allgemeinen auch hier eine Spaltung der einfallenden Lichtwelle in zwei ein, die ihnen angehörigen Strahlen treten aber beide aus der Einfallsebene heraus, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Wellen ist verschieden, je nach der Richtung, in welcher sie den Krystall durchsetzen. Das Gesetz, nach welchem sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ändern, ist ein sehr verwickeltes.

Die beiden Strahlen in den zweiaxigen Krystallen sind auch immer senkrecht zu einander polarisiert, die Polarisationsebenen können aber je nach der Lage des Krystalles alle möglichen Richtungen haben.

Die drei vorhin erwähnten Krystallsysteme unterscheiden sich ferner von den einaxigen Krystallen dadurch, dafs es hier mehrere Richtungen gibt, in denen keine Doppelbrechung eintritt. Wir nannten bei den einaxigen Krystallen jene Richtung die Axe, in welcher eine Lichtwelle, ohne in zwei zu zerfallen, durch den Krystall hindurchgeht. In diesem Sinne besitzen die Krystalle der drei letzten Systeme zwei Axen, denn es gibt in jedem zu ihnen gehörigen Krystalle zwei Richtungen, in welchen sich nur eine Welle durch den Krystall fortpflanzt. Indes findet zwischen diesen Axen und denen der einaxigen Krystalle doch ein wesentlicher Unterschied statt; denn in den einaxigen Krystallen trat, wenn keine Doppelbrechung der Wellen stattfand, auch keine der Strahlen ein; Strahl und Wellennormale waren in dem Falle identisch, und der einen Welle entsprach ein Strahl. Bei den zweiaxigen Krystallen indes gehört zu der in der Richtung der optischen Axen sich fortpflanzenden ungeteilten Welle eine unendliche Anzahl von Strahlen, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, und welche als ein Strahlencylinder den Krystall verlassen, wenn eine planparallele Platte in der Richtung ihrer optischen Axe von einer Lichtwelle durchsetzt wird.

Noch zwei andere Richtungen sind in diesen Krystallen vorhanden, welche, freilich in einem etwas andern Sinne, auf den Namen einer optischen Axe Anspruch haben; sie werden daher sekundäre optische Axen genannt. In dieser Richtung pflanzt sich nämlich durch den Krystall nur ein einziger Strahl fort, dem jedoch eine unendliche Anzahl von Wellenebenen angehören. Beim Austritt aus dem Krystall zerteilt sich daher der Strahl, welcher in dieser Richtung den Krystall durchläuft, in eine unendliche Menge von Strahlen, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, welcher nach dem Austrittspunkte des Strahles konvergiert.

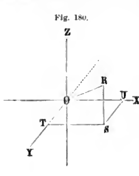
Schon diese wenigen Andeutungen über den Unterschied der einaxigen und zweiaxigen Krystalle genügen, um zu zeigen, dafs die Doppelbrechung in den letztern eine viel verwickeltere ist als in den erstern. Auf experimentellem Wege die Gesetze derselben aufzusuchen, ist nicht wohl möglich. Das ist auch in der That nicht geschehen, sondern dieselben wurden zuerst in der klassischen Abhandlung Fresnels über die Doppel-

brechung[1]) theoretisch aus den Principien der Undulationstheorie abgeleitet. Die von Fresnel und andern abgeleiteten Gesetze wurden dann später durch den Versuch bestätigt, und so wurde die Doppelbrechung in den zweiaxigen Krystallen der entschiedenste Beweis für die Richtigkeit der Undulationstheorie, indem sie zeigte, dafs das Princip derselben fruchtbar zu neuen Erscheinungen führte, welche der experimentierenden Physik entgangen waren. Damit war denn auch der Undulationstheorie der Sieg über die Emissionstheorie gesichert in dem heftigen Streite, welcher in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts zwischen beiden gekämpft wurde.

Wir werden daher von dem bisherigen Gange abweichend diese Erscheinung ebenfalls an der Hand der Theorie untersuchen, da es nur so möglich ist, einen Einblick in dieselbe zu erhalten. Leider müssen wir uns hier jedoch mit einem allgemeinen Überblicke begnügen, da eine vollständige Ausführung und Ableitung der Einzelnheiten einen mathematischen Apparat erfordert, den anzuwenden die uns hier gestellte Grenze nicht gestattet.

Zur Ableitung der Lichterscheinungen in zweiaxigen Krystallen macht Fresnel über die Anisotropie des Äthers in denselben die allgemeinste Annahme; er nimmt an, dafs die Elasticität desselben in allen durch einen Punkt gelegten Richtungen verschieden sei. Es ist hier keine Richtung vorhanden, welche die Eigenschaft der Hauptaxe hat, um welche sich die Elasticitäten symmetrisch gruppieren, so dafs alle Richtungen, welche mit dieser gleiche Winkel bilden, auch gleiche Elasticität haben. Das Gesetz, nach welchem sich die Elasticität nach den verschiedenen durch einen Punkt gelegten Richtungen ändert, läfst sich auch hier durch eine ringsgeschlossene Fläche darstellen, welche drei zu einander senkrechte Axen hat, von denen jedoch nicht, wie bei den einaxigen Krystallen zwei unter einander gleich sind, sondern welche alle drei verschieden sind. Diese drei Axen nennt Fresnel die Axen der optischen Elasticität. In dem isoklinischen oder rhombischen System fallen diese Axen mit den drei auf einander senkrechten Axen des Krystalles zusammen. Sind Fig. 180 OX, OY, OZ die drei auf einander senkrechten Axen, und ist die Elasticität des Äthers, welche durch Schwingungen parallel OX erregt wird, gleich a^2, diejenige parallel der Y-Axe gleich b^2 und diejenige parallel der Z-Axe gleich c^2, so findet Fresnel, dafs die Elasticität nach irgend einer Richtung OR, welche mit der Axe OX den Winkel α bildet, mit OY den Winkel β, mit OZ den Winkel γ, durch die Gleichung gegeben ist

Fig. 180.



$$r^2 = a^2 \cdot \cos^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \beta + c^2 \cdot \cos^2 \gamma$$

und indem wir die Winkel α und β und γ alle möglichen Werte annehmen lassen, erhalten wir die Elasticitäten nach allen möglichen durch O gelegten Richtungen.

---

[1]) *Fresnel,* Mémoires de l'Acad. de France. T. VII. Poggend. Annal. Bd. XXIII. p. 372. Oeuvres complètes. T. II. Man sehe auch *Herschels* Optik § 997—1006.

Auch diese Gleichung der Elasticitätsfläche ergibt sich unmittelbar aus der Annahme, dafs es drei Elasticitätsaxen gibt, und dafs man die durch die Verschiebung nach irgend einer Richtung geweckte Elasticität als die Resultierende aus den entsprechenden drei der Axe parallelen Verschiebungen ansehen darf. Denn denken wir uns in der Richtung, welche mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, das Molekül um die Längeneinheit verschoben, so sind die Verschiebungskomponenten parallel den Axen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Die durch diese Verschiebungen den Axen parallel geweckten elastischen Kräfte sind

$$a^2 \cos\alpha, \qquad b^2 \cos\beta, \qquad c^2 \cos\gamma.$$

Die sich aus diesen zusammensetzende Resultirende R ist dann gegeben durch die Gleichung

$$R^2 = a^4 \cos^2\alpha + b^4 \cos^2\beta + c^4 \cos^2\gamma.$$

Nennen wir die Winkel, welche diese Resultierende mit den Axen bildet, φ, χ, ψ, so ist

$$\cos\varphi = \frac{a^2 \cos\alpha}{R}, \quad \cos\chi = \frac{b^2 \cos\beta}{R}, \quad \cos\psi = \frac{c^2 \cos\gamma}{R}.$$

Der Winkel δ, den die Richtung dieser Resultierenden mit der Richtung der Verschiebung bildet, ist gegeben durch

$$\cos\delta = \cos\alpha \,.\, \cos\varphi + \cos\beta \,.\, \cos\chi + \cos\gamma \,.\, \cos\psi$$

oder

$$\cos\delta = \frac{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma}{R}.$$

Die in dio Richtung der Verschiebung fallende Komponente der elastischen Kraft ist

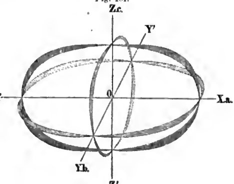
$$r^2 = R \,.\, \cos\delta$$

oder

$$r^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma,$$

derselbe Ausdruck, welchen Fresnel zur Konstruktion der Elasticitsfläche benutzte.

Fig. 181.



Die Endpunkte der Längen r, deren Quadraten die Elasticität des Äthers nach dieser Richtung proportional ist, liegen auf einer ringsgeschlossenen Fläche, welche, wie der Mathematiker Magnus[1]) gezeigt hat, durch folgende Konstruktion erhalten werden kann. Man konstruiere um die drei Axen a, b, c, von denen $a > b > c$ sei, ein Ellipsoid (Fig. 181); und lege dann an die ver-

[1]) *L. J. Magnus*, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853.

schiedenen Punkte dieses Ellipsoides Tangentialebenen. Von dem Mittelpunkte O dieses Ellipsoides lasse man auf diese Tangentialebenen Senkrechte hinab. Die Punkte, wo diese Senkrechten die Tangentialebenen schneiden, sind Punkte der Elasticitätsfläche, das heifst die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkte O bis zu dem Punkte, wo sie die Tangente schneiden, genügt der von Fresnel angegebenen Gleichung

$$r^2 = a^2 . \cos^2 \alpha + b^2 . \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma.$$

Dem Quadrate dieser Länge ist also die Elasticität nach dieser Richtung proportional.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich schon aus unsern Entwicklungen des § 83; denn aus denselben folgt unmittelbar, dafs die drei Hauptschnitte der so erhaltenen Fläche der von Fresnel aufgestellten Gleichung entsprechen. Für den Hauptschnitt XZ z. B. ist der Winkel $\beta = 90^0$, somit $\cos \beta = 0$, für die in diesen fallenden Halbmesser ist deshalb

$$r^2 = a^2 . \cos^2 \alpha + c^2 . \cos^2 \gamma$$

und da sich dann α und γ zu 90^0 ergänzen,

$$r^2 = a^2 . \cos^2 \alpha + c^2 . \sin^2 \alpha.$$

Die an diesen Hauptschnitt des Ellipsoides gelegten Tangentialebenen sind senkrecht zur Ebene XZ, und die Durchschnittslinie der Tangentialebenen mit der Ebene XZ sind Tangenten an der den Hauptschnitt bildenden Ellipse. Im § 89 haben wir aber bereits den Nachweis geliefert, dafs wenn wir an eine Ellipse, deren Axen a und c sind, senkrecht zu einem Halbmesser, der mit der Axe a den Winkel α bildet, eine Tangente ziehen, der senkrechte Abstand dieser Tangente von dem Mittelpunkt der Ellipse r gegeben ist durch die Gleichung

$$r^2 = a^2 . \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha.$$

Daraus folgt also, dafs der Punkt, wo die Senkrechte diese Tangente trifft, ein Punkt der Elasticitätsfläche ist, somit dafs wir den der Ebene XZ parallelen Schnitt der Elasticitätsfläche in der von Magnus angegebenen Weise erhalten, indem wir an den Hauptschnitt XZ des Ellipsoides alle möglichen Tangenten legen, und auf dieselben Senkrechte vom Mittelpunkt herablassen. Die Punkte, wo die Senkrechten die Tangenten treffen, bilden den XZ parallelen Hauptschnitt der Elasticitätsfläche. Gleiches gilt für die andern Hauptschnitte, und damit für alle Schnitte der Elasticitätsfläche.

Wenn wir an alle Punkte des Ellipsoides Tangentialebenen legen, und auf alle diese Ebenen von dem Mittelpunkte aus Senkrechte herablassen, so liegen alle die Punkte, in welchen diese Senkrechten die Tangentialebenen schneiden, auf einer Fläche, deren Halbmesser offenbar alle der von Fresnel für die Elasticitäten nach diesen Richtungen aufgefundenen Gleichung genügen.

Die Quadrate dieser Halbmesser geben uns also die Elasticität, welche durch Schwingungen nach der Richtung derselben erregt wird. Die Fläche ist somit die Elasticitätsfläche, das heifst jene Fläche, deren Halbmesser uns die Elasticität nach der Richtung der Radien in der angegebenen Weise liefert.

Von dieser Fläche erhellt nach der angegebenen Konstruktion sofort, dafs sie eine ringsgeschlossene Fläche ist, welche das Ellipsoid überall umhüllt und dasselbe an den Endpunkten der drei Axen berührt, da die an den Endpunkten der Axen an das Ellipsoid gelegten Tangentialebenen auf den Axen senkrecht stehen. Die drei Axen des Ellipsoides sind somit auch die Axen der Elasticitätsfläche, und der Mittelpunkt des erstern ist zugleich der Mittelpunkt der letztern. Fig. 181 zeigt aufser den Durchschnitten durch das um die drei Axen a, b, c gelegte Ellipsoid mit den drei durch $OXOY$, $OXOZ$, $OYOZ$ gelegten Ebenen auch die Durchschnitte der Elasticitätsfläche mit ebendenselben Ebenen. Diese Schnitte, welche je zwei Axen der Fläche aufnehmen, sind die Hauptschnitte der Fläche. Eine Betrachtung derselben zeigt, wie die Elasticität von der Richtung der X-Axe aus nach allen Seiten hin stetig abnimmt, aber in jeder durch die Axe gelegten Ebene nach einem andern Gesetz, in der Ebene XZ von a bis c, in der Ebene XY von a bis b, und in der zwischen diesen beiden liegenden Ebene von a bis zu einem zwischen b und c liegenden Werte. Ebenso ändert sich die Elasticität stetig, wenn man von einer der andern Axen ausgeht; von Z aus nimmt sie nach allen Seiten zu, von Y aus in der Richtung gegen X hin zu, gegen Z hin ab.

Ein Schnitt der Fläche, welche wir durch den Mittelpunkt legen, schneidet dieselbe immer in einer ringsgeschlossenen Kurve, in welcher zwei auf einander senkrechte Axen den gröfsten und den kleinsten Durchmesser dieser Schnittkurven bilden. Ferner ist es leicht zu übersehen, dafs es jedoch zwei ganz bestimmte durch die Axe OY gelegte und zur Ebene XZ senkrechte Schnitte durch die Fläche gibt, in welchen diese beiden auf einander senkrechten Durchmesser und mit diesen alle übrigen Durchmesser der Schnittkurve einander gleich werden. Denn denken wir uns zunächst einen Schnitt durch die Fläche gelegt, welcher die Axen OY und OZ in sich aufnimmt, so sind b und c offenbar auch die Axen dieses Schnittes. Denken wir uns diesen Schnitt um die Axe OY gedreht, so wird die in OY fallende b auch für alle die dann entstehenden Schnitte eine Axe sein, während die andere zu ihr senkrechte Axe immer in der Ebene ZX liegt und in dieser von c bis a wächst. Da unserer Annahme nach $c < b$, aber $a > b$, so mufs es eine bestimmte Lage des Schnittes geben, für welche die in der Ebene XZ liegende Axe gerade gleich b wird, also die beiden Axen gleich werden. Dann werden es aber auch alle übrigen Durchmesser, und der Schnitt wird ein Kreis. Solcher Kreisschnitte gibt es aber offenbar zwei und nur zwei, denn wir kommen zu denselben sowohl wenn wir den Schnitt ZY von der Linken zur Rechten, als auch wenn wir ihn von der Rechten zur Linken sich drehen lassen.

Denken wir uns jetzt in einem zweiaxigen Krystall diese Elasticitätsfläche um einen Punkt konstruiert, und nehmen an, dafs sich nach irgend einer Richtung durch den Krystall eine Wellenebene fortpflanze. Zur Bestimmung der Fortpflanzungsverhältnisse legen wir durch die Elasticitätsfläche einen der Wellenebene parallelen Diametralschnitt. Die Halbmesser dieses Schnittes geben uns die Elasticitäten für die verschiedenen in der Wellenebene vorhandenen Schwingungen. Die soeben angestellte Betrachtung hat nun ergeben, dafs die Richtungen der gröfsten und kleinsten Elasticität mit den beiden auf einander senkrechten Axen des Diametralschnittes zusammenfallen. Nach dem im § 92 herangezogenen Principe

wird sich daher die Welle in zwei zerspalten, deren Schwingungsrichtungen mit den Axen des Schnittes parallel sind, und welche sich mit verschiedener, durch die Quadrate der Halbaxen bestimmten Geschwindigkeit durch den Krystall fortpflanzen. Es werden sich daher im allgemeinen durch den Krystall nach einer und derselben Richtung, wenn eine Wellenebene in denselben eintritt, zwei senkrecht zu einander polarisierte Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen.

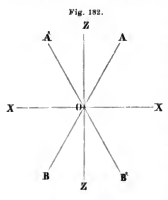
In zwei Fällen wird das jedoch nicht der Fall sein, immer dann, wenn die Wellenebene einem der beiden Kreisschnitte der Elasticitätsfläche parallel ist. Denn in den Fällen ist für die in den Krystall eintretenden Schwingungen keine Richtung einer gröfsten und kleinsten Elasticität vorhanden, sondern für alle Schwingungen ist die Elasticität die gleiche. Es tritt demnach keine Spaltung der Wellen ein, sondern in der Richtung der Normale für Kreisschnitte pflanzt sich nur eine Welle mit der Geschwindigkeit

$$v = A \cdot b$$

durch den Krystall fort. Da wir die Richtung in einem Krystall, in welchem sich nur eine Welle durch den Krystall fortpflanzt, als optische Axe definierten, so folgt, dafs die auf den Kreisschnitten senkrechten Richtungen optische Axen sind, dafs also die Krystalle, welche diese Elasticitätsfläche besitzen, zwei optische Axen haben. Da die Kreisschnitte immer zu der Ebene senkrecht sind, welche die gröfste und kleinste Axe der Elasticitätsfläche in sich enthält, so folgt, dafs ihre Normalen oder die optischen Axen immer in der durch die Axen der gröfsten und kleinsten Elasticität bestimmten Ebene liegen, oder dafs eine durch die beiden optischen Axen gelegte Ebene immer die Axen der gröfsten und kleinsten Elasticität in sich aufnimmt, während die Axe der mittlern Elasticität auf dieser Ebene senkrecht steht.

Da ferner, wie aus der Ableitung der Kreisschnitte unmittelbar hervorgeht, die beiden Kreisschnitte mit der durch die Axe der mittlern und kleinern Elasticität gelegten Ebene gleiche Winkel einschliefsen, so folgt weiter, dafs die Axe der kleinern Elasticität den einen der von den beiden optischen Axen eingeschlossenen Winkel halbiert. Da die Axe der gröfsten Elasticität mit den drei soeben betrachteten Richtungen in einer Ebene liegt und auf der Axe der kleinsten Elasticität senkrecht steht, so folgt, dafs die Axe der gröfsten Elasticität den andern der von den optischen Axen gebildeten Winkel halbiert. Welche dieser beiden Halbierungslinien aber die Axe der gröfsten und kleinsten Elasticität ist, d. h. wenn AB und $A'B'$ (Fig. 182) die optischen Axen eines Krystalles sind, ob die Halbierungslinie des stumpfen Winkels OX oder die des spitzen Winkels OZ die Axe der kleinsten Elasticität ist, das hängt ab von dem Verhältnis der mittlern Elasticitätsaxe zu den beiden andern. Liegt der Wert von b näher bei dem von a als von c, so liegen die Kreisschnitte offenbar näher bei der durch die Axe der gröfsern und

Fig. 182.



mittlern Elasticität gelegten Ebene, die optischen Axen nähern sich daher der Axe der kleinsten Elasticität, diese halbiert den spitzen Winkel der beiden Axen. Krystalle, bei welchen das der Fall ist, nennt man optisch positive. Wenn dagegen die Axe der mittlern Elasticität derjenigen der kleinsten Elasticität näher liegt, so liegen die Kreisschnitte dieser Axe, ihre Normalen der gröfsern Axe näher. Der spitze Winkel der beiden optischen Axen wird deshalb dann von der Axe der gröfsten Elasticität halbiert, und der stumpfe von derjenigen der kleinsten Elasticität. Solche Krystalle nennt man negative.

Ohne Rücksicht darauf, welche die Axe der gröfsten, welche diejenige der kleinsten Elasticität ist, nennt man die Halbierungslinie des spitzen Winkels der beiden optischen Axen, die erste, jene des stumpfen Winkels die zweite Mittellinie des Krystalles.

Wenn in einem Krystalle die optischen Axen durch Beobachtung gegeben sind, so ist man imstande die zur Konstruktion der Elasticitätsfläche des Krystalles notwendigen Konstanten a, b, c zu erhalten. Jede derselben ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, dessen Schwingungen der einen der drei Elasticitätsaxen parallel sind, proportional. Man kann daher die Gröfsen bestimmen, dadurch, dafs man die Brechungsexponenten der Wellen bestimmt, welche sich parallel den Hauptschnitten der Elasticitätsfläche fortpflanzen. Wenn die Wellen senkrecht zum Hauptschnitt XZ sind, so ist immer eine Axe des mit der Welle parallelen diametralen Hauptschnittes die Axe b; welche Neigung also auch die Wellennormale gegen die Axe X oder Z habe, die eine der beiden Wellen pflanzt sich mit der konstanten Geschwindigkeit Ab fort. Von den beiden Wellen, in welche sich eine einfallende Welle zerlegt, deren Normale in die durch die beiden optischen Axen gelegte Ebene fällt, pflanzt sich also eine nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz für isotrope Mittel fort. Wenn man demnach aus einem zweiaxigen Krystall ein Prisma schleift, dessen Grenzflächen senkrecht sind zur Ebene der optischen Axen, dessen brechende Kante somit parallel ist der Axe der mittlern Elasticität, und wenn man dann in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene einen Lichtstrahl durch dieses Prisma gehen läfst, so wird dieser Lichtstrahl in zwei zerlegt, von denen der eine dem gewöhnlichen Brechungsgesetze folgt. Bestimmt man den Brechungsexponenten desselben nach der im ersten Abschnitte auseinandergesetzten Methode, so ist die mittlere Axe b der Elasticität dem reciproken Werte dieses Brechungsexponenten proportional. Denn bezeichnen wir den Brechungsexponenten mit ν_b, die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft mit v, diejenige im Krystalle mit v_b, so ist

$$\nu_b = \frac{v}{v_b},$$

und da nach § 92

$$v_b = A \, . \, b,$$

so ist

$$b = \frac{v}{A \, . \, \nu_b} = \frac{C}{\nu_b}.$$

Schleifen wir aus dem Krystall ein zweites Prisma, dessen Seiten mit der ersten Mittellinie der optischen Axen parallel sind, dessen brechende

Kante senkrecht ist zur zweiten Mittellinie, so werden alle Strahlen, welche wir in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene in das Prisma eintreten lassen, in zwei zerfallen, von denen der eine nur Schwingungen besitzt, welche zur ersten Mittellinie parallel sind, welches auch im übrigen die Neigung der einfallenden Strahlen gegen das Einfallslot ist. Ist die erste Mittellinie die kleinste Axe c, so erhalten wir den Wert derselben aus dem reciproken Werte des Brechungsexponenten ν_c dieses den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgenden Strahles wie oben

$$c = \frac{C}{\nu_c}.$$

Um den dritten Hauptbrechungsexponenten ν_a und aus diesem die Elasticitätsaxe a durch den Versuch zu bestimmen, bedarf es noch eines dritten Prismas, dessen Seiten der zweiten Mittellinie der optischen Axen parallel sind, dessen brechende Kante also mit dieser zusammenfällt. Ein Lichtstrahl, welcher in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene in das Prisma eintritt, zerfällt dann in zwei. Die Schwingungen des einen sind immer der zweiten Mittellinie, also der Elasticitätsaxe a parallel; dieser Strahl hat demnach den konstanten Brechungsexponenten ν_a, und aus dem gemessenen Werte ergibt sich

$$a = \frac{C}{\nu_a},$$

so daſs wir aus diesen drei Brechungsexponenten für die drei Axen die zusammengesetzte Proportion erhalten

$$a : b : c = \frac{1}{\nu_a} : \frac{1}{\nu_b} : \frac{1}{\nu_c}.$$

Man sieht demnach, wie es zur Bestimmung der optischen Konstanten eines zweiaxigen Krystalles, das heiſst derjenigen Gröſsen, welche zur Bestimmung der Brechung des Lichtes in demselben notwendig gekannt sein müssen, zunächst der Kenntnis der Ebene bedarf, welche die optischen Axen aufnimmt, und in dieser die Richtung der Axen selbst. Bei den Krystallen des isoklinischen Systemes bedarf es dieser nicht, da bei diesen die Richtung der Elasticitätsaxen mit derjenigen der krystallographischen Axen zusammenfällt, man also nur drei Prismen herzustellen braucht, deren brechende Kanten den drei krystallographischen Axen parallel sind. Man kann daher bei diesen Krystallen aus den beobachteten Werten ν_a, ν_b, ν_c die Lage und Neigung der Axen bestimmen.

Bei den beiden andern Systemen dagegen fallen die optischen und krystallographischen Hauptrichtungen nicht zusammen, es bedarf deshalb hier immer zunächst einer Untersuchung über die Lage und Neigung der Axen. Das bequemste Mittel dafür liefern die Interferenzerscheinungen in Platten solcher Krystalle, welche wir im nächsten Kapitel betrachten werden.

§ 97.

Wellenfläche in zweiaxigen Krystallen. Durch die im vorigen Paragraphen vollständig bestimmte Fläche, welche uns die Elasticität des Äthers in einem zweiaxigen Krystalle nach jeder beliebigen Richtung liefert,

sind wir imstande, sowohl die Wellen als auch die Strahlen zu erhalten, welche in einem zweiaxigen Krystalle auftreten, wenn eine Lichtwelle in einen solchen Krystall eintritt.

Es ist dazu nur notwendig, dafs wir ähnlich wie in § 92 die Wellenfläche aufsuchen, welche von den Wellenebenen stets berührt wird. Wenn es auch eine gröfsere Schwierigkeit bietet, die Rechnungen hier wie dort durchzuführen, da wir hier keine Rotationsfläche vor uns haben, in welcher alle Schnitte gleichwertig sind, so ist es doch leicht, den allgemeinen Charakter der Wellenfläche zu erkennen und die Hauptschnitte derselben vollständig zu konstruieren.

Von dem Punkte im Innern des Krystalles aus, welcher Mittelpunkt einer Wellenbewegung ist, pflanzen sich nach jeder Richtung zwei Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fort; jede dieser Wellen ist Tangentialebene an der Wellenfläche, die letztere mufs demnach, ähnlich wie diejenige der einaxigen Krystalle aus zwei Teilen oder zwei Schalen bestehen, eine innere und eine äufsere; die langsamer sich fortpflanzenden Wellen sind Tangentialebenen an der innern, die rascher sich fortpflanzenden Tangentialebenen an der äufsern Schale. Die beiden Schalen können aber nicht, wie bei einaxigen Krystallen, ganz in einander liegen und nur die beiden Endpunkte eines Durchmessers gemeinsam haben, da diese Krystalle zwei optische Axen haben, also von dem Mittelpunkte aus nach vier Richtungen hin, von denen je zwei eine gerade Linie bilden, sich die beiden Wellen mit gleicher Geschwindigkeit oder überhaupt nur eine Welle fortpflanzt. Diese Wellen müssen also Tangentialebenen an beiden Schalen zugleich sein.

Soweit es überhaupt möglich ist den Charakter der Wellenfläche ohne verwickelte Rechnung zu erhalten, erkennt man denselben aus der Betrachtung ihrer Hauptschnitte, das heifst der Kurven, in welchen sie geschnitten wird durch die Ebenen, welche wir durch je zwei Axen der Elasticitätsfläche legen. Diese Schnitte geben uns zugleich an, wie weit sich die Lichtschwingungen gleichzeitig in diesen Ebenen ausbreiten.

Wir erhalten sie durch eine Konstruktion und Rechnung, welche derjenigen des § 92 für die Wellenfläche in einaxigen Krystallen genau gleich ist.

Nehmen wir zunächst an, es pflanze sich eine Lichtbewegung parallel einer in der Ebene der optischen Axen, also in einer durch die Elasticitätsaxen a und c gelegten Ebene, liegenden Richtung fort. War die einfallende Lichtwelle unpolarisiert, so zerfällt sie nach ihrem Eintritt in den Krystall in zwei, von denen die eine parallel der mittlern Elasticitätsaxe, welche zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht ist, ihre Schwingungen vollführt, unter welchem Winkel gegen die eine oder andere Axe die Richtung der Fortpflanzung auch geneigt ist. Diese Wellen pflanzen sich demnach mit konstanter Geschwindigkeit nach allen in der Ebene XZ gelegenen Richtungen fort; sie sind nach allen Richtungen immer gleichzeitig gleichweit vom Anfangspunkte O und zwar um die Gröfse

$$v_b = A \cdot b$$

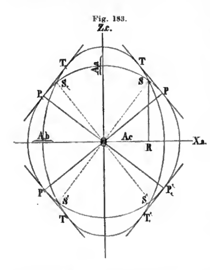
nach der Zeit $t = 1$ entfernt. Es folgt daraus, dafs alle einen Kreis, den wir um O mit dem Radius $A \cdot b$ (Fig. 183) beschreiben, berühren; und daraus dann weiter, dafs dieser Kreis der Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene XZ, derjenigen der optischen Axen, ist.

Die Schwingungen der zweiten der Wellen, in welche die eintretende Welle sich zerteilt, geschehen in der Ebene XZ und zwar, wenn die Richtung der Fortpflanzung mit der Axe c einen Winkel φ bildet, in einer Richtung, welche mit der Axe c den Winkel $90^0 - \varphi$, mit der Axe a den Winkel φ bildet. Die Elasticität des Äthers nach dieser Richtung ist durch den Halbmesser r der Elasticitätsfläche gegeben und dieser ergibt sich aus

$$r^2 = a^2 \cdot \cos^2 \varphi + c^2 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Dieser Ausdruck fällt zusammen mit demjenigen, welcher die Elasticität des Äthers für die Schwingungen der außerordentlichen Strahlen im einaxigen Krystalle bestimmte; die Fortpflanzungsverhältnisse der Wellen, deren Schwingungen in der durch die Axen a und b gelegten Ebene geschehen, müssen demnach ganz dieselben sein, welche wir für eine beliebige Ebene in einem einaxigen Krystall erhielten. Die Durchschnitte der zu dieser Ebene senkrechten Wellenebenen mit dieser Ebene müssen demnach Tangenten an einer Ellipse sein, die um O mit den Axen $OZ = A \cdot a$ und $OX = A \cdot c$ beschrieben ist, also an einer Ellipse, welche durch die Gleichung dargestellt wird

Fig. 183.



$$\frac{z^2}{A^2 a^2} + \frac{x^2}{A^2 c^2} = 1.$$

Denn parallel der Axe OX pflanzt sich das Licht in der Zeiteinheit um die Strecke Ac, parallel der Axe OZ um Aa fort.

Diese Ellipse ist demnach auch der Durchschnitt der einen Schale der Wellenfläche durch die Ebene ac. Die Wellenfläche wird also von dieser Ebene in einem Kreise und einer Ellipse geschnitten, von einem Kreise, dessen Radius Ab ist und von einer Ellipse, deren Mittelpunkt in den des Kreises fällt, und deren große Axe $OZ = Aa$, deren kleine Axe $OX = Ac$ ist.

Da nun $a > b > c$ ist, und somit auch $Aa > Ab > Ac$ ist, so folgt, daſs der Radius des Kreises gröſser als die kleine und kleiner als die groſse Axe der Ellipse ist. Die beiden Kurven, Kreis und Ellipse schneiden sich daher in vier Punkten S, S', $S_,$ $S'_,$, welche je zwei an den entgegengesetzten Endpunkten eines Kreisdurchmessers und symmetrisch zu den Axen a und c liegen, so daſs die Verbindungslinien SS' und $S_, S'_,$ mit den Axen c und a gleiche Winkel einschlieſsen.

Für diejenigen Wellenebenen, welche den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche parallel sind, ist die Elasticität des Äthers gleich b, ihr Abstand vom Anfangspunkt nach der Zeiteinheit also gleich Ab. Der Abstand der mit dieser Wellenebene parallel an die Ellipse gelegten Tangente von O ist also

gleich dem Radius des Kreises, und somit ist diese Tangente auch Tangente des Kreises und zwar berührt sie den Kreis in dem Punkte P, wo die von O aus auf die Tangente herabgelassene Senkrechte die Tangente trifft.

Die durch diese Tangenten gelegten Wellenebenen sind also zugleich Tangentialebenen der innern und äufsern Schale der Wellenfläche; nach der Richtung ihrer Normalen pflanzt sich also jedesmal nur eine Welle fort; die Richtung der letztern ist also diejenige der optischen Axen. Die Richtung der optischen Axen ist also durch die Normalen der Tangenten bestimmt, welche zugleich die Ellipse und den Kreis berühren.

Mit Hülfe dieses Satzes sind wir imstande, aus den drei Hauptbrechungsexponenten, oder den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes parallel den drei Elasticitätsaxen den Winkel zu bestimmen, den die beiden optischen Axen mit einander bilden. Dieser Winkel ist doppelt so grofs als der Winkel, den jede der optischen Axen mit der Axe c bildet. Bezeichnen wir letztern mit Z, so ist nach § 89 der Abstand der den beiden Kurven gemeinschaftlichen Tangente von dem Punkte O nach der Zeiteinheit

$$d = \sqrt{A^2 c^2 \cdot \sin^2 Z + A^2 a^2 \cdot \cos^2 Z}.$$

Da die Tangente auch den mit dem Radius Ab beschriebenen Kreis berührt, so ist zugleich $d = A \cdot b$ und somit

$$b^2 = c^2 \cdot \sin^2 Z + a^2 \cos^2 Z = c^2 + (a^2 - c^2) \cdot \cos^2 Z,$$

$$\cos^2 Z = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Der Winkel, welchen die beiden optischen Axen mit einander bilden, ist dann $2Z$. Der Cosinus des Winkels, den die optischen Axen mit der Elasticitätsaxe a bilden, ist der Sinus dieses Winkels; bezeichnen wir denselben mit X, so ist

$$\cos^2 X = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

In ebenderselben durch die Axen a und c gelegten Ebene liegen auch die beiden früher erwähnten sekundären optischen Axen, die beiden Richtungen, in welchen zu mehreren Wellenebenen nur ein Strahl gehört. Wir definierten früher als Strahlen die Verbindungslinien der Wellenmittelpunkte mit den Berührungspunkten der zu den Strahlen gehörigen Wellenebenen. So sind OP und OT die zur Wellenebene PT gehörigen Strahlen, so dafs den ungeteilten in der Richtung der optischen Axe sich fortpflanzenden Wellen mehrere Strahlen angehören.

In dem Punkte S, in welchem Kreis und Ellipse sich schneiden, läfst sich sowohl eine Tangente an den Kreis als auch an die Ellipse legen; die Linie OS ist also sowohl für die eine als auch die andere der durch diese Tangenten gelegten zur Ebene ab senkrechten Wellenebenen der zugehörige Strahl, die Richtungen OS sind also die optischen Axen für Strahlen, oder die sekundären optischen Axen.

Um den Winkel zu erhalten, welchen die sekundären optischen Axen mit einander bilden, haben wir nur die Länge OS des in die Richtung der optischen Axe fallenden Halbmesser der Ellipse ZSS' zu bestimmen.

Wir haben für dieselbe

$$OS^2 = OR^2 + SR^2 = x^2 + z^2.$$

Da S ein Punkt der Ellipse ist, so ist

$$\frac{x^2}{A^2c^2} + \frac{z^2}{A^2a^2} = 1; \quad z^2 = A^2a^2 - \frac{A^2a^2}{A^2c^2} \cdot x^2.$$

Nennen wir den Winkel, welchen OS mit der Axe Z bildet, $ZOS = Z_1$, so ist

$$x = OR = OS \, . \sin Z_1.$$

Setzen wir diese Werte von z und x in die Gleichung für OS, so wird

$$OS^2 = OS^2 \, . \sin^2 Z_1 + A^2a^2 - \frac{A^2a^2}{A^2c^2} \cdot OS^2 \cdot \sin^2 Z_1,$$

$$OS = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 Z_1}{A^2a^2} + \frac{\sin^2 Z_1}{A^2c^2}}}.$$

Nun ist OS zugleich Radius des Kreises, also gleich $A \, . \, b$.

Daraus folgt

$$\frac{A^2b^2 \, . \cos^2 Z_1}{A^2a^2} + \frac{A^2b^2 \, . \sin Z_1}{A^2c^2} = 1$$

oder

$$\cos^2 Z_1 = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

In ähnlicher Weise erhält man für den Winkel

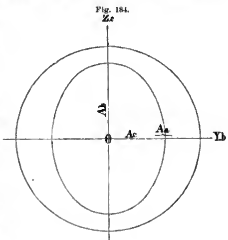
$$\cos^2 X_1 = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}},$$

so dafs also die Winkel, welche die sekundären optischen Axen mit den Axen a oder c, oder mit einander bilden, einfach dadurch erhalten werden, dafs wir in den Ausdrücken für die wahren optischen Axen anstatt der Quadrate der Halbaxen der Elasticitätsfläche deren reciproke Werte einsetzen. Wie man somit die Richtung der sekundären optischen Axen ebenfalls aus den Versuchen berechnen kann, ist unmittelbar klar.

Pflanzt sich eine Lichtwelle in einer durch die Axe der mittlern Elasticität b und der kleinsten Elasticität c gelegten Ebene fort, so wird sich dieselbe in zwei senkrecht zu einander polarisierte Wellen zerspalten, von denen die eine ihre Schwingungen parallel der Axe der gröfsten Elasticität vollführt, welches auch die Richtung ist, in welcher die Welle sich fortpflanzt. Diese Wellen pflanzen sich daher mit der konstanten Geschwindigkeit Aa fort, und nach der Zeiteinheit berühren die Durchschnitte der Wellen mit der Ebene ab einen mit dem Radius Aa beschriebenen Kreis (Fig. 184), dieser Kreis ist somit der Durchschnitt der äufsern Schale der Wellenfläche mit der Ebene, welche von den Elasticitätsaxen b und c, der

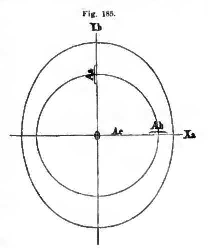
mittlern und der kleinsten bestimmt wird. Der zweite Durchschnitt oder derjenige der innern Schale ist, wie man durch ganz analoge Betrachtungen wie vorhin erhält, eine Ellipse, deren grofse Axe Ab in die Elasticitätsaxe c, deren kleine Ac in die Elasticitätsaxe b fällt. Diese Ellipse wird vollständig von dem Kreise umschlossen, ohne dafs sie nur einen Punkt gemein haben. Diese beiden Kurven haben daher weder eine gemeinsame Tangente, noch auch für mehrere Tangenten eine gemeinsame Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem gemeinsamen Berührungspunkte. Es pflanzen sich daher nach jeder Richtung zwei Wellen und zwei Strahlen fort.

Fig. 184.



Wendet man ganz dieselben Betrachtungen auf den dritten durch die Wellenfläche gelegten Hauptschnitt an, welcher durch die Axen a und b der gröfsten und mittlern Elasticität bestimmt ist, so sieht man, dafs zunächst die innere Schale durch einen Kreis geschnitten wird vom Radius Ac, da für die senkrecht gegen diesen Schnitt erfolgenden Schwingungen die Elasticität des Äthers immer proportional c^2 ist. Die äufsere Schale wird von einer Ellipse geschnitten, deren grofse Axe Aa in die Axe der mittlern Elasticität b und deren kleine Axe Ab in die Axe der gröfsten Elasticität a (Fig. 185) fällt. Auch in diesem Hauptschnitte haben die beiden Schalen der Wellenfläche keinen gemeinsamen Punkt.

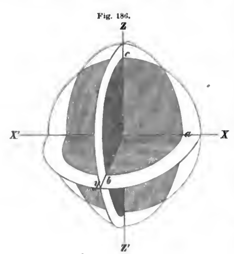
Fig. 185.



Einen Überblick über die Gestalt der Wellenfläche erhält man, wenn man wie in Fig. 186 die drei durch die Wellenfläche gelegten Hauptschnitte in einander fügt. Figur 186 ist perspektivisch darnach konstruiert. Die drei Hauptaxen der Elasticität sind wie bisher in das Axenkreuz X, Y, Z hineingelegt, so dafs die gröfste Axe a in die Axe OX, die mittlere in die Axe OY und die kleinste c in die Axe OZ gelegt ist. Dadurch kommt in die Ebene ZX der Durchschnitt durch die Wellenfläche Fig. 183 der Kreis mit dem Radius $A.b$ und die Ellipse mit den Axen $A.a$, welche in die Axe ZZ fällt, da die Elasticität

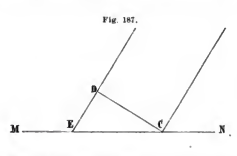
senkrecht zu dieser Axe den gröfsten Wert a besitzt, und der Axe $A \,.\, c$, welche in der Richtung XX liegt.

Der Durchschnitt Fig. 184; der Kreis mit dem Radius $A \,.\, a$ und der Ellipse mit den Axen $A \,.\, b$ in Z und $A \,.\, c$ in Y kommt in die Ebene YZ zu liegen, welche die Elasticitätsaxen b und c in sich aufnimmt.



Der Durchschnitt Fig. 185 kommt in die Horizontalebene XY zu liegen, der Kreis mit dem Radius $A \,.\, c$ als Durchschnitt durch die innere Schale und die Ellipse mit der in Y fallenden Axe $A \,.\, a$ und der in X liegenden Axe $A \,.\, b$ als Durchschnitt durch die äufsere Schale.

Um die Richtung zu erhalten, nach welcher die beiden in einem zweiaxigen Krystall aus einer eintretenden Wellenebene hervorgehenden Wellen und Strahlen im Krystall sich fortpflanzen, wird man mit dieser Wellenfläche die Huyghenssche Konstruktion ausführen. Ist demnach Fig. 187 CD eine Wellenebene, welche die Oberfläche MN eines zweiaxigen Krystalles trifft, in dem die Richtung der optischen Axen und somit diejenige der Elasticitätsaxen bekannt ist, so mufs man um den Punkt C, welcher zuerst von der eintretenden Lichtwelle getroffen wird, die Wellenfläche konstruieren und dann von dem Punkte E aus an die beiden Schalen derselben Tangentialebenen legen. Die Dimensionen derselben, oder die drei Axen Aa, Ab, Ac ergehen sich aus den drei Hauptbrechungsexponenten ν_a, ν_b, ν_c § 96, indem



$$Aa = \frac{v}{\nu_a} DE, \quad Ab = \frac{v}{\nu_b} DE, \quad Ac = \frac{v}{\nu_c} DE$$

ist, da die Lichtbewegung sich nach den Richtungen der Axen um diese Strecken fortpflanzt, während sie in der Luft die Strecke DE zurücklegt, also während die Wellenebene vollständig in den Krystall übergeht.

Aus der komplicierten Gestalt der Wellenfläche ergibt sich unmittelbar, dafs im allgemeinen beide gebrochenen Strahlen aus der Einfallsebene heraustreten, dafs nur in seltenen Fällen einer derselben das gewöhnliche Gesetz

der Brechung befolgen wird. Es würde zu weit führen, hier wie bei den einaxigen Krystallen einzelne Fälle zu betrachten[1]).

Aufser der Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit der Strahlen und Wellen bedarf es zur vollkommenen Kenntnis derselben noch der Bestimmung der Polarisationsrichtung derselben. Auch diese läfst sich, wenn man die Richtung der optischen Axen kennt, vollkommen bestimmen[2]). Sei zu dem Ende ON die Normale einer in den Krystall eingetretenen Welle Fig. 188 und SS der Schnitt, welcher der Wellenebene parallel durch die Elasticitätsfläche gelegt ist. Sind Om und On die Axen dieses Schnittes, so sind die Ebenen NOm und NOn die Oscillationsebenen der sich mit NO parallel fortpflanzenden Wellen. Sind nun K_1 und K_2 die Kreisschnitte der Elasticitätsfläche und OB_1 und OB_2 die Durchschnitte derselben mit der Ebene SS', so ist

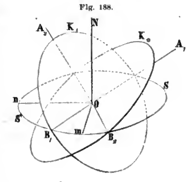


Fig. 188.

$$OB_1 = OB_2 = b,$$

da der Radius der Kreisschnitte die Axe der mittlern Elasticität ist. Die beiden gleichlangen Durchmesser OB_1 und OB_2 des Schnittes SS' sind aber gleich gegen die Axen des Schnittes geneigt, oder die Axe Om halbiert den spitzen Winkel, welchen OB_1 und OB_2 mit einander bilden. Die zu Om senkrechte Axe On halbiert dann den andern stumpfen Winkel, den die beiden Richtungen OB_1 und OB_2 einschliefsen.

Legen wir durch die Normale OA_1 des Kreisschnittes K_1 und die Normale ON der Ebene SS' eine Ebene, so ist dieselbe senkrecht zu OB_1; und ebenso ist die durch ON und die Normale des Kreisschnittes OA_2 gelegte Ebene senkrecht zu OB_2. Diese beiden in ON sich schneidenden Ebenen bilden daher dieselben Winkel mit einander wie die Richtungen OB_1 und OB_2. Die Oscillationsebenen der beiden Wellen nämlich NOm und NOn halbieren also ebenso die Winkel, welche jene beiden Ebenen mit einander bilden, wie Om den Winkel B_1OB_2 und On den stumpfen Winkel der beiden gleichen Durchmesser halbiert. Daraus ergibt sich also für die Oscillationsrichtung der in einem zweiaxigen Krystall sich fortpflanzenden Wellen folgender Satz:

Die Oscillationsebenen der beiden einer gegebenen Richtung parallel in einem zweiaxigen Krystall sich fortpflanzenden Wellen sind die Halbierungsebenen der Winkel, welche die beiden durch jede optische Axe und die gegebene Richtung gelegten Ebenen mit einander bilden.

Wie man unmittelbar sieht, ergeben sich die Oscillationsebenen der Wellen, welche sich parallel einer in einem Hauptschnitt liegenden Richtung fortpflanzen, aus diesem Satze sofort so, wie wir sie eben ableiteten[3]).

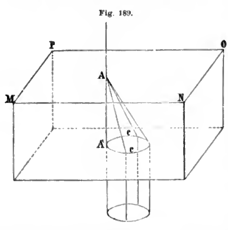
[1]) Man sehe einzelne Fälle in *Beers* Einleitung in die höhere Optik.
[2]) *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 302.
[3]) Über die Bestimmung der Wellenfläche und der Brechung in zweiaxigen

§ 98.

Konische Refraktion. Wir sahen im vorigen Paragraphen, dafs eine zu einer der optischen Axen senkrechte Wellenebene den Durchschnitt, welchen man der Ebene der optischen Axen parallel durch die Wellenfläche eines zweiaxigen Krystalles legt, in zwei Punkten berührt.

Nach den Untersuchungen von W. R. Hamilton[1]) berührt nun die zu den optischen Axen senkrechte, den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche parallele Wellenebene die Wellenfläche nicht nur in diesen Punkten, sondern in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich ist dem Abstande PT (Fig. 183) der beiden Berührungspunkte in der durch die optischen Axen gelegten Ebene. Die Wellenfläche vertieft sich nämlich von allen Seiten her gegen S hin ähnlich wie von P und T aus; es bildet sich an dieser Stelle eine trichterförmige Vertiefung, deren oberer Rand von der durch PT zur Ebene der optischen Axen senkrecht gelegten Ebene berührt wird. Da die von dem Mittelpunkte einer Welle zu den Berührungspunkten einer Wellenebene hingezogenen Halbmesser die den Wellen zugehörigen Strahlen liefern, nach denen wir die Fortpflanzung des Lichtes wahrnehmen, so folgt, dafs zu den in der Richtung der optischen Axen sich fortpflanzenden Wellen unendlich viele Strahlen gehören, welche auf dem Mantel eines Kreiskegels liegen. Wenn demnach auf eine planparallele, senkrecht zu einer der optischen Axen AA' Fig. 189 geschliffene Krystallplatte eine Wellenebene senkrecht auffällt, so wird diese Wellenebene ungebrochen durch den Krystall parallel der optischen Axe sich fortpflanzen. In jedem Momente wird sie die um die Einfallsstelle A beschriebene Wellenfläche in dem Kreise CC berühren und die von der Einfallsstelle zu diesem Kreise CC gezogenen Halbmesser sind die Strahlen, in welche sich der eintretende Strahl spaltet. Im Innern des Krystalles mufs daher ein einfallender

Fig. 189.



Krystallen sehe man:

Fresnel, Über die doppelte Strahlenbrechung. Poggend. Annal. Bd. XXIII. Oeuvres complètes. T. II.

Neumann, Theorie der doppelten Strahlenbrechung. Poggend. Annal. Bd. XXV.

Stefan, Berichte der Wiener Akademie. Bd. L.

Ampère, Annales de chim. et de phys. XXXIX. p. 113. Poggend. Annal. Bd. XXX. p. 262.

Ferner eine Zusammenstellung der verschiedenen Methoden zur Ableitung der Wellenfläche: *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Man sehe auch

Radicke, Handbuch der Optik. Berlin 1839.

Billet, Traité d'Optique physique. Paris 1859.

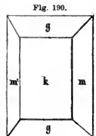
[1]) *Hamilton*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

Strahl sich in einen Strahlenkegel zerspalten, welcher von der Eintrittsstelle aus divergiert, dessen Basis, der Berührungskreis CC um so gröfser wird, je dicker die Krystallplatte ist. Wenn die Welle an der zweiten Grenzfläche des Krystalles ankommt, so tritt die Lichtwelle, da sie senkrecht gegen die Begrenzungsfläche im Krystall sich fortpflanzte, auch nach einer zu derselben senkrechten Richtung, also immer sich selbst parallel hervor, um nach der frühern Richtung und mit der frühern Geschwindigkeit in der Luft sich fortzupflanzen. Jeder der im Krystall zu dieser Wellenebene gehörigen Strahlen gibt beim Übergang der Welle in Luft zu einem gebrochenen Strahle Anlafs, welcher, da die Welle sich jetzt in einem isotropen Mittel bewegt, auf der Wellenebene senkrecht ist. Aus dem Krystall tritt daher anstatt des einen in den Krystall tretenden Strahles eine unendliche Anzahl von Strahlen, welche auf dem Umfange eines Cylinders liegen, dessen Basis der Kreis CC an der zweiten Grenzfläche des Krystalles ist. In dem Innern dieses Cylinders treten keine Strahlen aus, das Innere mufs also dunkel sein und somit ein in den Krystall eintretender Strahl denselben als ein Lichtring verlassen, dessen Durchmesser abhängt von der Dicke der Platte und den optischen Konstanten des Mittels. Der Durchmesser dieses Ringes mufs aber nach dem Austritt des Lichtes aus dem Krystall konstant sein.

Was wir hier für einen in den Krystall eintretenden Strahl abgeleitet haben, mufs auch für ein sehr schmales Strahlenbündel gelten; eine genauere theoretische Untersuchung zeigt, dafs die Dicke des hellen Ringes derjenigen des eintretenden Bündels gleich sein mufs. Ist R der Radius des Kreises CC und r der Radius des einfallenden Bündels, so ist $R + r$ der Radius des äufsern, $R - r$ der des innern Umfanges des austretenden Lichtringes[1]).

Da im Innern des Krystalles der eintretende Strahl in diesem Falle in einen Kegel zerspalten wird, welcher nach dem Durchtritt als Cylinder sich fortpflanzt, so bezeichnete Hamilton diese Erscheinung als innere konische Refraktion.

Fig. 190.



Nachdem Hamilton diese Erscheinung aus der Undulationstheorie abgeleitet hatte, gelang es Lloyd[2]) dieselbe auch experimentell am Arragonit nachzuweisen. Am leichtesten gelingt es nach der Angabe von Beer[3]) auf folgende Weise.

Der Arragonit, zum rhombischen System gehörig, krystallisiert in rhombischen Säulen (Fig. 190) mm'; die Winkel, in welchen sich die Säulenflächen m und m' schneiden, sind 116° 16′ und 63° 44′. Die Flächen g nehmen die spitzen Ecken der Säule fort und die Fläche k, nach welcher der Krystall ziemlich deutlich spaltbar ist, schneidet die scharfen Kanten der Säule gerade ab. Die Axen des Krystalles und der optischen Elasticität sind die Axe der Säule mm' und die grofse und kleine Diagonale des Rhombus, den ein zur Axe senkrechter Schnitt der Säule ergibt.

In dem Arragonit ist die Axe der Säule die erste Mittellinie, die zur

[1]) *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 354 ff.
[2]) *Lloyd*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII. p. 91.
[3]) *Beer* a. a. O. p. 364.

Fläche k senkrechte Diagonale die zweite, ein senkrecht zu k durch die Axe der Säule gelegter Schnitt ist also die Ebene der optischen Axen; diese bilden einen Winkel von 20° mit einander, also in der eben bestimmten Ebene mit der Säulenaxe einen Winkel von 10°. Schleift man daher an einen Arragonit zu jener Ebene senkrecht ein Flächenpaar an, welches mit den Ebenen k Winkel von 100° bildet, so stehen diese auf den optischen Axen senkrecht, eine von diesen Ebenen begrenzte Platte hat also die vorbin geforderte Eigenschaft. Man läfst die Platte recht dick und fafst sie mittels Kork in eine Hülse h Fig. 191, so dafs die Krystallaxe der Axe des Cylinders cc parallel ist, in welchen die Hülse h hineingesteckt wird. Die Hülse h ist in dem Cylinder cc um dessen Axe drehbar, und der Cylinder kann mit dem Knopfe S um eine quer durch den Cylinder CC gehende Axe gedreht werden, an welcher er befestigt ist. Der Cylinder CC trägt an seinem einen Ende die Metallplatte PP mit der Öffnung pp, hinter welche ein Staniolblättchen geklebt ist, welches in der Axe des Instrumentes ein feines Löchelchen besitzt. In dem andern Ende des Cylinders steckt eine Hülse mit Linse und Sehloch. Die Linse wird so eingestellt, dafs man das durch die Doppelbrechung des Krystalles erzeugte Doppelbild der kleinen Öffnung bei p scharf sieht. Durch eine Drehung der Hülse h bringt man es nun dahin, dafs, wenn der Knopf S gedreht wird, die beiden Bilder der Öffnung nicht aus einer zur Axe von S senkrechten Ebene heraustreten; dann fällt die Ebene der optischen Axen des Krystalles mit dieser zusammen. Dreht man dann den Kopf S in dem einen Sinne, so sieht man, je mehr die optische Axe des Krystalles der Axe des Cylinders CC parallel wird, die beiden Bilder der Öffnung sich nähern; in dem Augenblicke, wo sie in einander überzugehen scheinen, bildet sich der glänzende kleine Lichtring Fig. 192 mit dunkler Mitte, dessen Dicke der Gröfse der beiden Bilder der Öffnung gleich ist. Auch ohne Linse kann man denselben schon wahrnehmen und sich so auch überzeugen, dafs derselbe nicht weiter wird, wenn das Auge sich von dem Krystall entfernt.

Fig. 191.

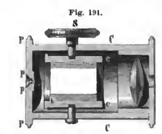
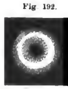


Fig. 192.



Noch eine zweite Art der konischen Refraktion hat Hamilton[1]) aus einer genaueren Untersuchung der Wellenfläche abgeleitet und Lloyd[2]) durch den Versuch am Arragonit nachgewiesen, die äufsere konische Refraktion. Dieselbe tritt dann ein, wenn ein schmales Strahlenbündel einen zweiaxigen Krystall in der Richtung der sekundären optischen Axen durchstrahlt. An den Punkt S (Fig. 183) des Hauptschnittes lassen sich zwei zum Hauptschnitte senkrechte Tangentialebenen an die Wellenfläche legen, denen beiden der Strahl OS angehört, und das Gleiche gilt für alle durch OS gelegten Schnitte, so dafs an den Punkt S eine unendliche Anzahl von Tangentialebenen gelegt werden kann, und für alle diese die Gerade OS

[1]) *Hamilton*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.
[2]) *Lloyd*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

der Halbmesser ist, welcher den Mittelpunkt der Wellenfläche mit dem Berührungspunkt verbindet.

Denken wir uns daher auf irgend eine Weise im Innern eines zweiaxigen Krystalles MN (Fig. 193) eine Lichtbewegung im Punkte O erregt. AA_1 sei die Richtung einer sekundären Axe senkrecht zur Grenzfläche MM_1 und MN ein Schnitt, welcher der Ebene der optischen Axen parallel durch den Krystall gelegt ist. Der Durchschnitt der Wellenfläche mit dieser Ebene ist der Kreis K und die Ellipse E. Dem Strahl OA gehört in diesem Hauptschnitt als Wellenebene an, erstens die Ebene, welche durch die im Punkte A an den Kreis K gezogene mit AM parallele Tangente senkrecht zur Schnittebene MN gelegt wird, und zweitens jene Ebene, welche durch die Tangente AW_1, die in demselben Punkte A an die Ellipse E gezogen ist, senkrecht zur Schnittebene MN gelegt wird. Jede dieser Wellenebenen tritt durch MM' in das isotrope Mittel aus; die erstere, welche der brechenden Fläche parallel ist, tritt parallel mit sich selbst nach AJ aus, die zweite, welche gegen die brechende Fläche geneigt ist, wird in der Richtung W_1ee_1 gebrochen, sie pflanzt sich in der Luft von A aus nach AJ_1 fort. Diesen beiden Wellen entsprechen die beiden Strahlen AJ und AJ_1, welche von A aus divergieren. Ganz dasselbe, was von diesem Schnitt der Wellenfläche gilt, gilt für alle übrigen, und so tritt bei A das auf einem Kegelmantel, dessen Basis der Kreis K ist, liegende Strahlenbündel aus. Im Innern des Kegels befinden sich keine Strahlen, dasselbe ist dunkel; es tritt also bei A ein Lichtring aus, der immer breiter wird, je weiter man sich von MM entfernt, wenn man die ganze Oberfläche des Krystalles mit einer undurchsichtigen Platte bedeckt und nur bei A senkrecht über O eine kleine Öffnung macht.

Fig. 193.

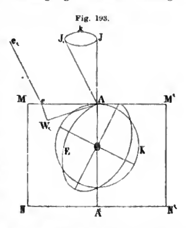
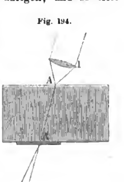


Fig. 194.



Wenn man auf diese Öffnung von aufsen ein konisches Strahlenbündel, dessen Basis der Kreis k ist, leitet, so werden die Wellenebenen, welche den auf dem Kegelmantel liegenden Strahlen angehören, so gebrochen, dafs ihre Strahlen im Krystall sämtlich in der Richtung AO sich fortpflanzen und dann wird bei A', an dem andern Endpunkte der sekundären optischen Axe, ein eben solcher Strahlenkegel den Krystall verlassen und als ein Lichtring der beschriebenen Art wahrgenommen werden, wenn man bis auf den Punkt A' die ganze Fläche NN undurchsichtig macht.

In dieser Weise hat Lloyd in der That die äufsere konische Refraktion nachgewiesen in einer Arragonitplatte, welche senkrecht gegen die erste

Mittellinie geschliffen war, in welcher somit, wie wir sogleich zeigen werden, die sekundären optischen Axen mit dem Einfallslote einen Winkel von 9° 56′ 27″ bilden. Er koncentrierte mit einer Linse ein Bündel paralleler Sonnenstrahlen, so dafs es als ein Strahlenkegel nach dem Punkte A der Oberfläche des Krystalles konvergierte, und verschob auf der andern Seite des Krystalles ein mit einer feinen Öffnung versehenes Metallblättchen und fand dann, wenn die Richtung AA' mit dem Einfallslote einen Winkel von ungefähr 10° bildete, dafs aus der Öffnung A' ein Strahlenkegel der beschriebenen Art hervorging. Der Durchmesser desselben wurde um so gröfser, je weiter der Schirm, auf welchem er den Ring projicieren liefs, von dem Krystall entfernt wurde.

§ 99.

Optische Konstanten zweiaxiger Krystalle. Damit ein zweiaxiger Krystall in optischer Beziehung vollständig bestimmt ist, bedarf es der Kenntnis der Richtung und Gröfse der Axen der Elasticitätsfläche, oder da die letztere den Hauptbrechungsexponenten umgekehrt proportional ist, der Kenntnis dieser. Kennt man diese Daten, so ist die Wellenfläche zu konstruieren, somit die Lichtbewegung im Innern des Krystalles vollkommen bestimmt.

Die Richtung der Elasticitätsaxen ist bei den zweiaxigen Krystallen nicht so einfach zu bestimmen, wie bei den einaxigen, wo sie immer mit den krystallographischen Axen gleiche Richtung haben; von den zweiaxigen Krystallen ist das nur der Fall bei den dem rhombischen System angehörigen. Die vollständig bekannten Krystalle gehören daher auch diesem Systeme an. Die optischen Axen liegen immer in einer durch zwei Krystallaxen bestimmten Ebene und symmetrisch zu den Axen des Krystalles, da die Elasticitätsaxen immer in den letztern liegen. Der Winkel zwischen den optischen Axen ist aber oft für verschiedene Farben verschieden, das heifst die Richtung der optischen Axen ist für die verschiedenen Farben eine andere. Die Änderung in der Lage der Axe ist meist nur klein und immer stetig, so dafs die Winkel der Axen für die brechbareren Strahlen immer kleiner oder gröfser sind.

Wir lassen hier die Angaben für einige Krystalle folgen und bezeichnen dem § 96 gemäfs den kleinsten Brechungsexponenten mit ν_a, den gröfsten mit ν_c, den mittlern mit ν_b.

Arragonit[1]). Für Strahlen mittlerer Brechbarkeit ist

$$\nu_a = 1{,}532; \quad \nu_b = 1{,}686; \quad \nu_c = 1{,}690.$$

Daraus berechnet sich der Winkel, welchen die optischen Axen mit der Axe der kleinsten Elasticität c einschliefsen, $Z = 80^0\,58'$, derjenige mit der Axe der gröfsten Elasticität X zu $9^0\,2'$. Die Axe der gröfsten Elasticität ist also die erste Mittellinie, der Krystall nach der Bezeichnungsweise des § 96 ein optisch negativer. Der Winkel der optischen Axen ist 18° 4′. Für rote Strahlen ist er kleiner 17° 59′, für violette gröfser 18° 27′.

[1]) *Rudberg*, Poggend. Annal. Bd. XVII.

Der Winkel der sekundären optischen Axen wird nach § 97 für Strahlen mittlerer Brechbarkeit 19° 53′.

In welche der Krystallaxen die einzelnen Elasticitätsaxen fallen, ist im vorigen Paragraphen angegeben.

Topas[1]). Für Strahlen mittlerer Brechbarkeit ist

$$\nu_a = 1{,}614\,5;\quad \nu_b = 1{,}616\,6;\quad \nu_c = 1{,}624\,0.$$

Der Winkel der optischen Axen mit derjenigen der kleinsten Elasticität wird daraus $Z = 28^0\,29'$, die Axe der kleinsten Elasticität ist also hier die erste Mittellinie, der Krystall ein positiver, der Winkel der optischen Axen 56° 58′. Er nimmt vom roten Ende des Spektrums zum violetten hin ab. Der Winkel der sekundären optischen Axen ist 56° 42′.

Der Topas krystallisiert in rhombischen Säulen, an denen als Stammform Prismenflächen auftreten, welche einen Winkel von 124° 19′ mit einander bilden. Die erste Mittellinie ist der Axe der Säule, die zweite der Makrodiagonale des erwähnten Prisma parallel.

Salpeter[2]) Für Strahlen mittlerer Brechbarkeit ist

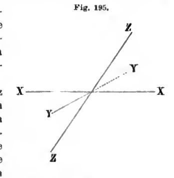
$$\nu_a = 1{,}333;\quad \nu_b = 1{,}504\,6;\quad \nu_c = 1{,}505\,2.$$

Daraus wird $Z = 86^0\,55'$, der Krystall ist somit negativ, die Axe der gröfsten Elasticität ist die erste Mittellinie, der spitze Winkel der optischen Axen ist 6° 10′.

Die Krystallform des Salpeters ist derjenigen des Arragonites gleich und auch bei ihm ist die Säulenaxe die erste Mittellinie und die Makrodiagonale des Rhombus *mm* Fig. 190 die zweite Mittellinie.

Die Richtung der Elasticitätsaxen für die Krystalle der beiden andern Systeme läfst sich nicht aus der Krystallform bestimmen, sondern nur dadurch, dafs man die optischen Axen aufsucht. Bei den klinorhomboidischen Krystallen hat sich noch gar keine allgemeine Beziehung zwischen den optischen und krystallographischen Hauptrichtungen auffinden lassen. Für die klinorhombischen gelten folgende Sätze.

Fig. 195.



Diesem System liegt ein Axenkreuz X, Y, Z Fig. 195 zu Grunde, von denen die Axe Y auf der Ebene der beiden andern senkrecht steht; diese, die Axe der Symmetrie, ist immer eine Elasticitätsaxe, die beiden andern Axen fallen daher in die Ebene XZ, ihre Richtung aber läfst sich aus den krystallographischen Verhältnissen nicht bestimmen.

Die Ebene der optischen Axen liegt entweder senkrecht auf der symmetrischen Ebene XZ oder sie fällt mit dieser Ebene zusammen.

In allen Fällen haben die optischen Axen der verschiedenen Farben verschiedene Richtungen. Steht die Ebene der optischen Axen auf XZ

[1]) *Rudberg* a. a. O.

[2]) *Miller,* Poggend. Annal. Bd. XXXVII.

senkrecht, so kann die Axe Y erste oder zweite Mittellinie sein. Ist sie erste Mittellinie, so ändert die zweite in YZ liegende ihre Lage von Farbe zu Farbe; die Ebene der optischen Axen dreht sich um die Axe Y, wenn man von der einen Farbe zur andern übergeht, indem die in der Ebene der Symmetrie fallenden Elasticitätsaxen eine für die verschiedenen Farben verschiedene Lage haben. Ist die Axe der Symmetrie für alle Farben die zweite Mittellinie, so ändert die erste Mittellinie ihre Lage von Farbe zu Farbe.

Wenn die optischen Axen in die Ebene XZ fallen, so ist die erste Mittellinie für die verschiedenen Farben meist verschieden gelegen; da auch meist der Winkel, den die optischen Axen mit einander bilden, verschieden ist, so liegen die Axen um die Mittellinie für die Strahlen mittlerer Brechbarkeit nicht symmetrisch; es liegen daher im allgemeinen in dem einen Axenbündel die Axen der brechbareren, in dem andern die der weniger brechbaren Strahlen der Mittellinie näher; und die Bündel, in welche die optischen Axen auseinandertreten, sind verschieden grofs[1]).

Viertes Kapitel.

Interferenz des polarisierten Lichtes.

§ 100.

Fresnel-Aragos Gesetze der Interferenz polarisierten Lichtes. Die beiden Lichtstrahlen, in welche das Licht bei seinem Durchtritt durch einen doppelbrechenden Krystall zerfällt, können in vielen Fällen zur Interferenz gebracht werden, und geben dann zu den schönsten und mannigfaltigsten Farbenerscheinungen Anlafs. Dieselben lassen sich im wesentlichen leicht ableiten, mit Hülfe der beiden noch übrigen von Fresnel und Arago aufgestellten Gesetze über die Interferenz polarisierten Lichtes, welche sich als drittes und viertes den beiden im § 80 erwähnten Gesetzen anschliefsen[2]).

Die beiden Gesetze sind folgende:

1. Zwei senkrecht zu einander polarisierte Strahlen können auf eine Polarisationsebene gebracht werden; sie interferieren dann mit einander, wenn sie ursprünglich nur eine Polarisationsebene besafsen, wenn sie also durch die Zerlegung eines polarisierten Lichtstrahles entstanden sind. Bei der Bestimmung der Interferenz mufs aber unter Umständen der Wegedifferenz der beiden Strahlen eine halbe Wellenlänge hinzugezählt werden, unter Umständen nicht.

---

[1]) Weiteres *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. *Grailich*, Krystallogr. optische Untersuchungen. Wien 1858. *Grailich* und *v. Lang*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. XXVII, XXXI, XXXIII. *v. Lang*, ebendort Bd. XXXI u. XLV. *Descloiseaux*, Annales de Mines. T. XI u. XII. Comptes Rendus. LXII. p. 987. Poggend. Annal. Bd. CXXIX. *Groth*, Physikalische Mineralogie.

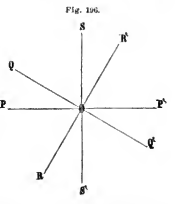
[2]) Poggend. Annal. Bd. XII. p. 376 ff.

2. Wenn zwei senkrecht zu einander polarisierte Strahlen aber aus nicht polarisiertem Licht entstanden sind, so interferieren sie nicht bei der Zurückführung auf eine Polarisationsebene.

Es wird unnötig sein die experimentellen Beweise für diese Sätze, welche Fresnel und Arago führten, mitzuteilen, da sämtliche Erscheinungen, welche wir noch zu betrachten haben, ebensoviel Beweise für die Richtigkeit derselben sind; wir wollen nur zeigen, dafs dieselben sich unmittelbar aus der Undulationstheorie ergeben.

Denken wir uns zu dem Ende, dafs ein polarisierter Strahl senkrecht auf eine doppelbrechende Platte eines Krystalles, etwa eine parallel der Axe aus einem Kalkspat geschnittene Platte falle. Es sei PP' (Fig. 196) die Schwingungsebene des auf den Krystall fallenden Lichtes, und QQ' die Richtung der Axe in demselben. Der einfallende Strahl wird in dem Krystall in zwei zu einander senkrecht polarisierte zerlegt, deren einer seine Schwingungen parallel QQ', der andere parallel RR' vollführt. Fixieren wir den Moment, in welchem die Schwingungen des eintretenden Strahles in der Richtung OP geschehen, so sind in den beiden durch Zerlegung im Krystall entstandenen die Schwingungen nach OQ und OR gerichtet. Diese beiden Strahlen pflanzen sich durch den Krystall mit verschiedener Geschwindigkeit fort, die Länge der Welle eines nach OQ schwingenden Strahles ist gröfser als die des andern.

Fig. 196.



Sei der Krystall so dick, dafs im Innern desselben m Wellen des ersten und n Wellen des zweiten Strahles sich befinden, wo m und n ganze Zahlen sind und n gröfser als m, so werden beide Strahlen den Krystall ohne Phasendifferenz oder vielmehr mit einer Phasendifferenz von einer Anzahl ganzer Wellenlängen verlassen, das heifst, die Schwingungen werden an der Austrittsstelle zugleich von O nach Q und R geschehen. Da die Strahlen von der Austrittsstelle an sich in dem isotropen Mittel nach der gleichen Richtung und mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen, so werden von da an die Bewegungen des Äthers in den beiden Strahlen immer zugleich nach Q und R oder nach Q' und R' geschehen. Die Strahlen treten nun in ein Nicolsches Prisma, welches so gestellt sei, dafs die Schwingungsebene des aus demselben austretenden Strahles parallel PP' ist. In dem Prisma wird wieder jeder der beiden Strahlen OQ und OR in zwei zerlegt, deren einer nach OP, deren anderer nach OS schwingt. Letztere treten nicht durch den Nicol hindurch; die beiden ersten sind parallel polarisiert, und es ist klar, dafs die Resultierende der Bewegung des Äthers in dem aus dem Nicol tretenden Strahle einfach die Summe der beiden nach OP zerlegten Komponenten der beiden Strahlen ist.

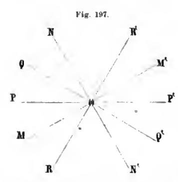
Ist die Dicke der Platte eine andere, so wird der eine Strahl dem andern um eine andere Strecke voreilen; ist die durch den Geschwindigkeitsunterschied erlangte Phasendifferenz z. B. ein ungerades Vielfaches einer

halben Wellenlänge, so treten die beiden Komponenten aus, indem die Bewegung in der einen nach OQ, in der andern nach OR' gerichtet ist. Von da an pflanzen sie sich in dem isotropen Mittel so fort, dafs die Bewegungen immer gleichzeitig nach Q und R' oder nach Q' und R gerichtet sind. In dem Nicol giht jeder der Strahlen eine in PP' fallende Komponente, und zwar sieht man, dafs die von QQ' herrührende Komponente nach OP geht, wenn die von RR' stammende nach OP' geht und umgekehrt. In der gemeinsamen Polarisationsebene interferieren also die beiden Strahlen mit der Phasendifferenz einer halben Wellenlänge, mit derjenigen, welche sie durch die verschiedene Geschwindigkeit im Krystall erhalten haben. Gleiches gilt, welches auch die Phasendifferenz ist, welche zwischen den Strahlen infolge der verschiedenen Geschwindigkeit, mit der sie den Krystall durchsetzt haben, besteht.

Ist aber der zweite Nicol, welcher die aus dem Krystalle austretenden Strahlen aufnimmt, so gestellt, dafs die Schwingungen der aus ihm tretenden Strahlen parallel SS' geschehen, so wird es anders. Nach dieser Richtung gehen die ohne Phasendifferenz aus dem Krystall austretenden Strahlen, die also zugleich nach OQ und OR schwingen, Komponenten, von denen die erste nach OS, die zweite nach OS' gerichtet ist. Die Komponenten haben entgegengesetzte Phase, sie interferieren mit der Phasendifferenz einer halben Wellenlänge. Um demnach die Interferenz zu bestimmen, mufs zu der durch den Geschwindigkeitsunterschied der Strahlen im Krystall erlangten Phasendifferenz der Unterschied einer halben Wellenlänge hinzugezählt werden.

Ebenso in dem zweiten der betrachteten Fälle; die in den Nicol eintretenden Strahlen schwingen zugleich nach OQ und OR', ihre nach SS' zerlegten Komponenten also beide nach OS, die Resultierende ist die Summe beider Komponenten. Auch hier also mufs zur Phasendifferenz infolge des Geschwindigkeitsunterschiedes eine halbe Wellenlänge hinzugezählt werden, um die Interferenz zu erhalten.

Fig. 197.



Vergleichen wir die beiden verschiedenen Lagen des Nicol, so sehen wir, dafs im ersten Falle die Polarisationsebene desselben mit der ursprünglichen Polarisationsebene in demselben Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen der geteilten Strahlen lag, im zweiten Falle in dem andern Winkel, den O und R mit einander bilden, als die ursprüngliche Ebene, und zugleich, dafs eben darin der Grund für das verschiedene Verhalten liegt. Es ergibt sich demnach aus dieser Betrachtung, dem Fresnelschen Satze gemäfs, wenn ein polarisierter Strahl in zwei senkrecht zu einander polarisierte zerlegt wird, und diese dann in eine Polarisationsebene zurückgebracht werden, dafs dieselben mit der inzwischen erlangten Phasendifferenz interferieren, wenn die neue Polarisationsebene in demselben Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen der geteilten Strahlen liegt als die frühere, dafs aber zu der erlangten Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge hinzugezählt werden mufs, wenn die neue

Polarisationsebene so liegt, dafs die Polarisationsebenen der beiden Strahlen, in welche der ursprüngliche Strahl aus einander ging, noch weiter aus einander gehen müssen, damit dieselben wieder eine gemeinschaftliche Polarisationsebene erhalten.

Das zweite der angeführten Gesetze ist eine notwendige Folge des ersten und der Beschaffenheit des natürlichen Lichtes. Wie wir sahen besteht das letztere aus einer raschen Folge von nach allen möglichen Richtungen polarisiertem Lichte. Falle nun auf unseren Krystall ein Strahl natürlichen Lichtes; derselbe wird in zwei zu einander senkrecht polarisierte zerlegt nach QQ' und RR', und sei PP' die Polarisationsebene, auf welche die beiden Strahlen schiefslich zum Zwecke der Interferenz zurückgeführt werden. In dem natürlichen den Krystall treffenden Licht wird in einem bestimmten Moment die Schwingungsrichtung MM' sein, in einem folgenden, jedoch dem ersten unendlich nahen PP', dann QQ' dann NN' und noch später RR', alle diese Schwingungsrichtungen treten in unendlich kurzer Zeit auf. Jede dieser Schwingungen wird nach QQ' und RR' zerlegt und schliefslich nach PP' geführt. Von diesen Schwingungsrichtungen des unpolarisierten Strahles fallen nun aber ebensoviel mit PP in denselben Winkel QOR, als in den andern der von den beiden Polarisationsebenen gebildeten Winkel QOR'. Die erstern interferieren daher mit der im Krystall erhaltenen Phasendifferenz, bei den zweiten mufs zur Phasendifferenz eine halbe Undulation hinzugezählt werden; geben daher erstere das Maximum der Helligkeit, so letztere das Minimum und umgekehrt, so dafs die Wirkung sich aufhebt. Betrachten wir z. B. die beiden Schwingungsrichtungen OM und ON, und nehmen an, die Dicke des Krystalles sei so, dafs in ihm die ordentlichen und aufserordentlichen Strahlen die Phasendifferenz $n\lambda$ erhalten. OM zerlegt sich dann nach OQ und OR, und beide geben eine Resultante nach OP, ON aber zerlegt sich nach OQ und OR', ersteres gibt nach PP' zerlegt eine Schwingung nach OP, letzteres nach OP', die Schwingungen sind also entgegengesetzt. Welches also auch die Phasendifferenz ist, welche die beiden Strahlen OQ und OR im Krystall erhalten, der zuletzt nach PP polarisierte Strahl wird immer die gleiche Helligkeit haben, da die Interferenzen sich immer aufheben.

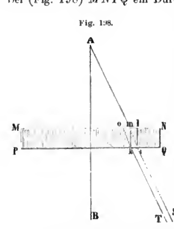
Das zweite der erwähnten Gesetze ist also nicht so zu verstehen, dafs die Vibrationen, welche aus zwei zu einander senkrechten Polarisationsebenen auf eine zurückgeführt werden, wenn sie aus natürlichem Lichte enstanden, überhaupt nicht auf einander wirken, sondern vielmehr so, dafs die Wirkungen, weil sie von den Elementarschwingungen her entgegengesetzt werden, sich aufheben.

§ 101.

Farbenerscheinungen bei dem Durchgange polarisierten Lichtes durch Krystallplatten. Die im vorigen Paragraphen durchgeführte Betrachtung zur Ableitung des ersten der beiden dort besprochenen Gesetze von Fresnel und Arago läfst schon erkennen, dafs wir, wenn ein polarisierter Strahl durch irgend eine Krystallplatte hindurchgeht und dann von einem Nicol aufgenommen wird, Interferenzerscheinungen erhalten müssen, welche von der Dicke der Platte, der Lage der Axe des Krystalls gegen

die Einfallsebene und Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, sowie die Lage der Polarisationsebene des letzten Nicols gegen die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes abhängig sein mufs. Betrachten wir z. B. ein konvergentes Strahlenbündel, welches die Platte eines einaxigen Krystalles, dessen Axe senkrecht zu den Grenzflächen der Platte sei, hindurchdringt. Sei (Fig. 198) *MNPQ* ein Durchschnitt durch die Krystallplatte und *AB* die zu den Begrenzungsflächen der Platte senkrechte Axe des in das bei *A* befindliche Auge kommenden Strahlenkegels. Sei ferner das in die Platte eindringende Licht unter einem Winkel von 45° gegen die Durchschnittsebene *MNPQ* polarisiert, und befinde sich zwischen dem Auge und der Platte ein Nicolsches Prisma, dessen Polarisationsebene derjenigen des einfallenden Lichtes parallel sei. Ein in der Axe *AB* den Krystall durchsetzender Lichtstrahl wird dann ungebrochen und unzerteilt bleiben, da jede durch die Axe gelegte Ebene ein Hauptschnitt des Krystalles ist, also der eintretende Strahl im Hauptschnitte polarisiert ist, und deshalb nicht doppelt gebrochen wird.

Fig. 198.



Anders jedoch verhält es sich mit dem Strahle *Tk*; dessen Polarisationsebene bildet mit der Einfallsebene *MNPQ* einen Winkel von 45°, er zerfällt daher in zwei, einen ordentlich gebrochenen, welcher dem Hauptschnitte *MNPQ* parallel polarisiert ist, und einen aufserordentlich gebrochenen, dessen Polarisationsebene zur Ebene *MNPQ* senkrecht ist. Ersterer pflanzt sich nach *km*, letzterer nach *ko* fort. Gleiches gilt für den Strahl *Si* und für alle, welche gegen die Axe des Krystalles oder des Strahlenkegels geneigt sind. Nun wird, da der Kegel ganz kontinuierlich mit Strahlen angefüllt ist, zu jedem Strahle *Tk* ein anderer *Si* so liegen, dafs der von *Si* kommende aufserordentliche Strahl in demselben Punkte *m* und nach derselben Richtung *mA* den Krystall verläfst, wie der ordentlich gebrochene Strahl *km*, welcher von dem Strahle *Tk* herrührt. Denn denken wir uns von *A* aus den Strahl *Am* auf den Krystall fallen, so wird derselbe doppelt gebrochen, nach *mk* ordentlich und nach *mi* aufserordentlich. Diese beiden Strahlen werden dann ein den Krystall nach unten hin verlassendes mit einander und mit *Am* paralleles Strahlenpaar liefern. In dem kontinuierlichen den Krystall treffenden Strahlenkegel gibt es nun aber immer zwei Strahlen, welche gerade so liegen, wie jenes Strahlenpaar, das aus *Am* entstehen würde; von diesen beiden Strahlen müssen daher bei *m* und nach der Richtung *mA* der ordentliche *km* und der aufserordentliche *im* aus dem Krystall austreten.

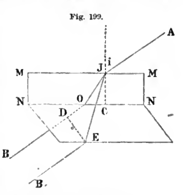
In *mA* pflanzen sich demnach zwei zu einander senkrecht polarisierte Strahlen fort. Diese beiden Strahlen sind aber in verschiedener Phase. Legen wir durch *i* eine zu den einfallenden Strahlen senkrechte Ebene *ie*, so sind in dieser die von derselben weit entfernten Lichtquelle kommenden Strahlen in gleicher Phase; von da an hat dann der eine der beiden Strahlen den Weg $ek + km$, der andere nur den Weg *im* zurückgelegt. Da ferner

der eine Strahl km stärker gebrochen ist, so hat er sich im Krystalle langsamer fortgepflanzt, oder auf der Strecke km liegen eine gröfsere Anzahl von Wellenlängen oder Bruchteilen derselben, als auf im. Der von Tk herrührende Teil des nach mA sich fortpflanzenden Strahles ist daher gegen den andern, zu ihm senkrecht polarisierten, um eine bestimmte Phasendifferenz verschoben. Diese beiden Strahlen werden in dem obern Nicol wieder auf eine der frühern parallele Polarisationsebene zurückgeführt; sie interferieren daher mit jener Phasendifferenz, welche sie auf den verschiedenen Wegen und durch die verschiedenen Geschwindigkeiten erhalten haben.

Ehe wir die Erscheinungen in einzelnen speciellen Fällen betrachten, wollen wir die Bedingungen dieser Interferenz im allgemeinen ableiten. Wir setzen voraus, dafs irgend ein Bündel von Lichtstrahlen nach irgend einer Ebene polarisiert auf eine von parallelen Flächen begrenzte Krystallplatte falle, die irgendwie ans einem Krystall herausgeschnitten sei, der einaxig oder zweiaxig ist.

Sei AJ Fig. 199 ein Strahl dieses Bündels, der unter dem Einfallswinkel i die Platte treffe. Dieser Strahl wird im allgemeinen in zwei zerlegt, von denen der eine JO in der Ebene MN, welche, wenn der Krystall ein einaxiger ist, mit der Einfallsebene zusammenfällt, sich fortpflanzt, der andere JE in einer andern Ebene liegt; nach dem Austritte aus dem Krystall pflanzen sich dieselben einander parallel mit der bei diesen Brechungen entstandenen Phasendifferenz fort resp. bei dem umgekehrten Gange entsteht der Strahl JA ans den beiden Strahlen BO und B_1E, von denen der eine den Weg BOJ, der andere den Weg B_1EJ zurückgelegt hat. Zur Bestimmung dieser Phasendifferenz legen wir durch die Austrittsstelle des Strahles JE eine zu den beiden austretenden Strahlen EB_1 und OB senkrechte Ebene, von der aus dann die Strahlen einander parallel mit der Phasendifferenz weiter gehen, mit welcher sie in diese Ebene eintreten. Von dem Punkte J, in welchem sich die Strahlen getrennt haben, hat der eine im Krystall den Weg JO und aufserdem in der Luft den Weg OD zurückgelegt, während der andere nur den Weg JE im Krystall zurückgelegt hat.

Fig. 199.



Es sei die Amplitude der einfallenden Welle gleich eins und die Gleichnng der Bewegung an der Eintrittsstelle J

$$y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes bilde mit der Polarisationsebene des Strahles JO im Krystalle den Winkel α, und es sei λ_1 dio Länge, welche anf dem Strahle JO der Länge einer Welle entspricht, welche sich auch für zweiaxige Krystalle in der Art, wie wir es § 89 für einaxige gethan haben, bestimmen läfst. Sehen wir von der Schwächnng, welche das

Licht bei der Brechung erfährt, ab, so wird die Gleichung des Strahles JO im Punkte D

$$y_1 = \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{JO}{\lambda_1} - \frac{JD}{\lambda}\right).$$

Nennen wir die Länge des Halbmessers der Wellenfläche, dem der Strahl JO entspricht, ϱ_1, so heifst das, der Strahl pflanzt sich im Krystall um die Länge ϱ_1 fort, während er sich in der Luft um die Strecke eins fortpflanzt. Die Strecke λ_1, die einer Wellenlänge der zum Strahl JO gehörigen Welle entspricht, verhält sich demnach zur Wellenlänge λ des Lichtes in Luft wie ϱ_1 zu eins, denn in derselben Zeit, in welcher sich das Licht in der Luft um eine Wellenlänge fortpflanzt, pflanzt sich die Welle auch im Krystall um eine Wellenlänge fort, da die Schwingungsdauer im Krystall dieselbe ist, wie in Luft. Der Wert von λ_1 ergibt sich daher aus der Gleichung

$$\lambda_1 : \lambda = \varrho_1 : 1$$

$$\lambda_1 = \varrho_1 \lambda.$$

Bildet die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit derjenigen des Strahles JO den Winkel α', so wird die Gleichung des Strahles nach dem Durchtritte durch den zweiten Nicol in einem Abstande x' von D

$$y_2 = \cos\alpha' \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \left[\frac{JO}{\varrho_1 \lambda} + \frac{OD}{\lambda}\right]\right).$$

Da die Polarisationsebene des Strahles JE senkrecht zu derjenigen von JO ist, so bildet dieselbe mit derjenigen des einfallenden Lichtes den Winkel $90^0 - \alpha$. Bezeichnen wir die Strecke, welche auf dem Strahle JE der Länge einer Welle entspricht, mit $\lambda_2 = \lambda\varrho_2$, so ist die Gleichung des Strahles JE an der Austrittsstelle E

$$z_1 = \sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{JE}{\varrho_2 \lambda}\right).$$

Rechnen wir den Winkel α', den die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit JO bildet, positiv, wenn dieselbe auf der gleichen Seite von JO liegt wie die ursprüngliche Polarisationsebene, dagegen negativ, wenn dieselbe auf der andern Seite liegt, so bildet die Polarisationsebene des Strahles JE mit der Polarisationsebene des zweiten Nicols den Winkel $90^0 - \alpha'$. Nach dem Durchtritt durch den zweiten Nicol wird somit die Gleichung des Strahles

$$z_2 = \sin\alpha' \sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{JE}{\varrho_2 \lambda}\right).$$

Da die Schwingungen y_2 und z_2 in derselben Ebene, der Polarisationsebene des durch den zweiten Nicol hindurchtretenden Strahles erfolgen, so ist die aus ihnen resultierende Bewegung die Summe der Teilbewegungen; die resultierende Amplitude ist somit nach dem ersten Satze der Interferenz der schwingenden Bewegungen

$$R^2 = \cos^2\alpha' \cos^2\alpha + \sin^2\alpha' \sin^2\alpha + 2 \sin\alpha' \sin\alpha \cos\alpha' \cos\alpha . \cos 2\pi \frac{OD + \frac{JO}{\varrho_1} - \frac{JE}{\varrho_2}}{\lambda}$$

oder wenn wir

$$OD + \frac{JO}{\varrho_1} - \frac{JE}{\varrho_2} = \Delta$$

setzen, und schreiben

$$\cos 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 1 - 2 \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda}$$

$$R^2 = \cos^2 (\alpha - \alpha') - \sin 2\alpha \sin 2\alpha' \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda} \cdot$$

Anstatt des Winkels α' können wir den Winkel ψ einführen, den die Polarisationsebene des obern Nicols mit derjenigen des eintretenden Lichtes bildet. Da wir den Winkel, welchen die Polarisationsebene des Strahles JO mit der des eintretenden Lichtes bildet, α nannten, denjenigen, welche die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit JO bildet, α', und diesen positiv setzten, wenn die Polarisationsebene des zweiten Nicols an derselben Seite der Polarisationsebene von JO lag als diejenige des einfallenden Lichtes, so ist

$$\psi = \alpha - \alpha'.$$

Damit wird schliefslich

$$R^2 = \cos^2 \psi - \sin 2\alpha \sin 2 (\alpha - \psi) \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda} \cdot$$

Die für die resultierende Intensität mafsgebenden Gröfsen sind somit ψ, α und Δ. Die Werte der Phasendifferenz Δ hängen wesentlich ab von der Natur des Krystalles, ob derselbe einaxig oder zweiaxig ist, und von der Richtung, in welcher die Platte aus dem Krystall herausgeschnitten ist. Im allgemeinen ist dieser Ausdruck periodisch, da Δ von dem Einfallswinkel i abhängig ist. Lassen wir also das Licht, nachdem es aus dem zweiten Nicol ausgetreten ist, in unser Auge dringen, oder fangen es auf einem Schirme auf, so werden wir im allgemeinen bei Anwendung homogenen Lichtes helle und dunkle, bei Anwendung weifsen Lichtes farbige Kurven erhalten. Denn nach den Entwicklungen im Anfange dieses Paragraphen besteht jeder den zweiten Nicol verlassende Strahl aus den Komponenten zweier Strahlen wie OB und EB, für deren Zusammenwirken uns die Gleichung für R die resultierende Amplitude gibt.

§ 102.

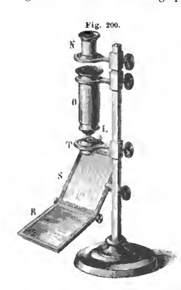
Farbenringe in Platten, welche senkrecht zur Axe aus einaxigen Krystallen geschnitten sind. Nach dem im vorigen Paragraphen erhaltenen Ausdrucke für R hängt die resultierende Intensität, wenn polarisiertes Licht durch eine Krystallplatte dringt, und nachher wieder auf eine Polarisationsebene gebracht wird, wesentlich von dem Werte der Phasendifferenz Δ ab, welche von der Natur des Krystalles und der Richtung, in welcher sie aus dem Krystall geschnitten ist, bedingt wird. Wir wollen im folgenden die interessantesten Fälle betrachten und zunächst die Erscheinungen kennen lernen, welche Platten einaxiger Krystalle zeigen, durch welche ein konvergierender Strahlenkegel hindurchdringt.

Um die in dem Falle auftretenden Kurven wahrzunehmen, bringt man solche Platten von passender Dicke, welche von parallelen eben geschliffenen Flächen begrenzt sind, entweder zwischen die beiden Turmaline einer Tur-

malinplatte, oder zwischen zwei in ähnlicher Weise gefafste Nicols, oder besser noch in einen der zu diesem Zwecke besonders konstruierten Polarisationsapparate, von denen wir kurz den Nörrembergschen und Doveschen beschreiben wollen.

Den Nörrembergschen Polarisationsapparat, wie ihn jetzt nach der Angabe Nörrembergs der Mechaniker Steeg in Homburg verfertigt, zeigt Fig. 200. Von dem Auffangsspiegel R wird das Licht des hellen Himmels auf den Spiegel S reflektiert, so dafs es von diesem unter dem Polarisationswinkel zurückgeworfen senkrecht, also der Axe der Röhren O und N parallel in die Höhe geht. An dem obern Ende des kurzen Rohres T ist eine Linse von kurzer Brennweite gefafst, so dafs die nahezu parallelen Strahlen, welche in das Rohr T eintreten, nach einem nahe über T liegenden Punkte konvergieren. Auf die das Rohr T oben begrenzende Platte, den Objektivtisch, wird die zu untersuchende Krystallplatte gelegt. Der Punkt, nach welchem die Strahlen konvergieren, liegt dann in der Krystallplatte ungefähr in der obern Grenzfläche. Nachdem die Strahlen den Krystall verlassen haben, treten sie divergierend in die Linse L, welche in das untere Ende des Rohres O gefafst ist, und werden so wieder konvergent, so dafs sie nach dem über N befindlichen Auge konvergieren. In der Röhre N befindet sich ein Nicolsches Prisma, welches die Strahlen, ehe sie das Auge treffen, wieder auf eine Polarisationsebene zurückführt. Die Strahlen durchsetzen also den Krystall als ein konvergierender Lichtkegel, und treffen das Auge als ein schwächer konvergierender Kegel. Die Röhre N mit dem Nicol läfst sich in ihrer Fassung drehen, sie trägt eine Marke, welche auf der Kreisteilung der Fassung die Lage der Polarisationsebene des Nicol anzeigt. Steht die Marke auf 0°, so ist die Polarisationsebene des Nicol derjenigen des Polarisationsspiegels S parallel.

Fig. 200.



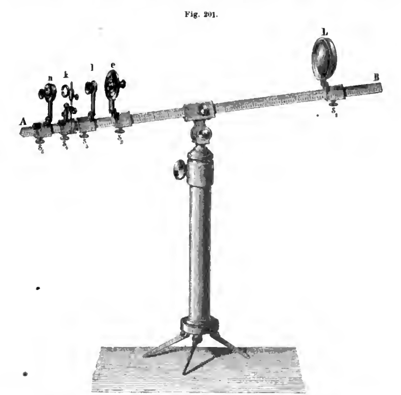
Im Doveschen Polarisationsapparate, welchen der Mechaniker Hirschwald zu Berlin nach Doves Angabe verfertigt, wird das Licht durch einen Nicol polarisiert.

Auf dem durch einen gewöhnlichen Fernrohrfufs getragenen dreiseitigen Prisma AB (Fig. 201) sind an den Hülsen s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 die verschiedenen Teile des Apparates befestigt; s_1 trägt eine Sammellinse von ungefähr 40 Centimeter Brennweite, s_2 das polarisierende Nicolsche Prisma und am Ende desselben gegen A hin eine Linse von ungefähr 4 Centimeter Brennweite. Die Scheibe, in deren Centrum das Rohr mit Nicol und Linse drehbar befestigt ist, trägt auf ihrem Rande eine Kreisteilung, auf welcher ein der Polarisationsebene des Nicol paralleler und an der den Nicol enthaltenden Röhre befestigter Radius einsteht. Der Ständer s_3 trägt eine Linse von

ungefähr 4 Centimeter Brennweite, s_4 einen Ring, in welchem die Krystallplatten befestigt werden können, und s_5 das zweite Nicolsche Prisma, welches wie das erste in dem Centrum einer mit Kreisteilung versehenen Scheibe drehbar befestigt ist, und dessen Polarisationsebene ebenfalls durch einen mit der den Nicol enthaltenden Röhre fest verbundenen Radius angegeben wird.

Um mit diesem Apparate Versuche anzustellen, stellt man die Linse L so, dafs die vom hellen Himmel oder einer Lampe auf sie fallenden Strahlen in der Vorderfläche e des Nicols vereinigt werden. Die von dort diver-

Fig. 201.



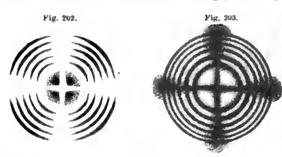
gierend ausgehenden polarisierten Strahlen werden durch die beiden Linsen, die am Nicol drei Centimeter von der Einfallsebene e der Strahlen entfernte und die Linse l, welche von letzterer acht Centimeter entfernt ist, in einen konvergenten Strahlenkegel verwandelt, der durch den Krystall und den zweiten Nicol, vor welchem noch eine schwache Zerstreuungslinse angebracht ist, in das hinter dem zweiten Nicol befindliche Auge dringt[1]).

[1]) Verbesserungen des Nörrembergschen Apparates, um ihn zu krystallographisch-optischen Messungen geeignet zu machen, geben *Descloiseaux:* Mémoire sur l'emploi du microscope polarisant etc. Paris 1864. Poggend. Annal. Bd. CXXVI. *Groth,* Poggend. Annal. Bd. CXLIV. *Laspeyres,* Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. II.

Bringt man in einen der erwähnten Polarisationsapparate eine planparallele senkrecht zur Axe geschnittene Platte eines einaxigen Krystalles, so sieht man, wenn die Polarisationsebene des zweiten Nicols oder Turmalins der Polarisationsebene des ersten oder derjenigen des Spiegels *S* im Nörrembergschen Apparate parallel ist, und bei Anwendung homogenen Lichtes im Krystalle das Ringsystem Fig. 202 von abwechselnd hellen und dunklen Ringen, welches von einem weifsen Kreuz durchsetzt ist, dessen Arme der Polarisationsebene parallel und zu ihr senkrecht sind. Die Mitte des Systems ist hell, um dieselbe legt sich ein dunkler, um diesen ein heller Ring u. s. f.

Ist dagegen die Polarisationsebene des zweiten Nicols zu derjenigen des den Krystall treffenden Lichtes senkrecht, so sieht man in dem Krystall das von einem schwarzen Kreuz durchsetzte Ringsystem Fig. 203. Die

Fig. 202. Fig. 203.



Mitte der Erscheinung ist dunkel, um die dunkle Mitte legt sich ein heller Ring, um diesen ein dunkler und so fort. Die Arme des schwarzen Kreuzes sind der Polarisationsebene des eintretenden Lichtes und derjenigen des letzten Nicols parallel [1]).

Die Ringe werden enger oder weiter, je kleiner oder gröfser die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist; wendet man anstatt des homogenen weifses Licht an, so verwandeln sich deshalb die hellen und dunklen in farbige Ringe von derselben Farbenfolge wie die Newtonschen Ringe. Sind die Polarisationsebenen der beiden Nicols parallel, so ist die Farbenfolge dieselbe wie bei den Newtonschen Ringen im durchgelassenen Lichte, sind sie gekreuzt, wie im reflektierten Lichte. Im zweiten Falle sind also die Ringe komplementär zu denjenigen im ersten Falle gefärbt.

In allen Fällen, das heifst mögen wir homogenes oder zusammengesetztes Licht anwenden, mögen die Nicols parallel oder gekreuzt sein, sieht man, dafs die Ringe um so deutlicher werden, die Farbenunterschiede oder die Helligkeitsunterschiede um so mehr hervortreten, je weiter man von den Armen des hellen oder dunklen Kreuzes sich gegen die Mitte der zwischen den Kreuzesarmen enthaltenen Quadranten entfernt.

Bei einem und demselben Krystalle ändern sich die Durchmesser der Ringe mit der Dicke der Platten, sie werden mit zunehmender Dicke enger und zwar sind die Durchmesser der Ringe gleicher Ordnungszahl der

[1]) Zuerst beobachtet von *Wollaston* im Kalkspat, von *Th. Seebeck* und *Brewster*. M. s. *Lloyd*, Geschichte der Optik, übers. von *Klöden*. Berlin 1836.

Quadratwurzel aus der Dicke der Platten umgekehrt proportional. Bei gleicher Dicke ändern sich die Durchmesser der Ringe bei verschiedenen Krystallen mit der Gröfse der Doppelbrechung, sie sind enger, wenn der Unterschied des Brechungsexponenten des ordentlichen und aufserordentlichen Strahles gröfser ist.

Um gemäfs den Entwicklungen des vorigen Paragraphen die Interferenzkurven in diesem Falle zu berechnen[1]), haben wir zu beachten, dafs wenn ein konvergentes Strahlenbündel die Platte durchdringt, die Einfallsebenen, und damit die Hauptschnitte alle möglichen Lagen haben. Denken wir uns um den Punkt, wo die Axe des Strahlenkegels die Platte trifft, einen Kreis beschrieben, so erhalten wir die Einfallsebene des Strahles, der in irgend einem Punkte dieses Kreises die Platte trifft, wenn wir den Radius zu diesem Punkte ziehen und durch denselben eine zur Platte senkrechte Ebene legen. Daraus folgt, da die Platte senkrecht zur Axe des Krystalles geschnitten ist, dafs jede Einfallsebene ein Hauptschnitt des Krystalles ist. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die so bestimmte Einfallsebene eines Strahles mit seiner Polarisationsebene bildet, mit α, so folgt, dafs jeder Strahl bei seinem Eintritt in den Krystall in einen ordentlichen gebrochen wird, JO Fig. 204, dessen Amplitude proportional $\cos\alpha$, und in einen aufserordentlichen JE, dessen Amplitude proportional $\sin\alpha$ ist, und der in der Einfallsebene bleibt, da diese ein Hauptschnitt des Krystalles ist, wie wir diese Doppelbrechung im vorigen Paragraphen für einen Strahl näher verfolgten (Fig. 198). In unserm Ausdruck für die Phasendifferenz

Fig. 204.

$$\Delta = OD + \frac{JO}{\varrho_1} - \frac{JE}{\varrho_2}$$

ist demnach ϱ_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles, welche wie früher mit ω bezeichnet werden soll. Den Wert von ϱ_2 liefert uns die Huyghenssche Konstruktion des aufserordentlichen Strahles, nach welcher ϱ_2 der in die Richtung JE fallende Halbmesser des Wellenellipsoides ist. Nennen wir den Brechungswinkel LJE des aufserordentlichen Strahles r', so ist r' gleichzeitig der Winkel, welchen der Strahl mit der Axe bildet, da die Axe mit dem Einfallslote zusammenfällt. Nach § 89 ist deshalb

$$\varrho_2^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 r' + \omega^2 \sin^2 r'},$$

wenn ε die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes senkrecht zur Axe ist.

Ist die Dicke der Krystallplatte d, der Brechungswinkel des ordentlichen Strahles $LJO = r$, so wird

$$OD = EO \cos DOE = EO \sin i$$

$$EO = \frac{OJ \sin OJE}{\sin OEJ} = \frac{d}{\cos r} \frac{\sin(r' - r)}{\cos r'}.$$

[1]) Die vollständige Ableitung gab zuerst *Airy*. Cambridge Philos. Transact. vol. IV. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

Dies in den Ausdruck für OD eingesetzt liefert

$$OD = d\,(\sin i \operatorname{tang} r' - \sin i \operatorname{tang} r).$$

Nach § 90 ist, wenn die Axe des Krystalls mit dem Einfallslote zusammenfällt

$$\operatorname{tang} r' = \frac{\varepsilon^2 \sin i}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}},$$

weiter

$$\operatorname{tang} r = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\omega \sin i}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}},$$

somit

$$OD = \frac{d}{\omega}\left(\frac{\varepsilon^2 \sin^2 i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} - \frac{\omega^2 \sin^2 i}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}\right).$$

Für die beiden andern Glieder von Δ ergibt sich

$$\frac{JO}{\varrho_1} = \frac{d}{\omega \cos r} = \frac{d}{\omega \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}$$

und für das dritte Glied, wenn wir ϱ_2 durch seinen Wert ersetzen und $\cos r$ und $\sin r'$ durch $\operatorname{tang} r'$ ausdrücken

$$\frac{JE}{\varrho_2} = \frac{d}{\varrho_2 \cos r'} = \frac{d}{\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Damit erhält man unmittelbar für Δ

$$\Delta = \frac{d}{\omega}\left(\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i} - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}\right),$$

oder die Phasendifferenz der interferierenden Strahlen hängt bei einem gegebenen Krystall nur ab von dem Winkel, den die den Krystall verlassenden Strahlen mit der Axe des konvergierenden Strahlenbündels bilden, welches den Krystall durchsetzt. Daraus folgt, dafs in einem um die Axe dieses Bündels gelegten Kreise die Phasendifferenz dieselbe ist, dafs also, so weit die resultierende Intensität von dieser Phasendifferenz abhängt, sich um die Axe des Krystalls herum eine Anzahl von im homogenen Lichte heller und dunkler, im weifsen Licht farbiger Kreise herum legen müssen.

Setzen wir die Dicke d nicht zu klein voraus, so wird der Winkel i immer so klein, dafs wir $\sin^4 i$ gegen $\sin^2 i$ vernachlässigen können, dann wird

$$\Delta = \frac{d}{2\omega} \cdot (\varepsilon^2 - \omega^2) \sin^2 i.$$

Die Phasendifferenz wird ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, wenn

$$\sin^2 i = (2n - 1) \frac{\omega}{\varepsilon^2 - \omega^2} \cdot \frac{\lambda}{d},$$

sie wird ein gerades Vielfaches, wenn

$$\sin^2 i = 2n \cdot \frac{\omega}{\varepsilon^2 - \omega^2} \cdot \frac{\lambda}{d}.$$

Der Durchmesser der hellen und dunklen Kreise bei homogenem Lichte wird gemessen durch $\operatorname{tang} i$, oder bei den vorausgesetzten kleinen Werten

von i durch $\sin i$; es folgt somit, dafs bei einem und demselben Krystall die Durchmesser der Quadratwurzel der Plattendicke umgekehrt und der Quadratwurzel aus der Wellenlänge direkt proportional sind, dafs sie bei verschiedenen Krystallen von der Geschwindigkeitsdifferenz des ordentlich und aufserordentlich gebrochenen Strahles abhängen.

Mit Hülfe der so bestimmten Phasendifferenz Δ haben wir die resultierende Intensität nach dem Durchtritte der Strahlen durch den zweiten Nicol zu berechnen. Dieselbe war

$$R^2 = \cos^2 \psi - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \psi) \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda}.$$

Nehmen wir zunächst an, die beiden Nicols stehen parallel, also $\psi = 0$, so wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha . \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda}.$$

Der Ausdruck zeigt, dafs, welches auch der Wert von Δ ist, für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$

$$R^2 = 1$$

ist, somit dafs das Ringsystem von einem weifsen Kreuze durchsetzt sein mufs, dessen einer Arm der Polarisationsebene der beiden Nicols parallel ist, dessen anderer zu derselben senkrecht ist. Auch so lange der Wert von α nur wenig von 0^0 oder 90^0 verschieden ist, ist R nur wenig von 1 verschieden, es mufs sich deshalb das weifse Kreuz nach beiden Seiten ausbreiten, und da bei gröfsern Kreisen gleichen Werten von α längere Bögen entsprechen, müssen die Arme des Kreuzes in gröfsern Abständen von der Mitte breiter werden. Ist α beträchtlich von 0 verschieden, so werden die hellen und dunklen respective farbigen Ringe sichtbar; ist $\Delta = \frac{n+1}{2} \lambda$, so wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha,$$

ist $\Delta = n\lambda$, so wird $R^2 = 1$. Die Helligkeit schwankt somit zwischen 1 und $\cos^2 2\alpha$, der Helligkeitsunterschied wird am gröfsten für $\alpha = 45^0$, sie schwankt dort zwischen 1 und 0.

Ist dagegen $\psi = 90^0$, stehen die Nicols senkrecht, so wird

$$R^2 = \sin^2 2\alpha . \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda},$$

die Intensität wird also für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ gleich 0, oder das Ringsystem erscheint von einem dunklen Kreuze durchzogen, dessen Arme parallel den beiden Polarisationsebenen der Nicols sind; dafs dieses Kreuz nach beiden Seiten mit zunehmender Helligkeit sich ausbreiten mufs und ebenso mit Entfernung von der Axe breiter wird, ergibt sich nach dem Vorigen unmittelbar. Aufserhalb der Mitte ist für $\Delta = (n + 1) \frac{\lambda}{2}$

$$R^2 = \sin^2 2\alpha,$$

für $\Delta = n\lambda$, $R^2 = 0$. Die Helligkeit schwankt somit zwischen $\sin^2 \alpha$ und 0, also für $\alpha = 45^0$ zwischen 1 und 0. Die Ringe sind in diesem Falle denen bei parallelen Nicols komplementär gefärbt, da an einer und derselben Stelle im ersten Falle die Helligkeit $\cos^2 \alpha$, im zweiten Falle $\sin^2 \alpha$ ist.

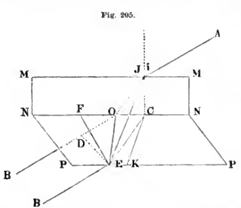
Die Ringerscheinungen zeigen sich in allen einaxigen Krystallen im wesentlichen gleich, nur in einigen treten infolge der eigentümlichen Dispersionsverhältnisse des aufserordentlichen Strahles besondere Farbenverteilungen auf. Besonders ausgezeichnet sind in der Beziehung Apophyllit, unterschwefelsaurer Kalk und Vesuvian. Der Apophyllit z. B. ist für blaues Licht positiv doppelbrechend, für rotes Licht negativ und für die dazwischen liegenden, also für Grün einfach brechend[1]). Infolge dessen erhalten die Farbenringe, da das Grün an keiner Stelle interferiert, einen eigentümlichen grau-grünen Ton.

Bei senkrecht zur Axe geschnittenen Platten einaxiger Krystalle zeigen sich Interferenzerscheinungen nur, wenn ein konvergentes Strahlenbündel durch die Platte hindurchgeht. Bei Anwendung parallelen Lichtes, welches man senkrecht durch die Platte treten läfst, ist $\sin i = 0$, somit $\Delta = 0$ und die Intensität des aus dem Polarisationsapparat tretenden Lichtes ist $\cos^2 \psi$. Läfst man paralleles Licht unter einem Einfallswinkel i hindurchgehen, so ist Δ an allen Stellen der Platte dasselbe, auch dann können keine Kurven auftreten.

§ 103.

Erscheinungen in Blättchen und Platten, welche parallel der Axe aus einaxigen Krystallen geschnitten sind. Wenn man aus einem einaxigen Krystalle Platten parallel der Axe herausschneidet, und diese zwischen die beiden Nicols eines Polarisationsapparates bringt, so mufs das die Platten durchdringende Licht immer doppelt gebrochen werden, aufser wenn der Hauptschnitt derselben der Polarisationsebene des ersten Nicols parallel oder zu ihr senkrecht ist. Da die beiden senkrecht zu einander polarisierten Strahlen mit verschiedener Geschwindigkeit durch den Krystall sich fortpflanzen, so verlassen sie den Krystall mit verschiedener Phase und geben, wenn sie durch den zweiten Nicol auf eine Polarisationsebene gebracht werden, zu Interferenzerscheinungen Anlafs. Die Intensität des den zweiten Nicol verlassenden Lichtes ist durch die allgemeine Gleichung des § 101 gegeben

Fig. 205.



$$R^2 = \cos^2 \psi - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \psi) \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda},$$

es ist nur der Wert von Δ entsprechend der jetzt vorausgesetzten Lage der Axe zu bestimmen. Um dahin zu gelangen, sei wieder $MNNM$ (Fig. 205)

[1]) *Herschel*, Cambridge Philos. Transact. vol. I.

ein Durchschnitt des Krystalles mit der Einfallsebene eines Strahles, die mit dem Hauptschnitt des Krystalles JCK den Winkel χ bilde; es sei JOB der ordentlich gebrochene, JEB der aufserordentlich gebrochene Strahl, dessen Brechungsebene mit dem Hauptschnitt den Winkel χ' bilde, so dafs ECO, der Winkel, den die Ebene des aufserordentlich gebrochenen Strahles JCE mit der Einfallsebene bildet, gleich $\chi - \chi'$ ist. Der Brechungswinkel des ordentlichen Strahles sei wieder r, der des aufserordentlich gebrochenen r', und $NNPP$ sei ein Teil der untern Grenzfläche des Krystalls. Ziehen wir auch jetzt wieder $ED \perp OB$, so ist wie in § 101

$$\Delta = OD + \frac{JO}{\varrho_1} - \frac{JE}{\varrho_2},$$

worin wieder $\varrho_1 = \omega$, gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles, somit auch, wenn d die Dicke der Platte

$$\frac{JO}{\varrho_1} = \frac{d}{\omega \cdot \cos r} = \frac{d}{\omega\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}},$$

und ϱ_2 der in die Richtung des aufserordentlichen Strahles fallende Radius des Wellenellipsoides ist. Für das erste Glied von Δ, OD ist

$$OD = OE \cdot \cos EOD,$$

worin OE die Verbindungslinie der Austrittspunkte der beiden Strahlen ist. Ziehen wir in der untern Grenzfläche des Krystalles $EF \perp NN$, so ist

$$OE = \frac{FO}{\cos EOF} = \frac{FC - OC}{\cos EOF}.$$

Hierin ist

$$FC = EC \cos ECF = EC \cos (\chi - \chi').$$

Da weiter

$$EC = JC \operatorname{tang} r' = d \operatorname{tang} r', \quad OC = d \operatorname{tang} r,$$

so wird

$$OD = d\,(\operatorname{tang} r' \cos (\chi - \chi') - \operatorname{tang} r)\,\frac{\cos EOD}{\cos EOF}.$$

Um die beiden Cosinus zu bestimmen, denken wir uns um O eine Kugel gelegt, auf welcher die Bogen EOD, EOF und NOD ein sphärisches Dreieck bilden, dessen Seiten NOD und EOF, da die Grenzflächen des Krystalles senkrecht zur Einfallsebene sind, einen rechten Winkel einschliefsen, so dafs DOE die Hypothenuse dieses rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ist. Daraus folgt nach einem bekannten Satze der sphärischen Trigonometrie

$$\cos DOE = \cos NOD \cdot \cos EOF.$$

Da NOD der Winkel ist, den der austretende ordentliche Strahl mit der Grenzfläche bildet, so ist $\cos NOD = \sin i$, demnach

$$\frac{\cos DOE}{\cos EOF} = \sin i$$

und

$$OD = d\,(\operatorname{tang} r' \cdot \cos (\chi - \chi') - \operatorname{tang} r) \sin i.$$

Zur Bestimmung von r' und χ' fanden wir § 90

$$\sin \chi' = \frac{\varepsilon^2 \sin \chi}{\sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \chi + \omega^4 \cos^2 \chi}}$$

$$\operatorname{tang} r' = \frac{\sin i \sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \chi + \omega^4 \cos^2 \chi}}{\varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 i \left(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi\right)}},$$

worin ε wie immer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes senkrecht zur Axe ist. Berücksichtigen wir nun, dafs

$$\sin r = \omega \sin i, \quad \operatorname{tang} r = \frac{\omega \sin i}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}},$$

so wird

$$OD = d \left\{ \frac{\sin^2 i \left(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi\right)}{\varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 i \left(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi\right)}} - \frac{\omega^2 \sin^2 i}{\omega \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}} \right\}.$$

Um den letzten Teil der Phasendifferenz

$$\frac{JE}{\varrho_2} = \frac{d}{\varrho_2 \cos r'}$$

zu erhalten, gibt uns die Huyghenssche Konstruktion zunächst für ϱ_2

$$\varrho_2^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cos^2 T + \omega^2 \sin^2 T},$$

worin T der Winkel ist, welchen JE mit der Axe des Krystalles bildet. Den Cosinus dieses Winkels erhalten wir, wenn wir zunächst JE auf die Grenzfläche des Krystalles, welche die Axe des Krystalles aufnimmt, nach EC projicieren, und diese Projektion auf die Richtung der Axe CK noch einmal projicieren. Die erste Projektion ist $JE \,.\, \sin r'$, und da die Brechungsebene des aufserordentlichen Strahles mit dem Hauptschnitte den Winkel χ' bildet, so wird

$$JE \,.\, \cos T = JE \,.\, \sin r' \,.\, \cos \chi',$$

somit

$$\cos T = \sin r' \,.\, \frac{\omega^2 \cos \chi}{\sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \chi + \omega^4 \cos^2 \chi}}.$$

Entwickeln wir aus $\operatorname{tang} r'$ den Wert von $\sin r'$, so erhält man nach einigen leicht zu übersehenden Reduktionen

$$\cos T = \frac{\omega^2 \sin i \,.\, \cos \chi}{\sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2 \left(\varepsilon^2 - \omega^2\right) \cos^2 \chi \sin^2 i}}.$$

Daraus folgt

$$\sin T = \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i \cos^2 \chi}}{\sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2 \left(\varepsilon^2 - \omega^2\right) \cos^2 \chi \sin^2 i}}$$

und aus diesen beiden Ausdrücken ergibt sich unmittelbar

$$\varrho_2 = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2 \left(\varepsilon^2 - \omega^2\right) \cos^2 \chi \sin^2 i}$$

und weiter, indem wir aus $\operatorname{tang} r'$ den Wert von $\cos r'$ entwickeln,

$$\frac{d}{\varrho_2 \,.\, \cos r'} = \frac{d}{\varepsilon \,.\, \sqrt{1 - \sin^2 i \left(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi\right)}}.$$

Hieraus ergibt sich schliefslich für Δ, indem wir die mit gleichen

Nennern versehenen Ausdrücke zusammenziehen

$$\Delta = d\left\{\frac{1 - \omega^2 \sin^2 i}{\omega \cdot \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}} - \frac{1 - \sin^2 i\,(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi)}{\varepsilon \cdot \sqrt{1 - \sin^2 i\,(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi)}}\right\}$$

oder

$$\Delta = d\left\{\frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1 - \sin^2 i\,(\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \omega^2 \cos^2 \chi)}\right\}.$$

Dieser Ausdruck für die Phasendifferenz zeigt, dafs bei Platten, in denen die Axe parallel der Grenzfläche der Platten ist, die Phasendifferenz nicht allein von der Richtung des einfallenden Strahles, sondern auch von der Lage der Einfallsebene abhängig ist. Nur in einem Falle ist die Phasendifferenz von letzterer unabhängig, nämlich wenn der Einfallswinkel $i = 0$, wenn also ein paralleles zur Platte senkrechtes Strahlenbündel durch die Platte dringt. In dem Falle wird

$$\Delta = d\left\{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

und die resultierende Intensität

$$R^2 = \cos^2 \psi - \sin 2\alpha \cdot \sin 2(\alpha - \psi) \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}.$$

Dieselbe hängt demnach nur ab von dem Winkel der beiden Polarisationsebenen, dem Winkel, welchen der Hauptschnitt des Krystalles mit der Polarisationsebene des ersten Nicols bildet, der Dicke der Platte und dem Unterschiede des ordentlichen und aufserordentlichen Brechungsexponenten der Platte. Bei einer gegebenen Platte ist demnach die Helligkeit im homogenen, die Färbung im weifsen Lichte überall dieselbe, sie hängt dann nur von den Werten ψ und α ab. Ist ψ gleich 0, sind also die beiden Nicols parallel gestellt, so wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda},$$

ist $\psi = 90^0$, stehen die beiden Nicols senkrecht, so wird

$$R^2 = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}.$$

Die Intensitäten ergänzen sich also in diesen beiden Fällen zu 1, die Färbungen im weifsen Licht sind komplementär. Das Minimum der Intensität im homogenen Licht für den Fall, dafs die Nicols parallel stehen, das Maximum für den Fall, dafs sie gekreuzt sind, tritt ein, wenn $\alpha = 45^0$ ist, denn dann ist $\sin 2\alpha = 1$, und die resultierenden Intensitäten werden

$$R^2 = 1 - \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \quad \text{oder} \quad R^2 = \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}.$$

Im weifsen Lichte werden die Färbungen der Platten am reinsten, und in den beiden Lagen zu einander komplementär.

Man findet in der That alle diese Folgerungen in der Erfahrung bestätigt; bringt man eine dünne Platte zwischen zwei Nicols und macht das Gesichtsfeld so klein, dafs nur die centralen Strahlen ins Auge gelangen, so erscheint bei parallelen Nicols das Gesichtsfeld weifs, wenn $\alpha = 0$ ist. Dreht man die Krystallplatte, so wird es gefärbt, und die Färhung ist am reinsten, wenn $\alpha = 45^0$ ist; die Farbe ist jene, welche ans dem Weifs entsteht, wenn die Farben fortgenommen werden, für welche die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge ist. Sind die Nicols gekreuzt, so ist das Gesichtsfeld dunkel, wenn $\alpha = 0$, es ist am hellsten, wenn $\alpha = 45^0$ ist, und die Farhe ist jene, welche sich aus denen zusammensetzt, für welche die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge ist, sie ist also komplementär zu derjenigen bei parallelen Nicols.

Welche Farbe bei einer bestimmten Dicke eines Krystalls bei gekreuzten Nicols entsteht, läfst sich unmittelbar aus einer Vergleichung des für die Intensität in diesem Falle entwickelten Ausdruckes mit der für die Newtonschen Farhenringe im reflektierten Lichte geltenden Gleichung ableiten. Für letztere hatten wir bei senkrechter Incidenz (p. 417)

$$J = \frac{4\,a^2 r^2 \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda}}{1 - r^2)^2 + 4 r^2 \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda}},$$

worin $\varDelta$ die doppelte Dicke der Schicht an der Stelle des betrachteten Ringes bedeutet. Die Farbe der Krystallplatte bei einer Dicke d ist deshalb dieselbe wie die eines Newtonschen Ringes, für eine Schicht, deren doppelte Dicke $\varDelta$ gegeben ist durch

$$d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \varDelta$$

oder die Farbe bei einer Dicke d ist gleich der einer Luftschicht, deren doppelte Dicke gleich ist der Dicke der Platte multipliciert mit der Differenz der beiden Hauptbrechungsexponenten des Krystalles. Bei parallelen Nicols ist die Färbnng komplementär. Die Änderung der Farbe bei Änderung der Plattendicke ist deshalb der Änderung der Farbe in den Newtonschen Ringen bei Zunahme der Dicke der Luftschicht gleich.

Wächst die Dicke des Blättchens von 0 an stetig, so wird bei gekreuzten Nicols zuerst das Blan erster Ordnung auftreten, wenn die Phasendifferenz der brechbarsten Strahlen eine halbe Wellenlänge geworden ist; bei zunehmender Dicke, wenn die Phasendifferenz für Grün gleich einer halhen Wellenlänge wird, ist diese Farbe im Maximnm, aber anch Blau und Rot sind nicht weit von dem Maximum entfernt, es entsteht das Weifs erster Ordnung. Bei weiter zunehmender Dicke herrscht dann Gelb vor, dann Rot und daranf folgen die Farben der zweiten Ordnung, die der dritten und so fort, bis hei den höhern Ordnungen das Gesichtsfeld nicht mehr farbig erscheint. Letzteres tritt z. B. beim Quarz ein, sobald die Dicke der Platte $0^{mm},5$ wird[1]).

---

[1]) *Arago,* Mémoires de l'Académie de l'Institut de France 1811. *Biot,* Ebendort. *Fresnel,* Poggend. Annal. Bd. XII. Annales de chim. et de phys. XVII.

Läfst man ein schmales durch eine solche dicke Krystallplatte hindurchgegangenes Lichtbündel durch ein Prisma hindurchgehen, so fehlen, wenn wir die Nicols als gekreuzt voraussetzen, in dem Spektrum alle jene Farben, für welche

$$d\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)=n\lambda \quad \ldots . \quad (1)$$

ist; man sieht also das Spektrum durch eine Anzahl schwarzer, den Fraunhoferschen Linien parallelen Streifen durchsetzt, in ganz ähnlicher Weise wie bei den Talbotschen Linien. Auch hier ist die Phasendifferenz zweier neben einander liegender Streifen um eine Wellenlänge verschieden, man kann deshalb durch Zählung derselben, wenn man zwei Wellenlängen als bekannt voraussetzt, jene der übrigen Farben bestimmen. Wenn man die Beobachtung an zwei Platten desselben Krystalls, aber verschiedener Dicke anstellt, und die Dicke der beiden Platten genau mifst, kann man auch direkt die Wellenlängen erhalten. Am bequemsten wendet man dazu zwei keilförmig geschliffene Krystallplatten an, welche mit parallelen Axen in ähnlicher Weise zusammengelegt werden, wie die Quarzplatten des Babinetschen Kompensators. Befinden sich zwischen zwei Streifen, deren einer die Wellenlänge λ, deren anderer λ' hat, bei einer gemeinschaftlichen Dicke der beiden Platten gleich d, p Streifen, so ist

$$\frac{d\left(\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\varepsilon'}\right)}{\lambda'}-\frac{d\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}=p, \quad \ldots . \quad (2)$$

worin nur λ und λ' unbekannt sind. Verändert man nun durch Verschiebung der Krystallkeile die Dicke der Platten allmählich, so verschieben sich die Streifen, und an der Stelle λ wird erst dann wieder ein Streifen auftreten, wenn die Dicke d_1 geworden, so dafs

$$d_1\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)=(n+1)\,\lambda.$$

Hat man so durch stetiges Vergröfsern der Dicke an der Stelle λ q Streifen vorübergehen sehen, und ist dadurch die gemeinschaftliche Dicke d_q geworden, so hat man

$$\frac{d_q\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}=n+q.$$

Hieraus und aus der ersten Gleichung folgt

$$\lambda=\frac{\left(d_q-d\right)\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{q};$$

und mit dem so gefundenen Werte von λ kann man dann nach der zweiten Gleichung die übrigen Wellenlängen bestimmen.

Diese Methode zur Messung der Wellenlängen ist von Stefan[1]) angegeben worden.

---

[1]) *Stefan*, Wiener Berichte LIII. p. 521. 1866.

Wenn ein konvergentes Strahlenbündel durch die Platte hindurchtritt, so wird entsprechend der allgemeinen Gleichung für Δ die Phasendifferenz für die verschiedenen Stellen der Platte verschieden, nicht nur, weil für dieselben die Werte von i, sondern auch weil die Werte von χ verschieden sind. Bei Anwendung homogenen Lichtes werden daher die verschiedenen Punkte der Platte eine verschiedene Helligkeit zeigen müssen.

Die Punkte gleicher Helligkeit liegen auch hier auf Kurven, die aber nicht, wie bei den senkrecht zur Axe geschnittenen Platten, Kreise sind, sondern Hyperbeln wie in Fig. 206. Es treten vier Hyperbelsysteme auf, deren Asymptoten mit der Richtung des Hauptschnittes in der Platte Winkel von nahezu 45° bilden; die letztern sind dunkel, wenn die Nicols gekreuzt sind[1]). Die Kurven sind am intensivsten, das heifst die Unterschiede der

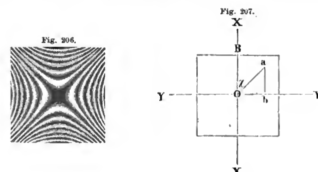


Fig. 206. Fig. 207.

Helligkeit der hellen und dunklen Kurven sind am gröfsten, wenn die Axenebene mit der Ebene der Nicols einen Winkel von 45° bildet, sie verschwinden, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90°$ ist, bei gekreuzten Nicols sind die Kurven dunkel, welche bei parallelen hell sind und umgekehrt.

Dafs diese Kurven Hyperbeln sein müssen, ergibt sich unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung für die Phasendifferenz. Die Punkte gleicher Helligkeit sind auf der Platte jene, für welche die Phasendifferenz Δ einen konstanten Wert hat; wir haben deshalb nur jene Punkte auf der Platte aufzusuchen, für welche Δ immer dasselbe ist. Am bequemsten gelangen wir dazu, indem wir die Phasendifferenz der verschiedenen Punkte der Platte anstatt durch i und χ durch Linienkoordinaten ausdrücken. Wir nehmen deshalb in der Platte ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in der Mitte der Platte, das heifst dort liegt, wo die Axe des konvergenten Strahlenbündels die Platte durchsetzt, und legen die Axe der x parallel der Axe des Krystalles, die Axe der y zu ihr senkrecht (Fig. 207). Die Einfallsebene eines im Punkte a die Platte durchsetzenden Strahles schneidet dann die Platte in der Verbindungslinie Oa des Plattenmittelpunktes mit dem Punkte a; der Winkel χ ist demnach gleich dem Winkel BOa, welchen die Verbindungslinie Oa mit der Axe bildet; es wird deshalb

[1]) *J. Müller* (Freiburg), Poggend. Annal. Bd. XXXIII.

$$\cos \chi = \frac{ab}{Oa} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\sin \chi = \frac{Ob}{Oa} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Um auch den Winkel i durch x und y auszudrücken, nennen wir den Abstand des Punktes, nach welchem das Strahlenbündel konvergiert, und der senkrecht über O liegt, D; dann ist, da i der Winkel ist, welchen der in a austretende Strahl in der durch Oa gelegten Ebene mit der durch O zur Platte senkrecht gelegten Richtung bildet,

$$\operatorname{tang} i = \frac{Oa}{D} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{D},$$

wofür wir auch bei dem immer sehr kleinen Wert von i setzen dürfen $\sin i$. Setzen wir diese Werte in die allgemeine Gleichung für Δ

$$\Delta = d\left\{\frac{1}{\omega}\cdot\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{1 - \sin^2 i\,(\varepsilon^2 \sin^2\chi + \omega^2 \cos^2\chi)}\right\}$$

ein, so wird dieselbe

$$\Delta = d\left\{\frac{1}{\omega}\cdot\sqrt{1 - \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{D^2}} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{1 - \frac{(\varepsilon^2 y^2 + \omega^2 x^2)}{D^2}}\right\}.$$

Ziehen wir die Wurzel angenähert aus, unter Voraussetzung, dafs $\sin^4 i$ vernachlässigt werden darf, so wird

$$\Delta = d\left\{\frac{1}{\omega}\left(1 - \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2D^2}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{(\varepsilon^2 y^2 + \omega^2 x^2)}{2D^2}\right)\right\}$$

und daraus

$$D^2\left\{\frac{\Delta}{d}\cdot\frac{2\varepsilon}{\varepsilon - \omega} - \frac{2}{\omega}\right\} = \varepsilon y^2 - \omega x^2,$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, dafs die Punkte gleicher Helligkeit auf Hyperbeln liegen, deren Axen die Axe des Krystalls und die zu derselben senkrechte Richtung sind. Welche der Axen reell, welche imaginär ist, hängt von dem Vorzeichen des Ausdruckes auf der linken Seite ab. Für die Mitte der Platte erhalten wir den schon vorher abgeleiteten Wert der Phasendifferenz; denn setzen wir $x = 0$, $y = 0$, so wird

$$\Delta = d\left(\frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon\omega}\right).$$

Daraus folgt zunächst, dafs die Helligkeit der Platte in der Mitte bei homogenem Lichte, die Färbung bei weifsem Lichte gleich ist jener, welche die Platte bei einem parallelen durch sie hindurchtretenden Strahlenbündel zeigt. Weiter ergibt sich daraus, dafs im weifsen Lichte die farbigen Kurven nur bei solchen Dicken der Platten sich zeigen, bei denen die Mitte noch farbig erscheint; sobald in der Mitte das Weifs höherer Ordnungen auftritt, sind die isochromatischen Kurven nicht mehr sichtbar. Um deshalb bei einigermafsen dicken Platten die Kurven noch wahrzunehmen, ist es notwendig, dieselben mit homogenem Lichte zu beleuchten.

Um die Lage der Hyperheln genauer zu bestimmen, wollen wir den Unterschied zwischen der Phasendifferenz der Mitte und derjenigen an den verschiedenen Punkten der Platte einführen. Nennen wir diesen δ, so wird

$$\Delta = d \cdot \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon \omega} + \delta$$

nnd damit

$$D^2 \cdot \frac{2 \varepsilon \delta}{(\varepsilon - \omega) d} = \varepsilon y^2 - \omega x^2.$$

Für negative Krystalle ist der Nenner des Ausdrucks auf der linken Seite positiv, für diese erhalten wir zunächst ein System von Hyperheln, dessen reelle Axen senkrecht sind zur optischen Axe; die Werte dieser Axen ergeben sich, indem wir $x = 0$ setzen,

$$y = \pm D \sqrt{\frac{2\delta}{(\varepsilon - \omega) d}}$$

und für δ nach und nach die Werte $\frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2} \cdots n \frac{\lambda}{2}$ einsetzen; den Werten $(2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ entsprechen hei parallelen Nicols die dunklen, bei gekreuzten Nicols die hellen Hyperheln. Lösen wir die letztere Gleichung nach δ auf, so wird

$$\delta = \frac{(\varepsilon - \omega) d}{2 D^2} \cdot y^2,$$

es folgt also, dafs mit zunehmender Entfernung von der Mitte in der Richtung senkrecht zur Axe die Phasendifferenz wächst, und zwar proportional dem Quadrate des Abstandes des betrachteten Punktes von der Mitte. Die Kurven gleicher Helligkeit rücken also um so näher zusammen, je weiter sie von der Axe entfernt sind.

Die Werte von δ, welche an den verschiedenen Punkten der Axe stattfinden, erhalten wir, wenn wir in der allgemeinen Gleichung $y = 0$ setzen, und dann nach δ auflösen; sie werden

$$\delta = -\frac{\omega(\varepsilon - \omega) d}{2 \varepsilon D^2} \cdot x^2.$$

Die Phasendifferenz ist also dort kleiner als in der Mitte, δ wird negativ. Setzen wir deshalh $\delta = -\delta'$, so wird

$$D^2 \cdot \frac{2 \varepsilon \delta'}{(\varepsilon - \omega) d} = \omega x^2 - \varepsilon y^2,$$

oder aufser dem ersten Hyperhelsystem, dessen reelle Axe senkrecht zur Axe des Krystalles ist, tritt noch ein zweites auf, dessen reelle Axe parallel der Axe des Krystalles ist; auch diese Hyperbeln rücken einander um so näher, je weiter sie von der Mitte entfernt sind.

Diese heiden Hyperbelsysteme sind durch die Linien getrennt, welche dieselbe Phasendifferenz wie die Mitte haben, für welche also $\delta = 0$ ist. Diese Richtungen sind die Asymptoten an den heiden Hyperbelsystemen. Die Lage derselben ergibt sich aus der Gleichung

$$\varepsilon y^2 - \omega x^2 = 0$$

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}.$$

Dieselhen sind gerade Linien, deren Neigung β gegen die Axe des Krystalles hiernach gegehen ist durch

$$\tang \beta = \sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}.$$

Die Neigung ist nm so kleiner, je stärker die Doppelbrechung ist, sie nähert sich um so mehr 45°, je geringer der Unterschied des aufserordentlichen und ordentlichen Brechungsexponenten ist.

Den physikalischen Grund dafür, dafs senkrecht zur Axe die Phasen gröfser, parallel der Axe kleiner werden als in der Mitte, wenn der Einfallswinkel zunimmt, erkennt man leicht. In der Richtung y, senkrecht zur Axe treten die Strahlen stets in einer znr Axe senkrechten Richtung durch den Krystall, die Geschwindigkeit der Strahlen hleiht also dieselbe; da aber mit der gröfsern Neigung die im Krystall znrückgelegten Wege zunehmen, so mufs die anf diesen Wegen erhaltene Phasendifferenz gröfser werden. In der Richtung x parallel der Axe wird dagegen mit der gröfsern Neigung der Strahlen auch der Winkel kleiner, den dieselben mit der Axe hilden, damit dann auch der Unterschied in den Geschwindigkeiten des ordentlichen und aufserordentlichen Strahles. Dafs aus diesem Grunde trotzdem die mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufenen Wege gröfser, die Phasenunterschiede kleiner werden müssen, erkennt man schon daraus, dafs parallel der Axe selbst auf einem unendlich langen Wege keine Phasendifferenz mehr entsteht.

Ganz dieselben Ansdrücke, welche wir hier für negative Krystalle entwickelt hahen, gelten auch für positive, nur dafs an die Stelle von $\varepsilon - \omega$ jedesmal $\omega - \varepsilon$ tritt. Wir erhalten deshalh genau ehensolche Hyperbelsysteme, wie sie Fig. 206 zeigt, und wie sie aus der gegehenen Diskussion der allgemeinen Gleichungen folgen. Der einzige Unterschied, der zwischen heiden Arten der Krystalle hesteht, zeigt sich in der Lage der Asymptoten. Denn da bei negativen Krystallen $\omega < \varepsilon$, bei positiven dagegen $\omega > \varepsilon$, so ist hei negativen der Winkel β stets kleiner, hei positiven stets gröfser als 45°. Man kann daher durch Bestimmung des Winkels β den Charakter der Doppelbrechung eines Krystalles erkennen.

Bei Anwendung weifsen Lichtes treten an Stelle der hellen und dnnklen Hyperheln nur dann farhige Hyperbeln auf, wenn die Platten nur eine sehr geringe Dicke hahen, selbst bei Quarz, dessen Doppelbrechung nur eine sehr geringe ist, zeigen sie sich nicht mehr, wenn die Platte nur $0{,}5^{mm}$ dick ist, wie schon vorhin erwähnt wurde. Einer Ahleitung der Farbenkurven bedarf es nicht.

Ähnliche Farhenkurven zeigen anch andere aus den Krystallen geschnittene Platten, es würde jedoch zu weit führen, dieselben hier im einzelnen zu beschreihen und abzuleiten; der in den ausführlicher hesprochenen beiden Fällen angewandte Weg führt immer zum Ziele, man hat nnr, um $\varDelta$ zu bestimmen, den der jedesmaligen Lage der Axe entsprechenden Wert von χ', r' und ϱ_2 einzusetzen. Zuerst ansführlich untersucht sind dieselhen von Müller in Freihurg[1]).

---

[1]) *Müller*, Poggend. Annal. Bd. XXXV.

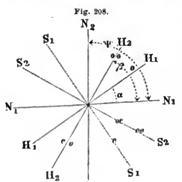
§ 104.

Gekreuzte Platten; Savarts Polariskop; Wilds Photometer. Während im weifsen Lichte die isochromatischen Kurven nur bei dünnen Platten auftreten, kann man sie selbst bei sehr dicken Platten erhalten, wenn man zwei solcher Platten gleicher Dicke, welche in derselben Weise aus einem und demselben Krystalle geschnitten sind, so auf einander legt, dafs die Axenebenen derselben zu einander senkrecht sind. Wegen des mannigfachen Gebrauches solcher gekreuzten Platten wollen wir die allgemeinen Gleichungen für die resultierende Intensität berechnen, wenn zwischen die beiden Nicols zwei Platten gebracht sind, deren Axenebenen resp. Hauptschnitte mit einander den Winkel β bilden. Die Gleichung des an der Grenze des ersten Krystalles ankommenden Strahles sei

$$y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \sin \xi.$$

Nun bilde der Hauptschnitt des ersten Krystalls $H_1 H_1$ (Fig. 208) mit der Polaritationsebene des ersten Nicols $N_1 N_1$ den Winkel α. Beim Eintritt in den Krystall wird der Strahl in einen ordentlichen und einen aufserordentlichen gebrochen; die Polarisationsebene $H_1 H_1$ des erstern bildet mit der des einfallenden Strahls den Winkel α, die des letztern $S_1 S_1$ mit $N_1 N_1$ den Winkel $90^0 + \alpha$. Nennen wir die Verschiebung der Phase des ordentlich gebrochenen Strahles δ_o, die des aufserordentlichen δ_e, so sind die Gleichungen beider Strahlen

Fig. 208.



$$y_o = \cos \alpha \,.\, \sin (\xi - \delta_o)$$
$$y_e = \cos (90 + \alpha) \,.\, \sin (\xi - \delta_e)$$
$$= - \sin \alpha \sin (\xi - \delta_e).$$

Der Hauptschnitt des zweiten Krystalls bilde mit dem des ersten Nicols den Winkel β; jeder der beiden Strahlen gibt dann Anlafs zu einem ordentlichen und einem aufserordentlichen Strahl, die wir mit y_{oo}, y_{eo}, y_{oe}, y_{ee} hezeichnen wollen. Die Polarisationsebene des ersten dieser Strahlen $H_2 H_2$ bildet mit y_o, aus welchem er entstanden ist, den Winkel $\beta - \alpha$. Die Polarisationsebene des zweiten ordentlichen Strahles y_{eo} bildet mit derjenigen des Strahles y_e, aus welchem er entstanden ist, den Winkel $\alpha + 90^0 - \beta$. Die Polarisationsebene $S_2 S_2$ des ersten aus y_o entstandenen aufserordentlichen Strahles y_{oe} bildet mit $H_1 H_1$ den Winkel $\beta + 90^0 - \alpha$, und die des zweiten aufserordentlichen Strahles y_{ee} mit der von y_e den Winkel $\beta + 90^0 - \alpha - 90^0 = \beta - \alpha$. Nennen wir die Verschiebung der Phase der ordentlichen Strahlen im zweiten Krystall δ_o', die der aufserordentlichen Strahlen δ_e', so werden die Gleichungen derselhen nach dem Austritt aus dem zweiten Krystalle

$$y_{oo} = \cos (\beta - \alpha) \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin (\xi - (\delta_o + \delta_o'))$$

$$y_{eo} = - \cos(\alpha + 90^0 - \beta) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_e + \delta'_o)) =$$
$$- \sin(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_e + \delta'_o))$$
$$y_{oe} = \cos(\beta + 90^0 - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_o + \delta'_e)) =$$
$$- \sin(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_o + \delta_e))$$
$$y_{ee} = - \cos(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_e + \delta'_e)).$$

Bildet die Polarisationsebene des zweiten Nicols N_2N_2 mit der des ersten den Winkel ψ, so bildet die Polarisationsebene der ordentlichen Strahlen H_2H_2 mit N_2N_2 den Winkel $\psi - \beta$, jene der aufserordentlichen S_2S_2 mit N_2N_2 den Winkel $\beta + 90^0 - \psi$. Die vier der Polarisationsebene des zweiten Nicols parallelen Komponenten werden dann

$$y_{oo} = \cos(\psi - \beta) \,.\, \cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_o + \delta'_o))$$
$$y_{eo} = - \cos(\psi - \beta) \,.\, \sin(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_e + \delta'_o))$$
$$y_{oe} = - \sin(\psi - \beta) \,.\, \sin(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \sin(\xi - (\delta_o + \delta'_e))$$
$$y_{ee} = - \sin(\psi - \beta) \,.\, \cos(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \sin(\xi - (\delta_e + \delta'_e)).$$

Die Gleichung des resultierenden Strahles wird, da diese vier Strahlen dieselbe Polarisationsebene haben,

$$Y = y_{oo} + y_{eo} + y_{oe} + y_{ee}.$$

Um die resultierende Amplitude berechnen zu können, zerlegen wir jeden Strahl in zwei, deren erster die Phase ξ hat, deren zweiter gegen den ersten um eine viertel Wellenlänge verschoben ist, indem wir schreiben

$$y_{oo} = \cos(\psi - \beta) \cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos(\delta_o + \delta'_o) \,.\, \sin\xi$$
$$- \cos(\psi - \beta) \,.\, \cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\delta_o + \delta'_o) \,.\, \cos\xi$$

und ebenso für die übrigen drei Strahlen. Indem wir die je vier Strahlen gleicher Phasen direkt summieren, wird

$$Y = [\cos(\psi - \beta) \{ \cos(\beta - \alpha) . \cos\alpha . \cos(\delta_o + \delta'_o) - \sin(\beta - \alpha) . \sin\alpha \cos(\delta_e + \delta'_o) \}$$
$$- \sin(\psi - \beta) \{ \sin(\beta - \alpha) \cos\alpha . \cos(\delta_o + \delta'_e) + \cos(\beta - \alpha) . \sin\alpha \cos(\delta_e + \delta'_e) \}] \sin\xi$$
$$- [\cos(\psi - \beta) \{ (\beta - \alpha) . \cos\alpha . \sin(\delta_o + \delta'_o) - \sin(\beta - \alpha) \sin\alpha . \sin(\delta_e + \delta'_o) \}$$
$$- \sin(\psi - \beta) \{ (\beta - \alpha) \cos\alpha . \sin(\delta_o + \delta'_e) + \cos(\beta - \alpha) . \sin\alpha . \sin(\delta_e + \delta'_e) \}] . \cos\xi.$$

Die mit den eckigen Klammern umschlossenen Glieder dieser Ausdrücke bedenten dio Amplituden der beiden um eine viertel Wellenlänge von einander verschiedenen Strahlen; bezeichnen wir dieselben mit A und B, so ist nach den Interferenzgesetzen die resultierende Intensität

$$R^2 = A^2 + B^2.$$

Führt man diese Rechnungen durch, so erhält man nach allerdings ziemlich weitläufigen, jedoch keineswegs schwer zu übersehenden Rednktionen für die resnltierende Intensität folgenden Ausdruck:

$$R^2 = \cos^2\psi + \cos 2(\psi-\beta)\sin 2\alpha \,.\, \sin 2(\beta-\alpha)\,.\,\sin^2\frac{\delta_e-\delta_o}{2}$$
$$+ \sin 2(\psi-\beta)\cos 2\alpha\,.\,\sin 2(\beta-\alpha)\,.\,\sin^2\frac{\delta'_e-\delta'_o}{2}$$
$$+ \sin 2(\psi-\beta)\sin 2\alpha\,.\,\cos^2(\beta-\alpha)\,.\,\cos^2\frac{(\delta_e-\delta_o)+(\delta'_e-\delta'_o)}{2}$$
$$- \sin 2(\psi-\beta)\sin 2\alpha\,.\,\sin^2(\beta-\alpha)\,.\,\sin^2\frac{(\delta_e-\delta_o)-(\delta'_e-\delta'_o)}{2},$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, dafs die resultierende Intensität abhängig ist von der gegenseitigen Lage der Hauptschnitte und der Polarisationsebenen der Nicols. Im allgemeinen treten, wie man sieht, vier Kurvensysteme auf, jedes derselben ist durch eins der vier letzten Glieder repräsentiert; das erste dieser Glieder gibt das Kurvensystem, wie es durch die in der ersten Platte erlangte Phasendifferenz der beiden Strahlen erzeugt wird; um dasselbe vollständig zu bestimmen haben wir nur für $\delta_e - \delta_o$ den für eine Platte bestimmten Wert von $2\pi\frac{\varDelta}{\lambda}$, wie wir ihn vorhin ableiteten, einzusetzen. Das zweite Glied gibt die Kurven, wie sie die zweite Platte allein erzeugt, das dritte gibt ein Kurvensystem, welches von der Summe der in beiden Platten erzeugten Phasendifferenz abhängt, und das letzte Glied die Kurven, welche durch die Differenz der durch die beiden Platten hervorgebrachten Phasendifferenz entsteht. Stehen die beiden Hauptschnitte auf einander senkrecht, ist also $\beta - \alpha = 90^0$, so verschwinden die drei ersten dieser vier Glieder, da $\sin 2(\beta-\alpha)$ und $\cos(\beta-\alpha)$ gleich null sind, und die resultierende Intensität wird

$$R^2 = \cos^2\psi - \sin 2(\alpha-\psi)\sin 2\alpha \sin^2\frac{(\delta_e-\delta_o)-(\delta'_e-\delta'_o)}{\lambda},$$

der Ausdruck wird also ganz derselbe wie für eine Platte, nur dafs der Wert von $\varDelta$ ein anderer wird, er wird, wenn wir $\varDelta_1$ den von der ersten, $\varDelta_2$ den von der zweiten Platte herrührenden Phasenunterschied nennen, einfach $\varDelta_1 - \varDelta_2$.

Wir können demnach leicht das Kurvensystem erhalten, welches zwei gekreuzte Platten von gleicher Dicke liefern, welche parallel der Axe geschnitten sind. Wir könnten die Phasendifferenz direkt ableiten, wie wir es im vorigen Paragraphen für eine Platte gethan haben; am bequemsten denken wir uns aber die Platten soweit von einander entfernt, dafs alle bei einer einzelnen Platte vorkommenden Phasenverschiebungen auch hier zustande kommen.

Wir betrachten einen Strahl, dessen Einfallswinkel i ist, dessen Einfallsebene mit dem Hauptschnitt des ersten Krystalles den Winkel χ bildet. Die beiden den ersten Krystall verlassenden Strahlen haben die vorhin abgeleitete Phasendifferenz

$$\varDelta_1 = d\left\{\frac{1}{\omega}\sqrt{1-\omega^2\sin^2 i} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\sin^2 i\,(\varepsilon^2\sin^2\chi + \omega^2\cos^2\chi)}\right\}.$$

Nach dem Durchtritt durch den ersten Krystall sind beide Strahlen der Richtung, welche sie vor dem Eintritt in den ersten Krystall hatten,

parallel, für den zweiten Krystall sind somit Einfallswinkel und Einfallsebene dieselbe. Da der Hauptschnitt des zweiten Krystalls zu demjenigen des ersten Krystalls senkrecht ist, so wird der im ersten Krystall aufserordentlich gebrochene Strahl jetzt ordentlich gebrochen, der im ersten ordentlich gebrochene jetzt aufserordentlich gebrochen; der Winkel, den die Einfallsebene mit dem Hauptschnitt des zweiten Krystalles bildet, ist $90 + \chi$ oder $90 - \chi$. Die Phasendifferenz Δ_2, welche die beiden Strahlen im zweiten Krystall erhalten, ist dieselbe, welche die beiden Strahlen erhalten, welche aus einem, den eintretenden parallelen in den Krystall eintretenden Strahl entstehen. Dafs die beiden Strahlen den Krystall nicht in demselben Punkte treffen, hat auf die Phasendifferenz keinen Einflufs, da die Phasendifferenz nach den frühern Entwicklungen nur von i und χ abhängt. Deshalb ist

$$\Delta_2 = d\left\{\frac{1}{\omega}\sqrt{1-\omega^2\sin^2 i} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\sin^2 i(\varepsilon^2\sin^2(\chi+90)+\omega^2\cos^2(\chi+90))}\right\},$$

somit da

$$\sin(\chi+90) = \sin(90-\chi) = \cos\chi; \quad \cos(\chi+90) = -\sin\chi$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{d}{\varepsilon}\left\{\sqrt{1-\sin^2 i(\varepsilon^2\cos^2\chi+\omega^2\sin^2\chi)} - \sqrt{1-\sin^2 i(\varepsilon^2\sin^2\chi+\omega^2\cos^2\chi)}\right\}.$$

Ziehen wir die Wurzeln aus, indem wir wie vorhin schon $\sin^4 i$ aufser acht lassen, so wird

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = d\,\frac{\varepsilon^2-\omega^2}{2\varepsilon}\sin^2 i\,(\sin^2\chi - \cos^2\chi),$$

oder wenn wir wie im vorigen Paragraphen $\sin i$, $\sin\chi$, $\cos\chi$ durch x, y, D ausdrücken,

$$\Delta = d\,\frac{\varepsilon^2-\omega^2}{2\varepsilon}\,\frac{y^2-x^2}{D^2}$$

$$D^2\,\frac{2\varepsilon\Delta}{(\varepsilon^2-\omega^2)\,d} = y^2 - x^2.$$

Die Kurven sind gleichseitige Hyperbeln, deren Axen in die Richtung der Axen der gekreuzten Platten fallen, deren Asymptoten mit den Axen einen Winkel von 45° bilden, die Hyperbeln liegen also wie bei einer Platte. Da für $x = 0$, $y = 0$ auch $\Delta = 0$, so treten die Hyperbeln auch im weifsen Lichte immer auf, welches auch die Dicke der Platte ist. Da die Phasendifferenz für gleiche Werte von x und y indes mit der Dicke der Platten zunimmt, so rücken sich die Kurven um so näher, je dicker die Platten sind.

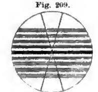
Das Auftreten der farbigen Hyperbeln bei gekreuzten Platten macht dieselben sehr geeignet die geringsten Spuren polarisierten Lichtes zu erkennen. Bringt man ein paar solcher Platten vor einem Nicol so an, dafs die Polarisationsebene des Nicols mit den Axen einen Winkel von 45° bringt, und sieht gegen eine Lichtquelle hin, so erscheinen die Hyperbeln, sobald nur eine geringe Menge polarisierten Lichtes in dem von der Quelle ausgehenden Lichte vorhanden ist. Das von der Lichtquelle ausgehende nicht polarisierte Licht beleuchtet das Gesichtsfeld mit gleichmäfsiger Helligkeit, und der polarisierte Anteil erzeugt auf diesem gleichmäfsig beleuchteten Grunde die farbigen Hyperbeln. Dreht man den Nicol mit den gekreuzten Platten vor dem Auge, bis das Asymptotenkreuz dunkel erscheint, so ist

die Polarisationsebene des in die Platten eindringenden Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene des Nicols.

Noch empfindlicher als zwei gekreuzte Platten, welche parallel den Axen geschnitten sind, sind zwei solcher Platten, welche unter einem Winkel von 45° gegen die Axen geschnitten sind, und welche ebenfalls so gelegt sind, dafs die Axenebenen mit der Polarisationsebene des analysierenden Nicols Winkel von 45° bilden. Ein paar solcher Platten mit einem Nicol oder einer Turmalinplatte verbunden bilden das Savartsche Polariskop[1]).

Ein solches Polariskop zeigt, wenn die Polarisationsebene des eindringenden Lichtes senkrecht zu derjenigen des Nicols oder der Turmalinplatte ist, einen centralen schwarzen und mit demselben parallel eine Anzahl farbiger Streifen, wie Fig. 209 andeutet, im homogenen Licht erscheinen parallele helle und dunkle Streifen. Ist die Polarisationsebene des eintretenden Lichtes derjenigen des Nicols parallel, so wird der centrale Streifen hell und die farbigen Streifen sind denen bei gekreuzten Polarisationsebenen komplementär gefärbt. In vier Lagen, nämlich wenn die Polarisationsebene des eindringenden Lichtes einer der Axenebenen parallel sind, verschwinden die Streifen.

Fig. 209.



Savart benutzte zu seinem Polariskop Bergkrystallplatten, welche etwa 4 bis 5^{mm} dick waren, bei gröfserer Dicke werden die Streifen für die Betrachtung mit blofsem Auge zu fein; Kalkspatplatten dürfen wegen des viel erheblichern Unterschiedes der beiden Brechungsexponenten nicht eine solche Dicke haben, schon bei einer Dicke von 3^{mm} bedarf es zur Beobachtung derselben einer Vergröfserung.

Die grofse Empfindlichkeit des Savartschen Polariskops hat Wild[2]) zur Verwendung desselben in der Photometrie veranlafst. Treffen auf das Polariskop zwei Strahlenbündel, von denen das eine senkrecht zur Ebene des Nicols polarisiert ist, das andere parallel derselben, so gibt das erste das Streifensystem mit dem schwarzen centralen Streifen, das zweite dem ersten komplementäre mit dem hellen Centralstreifen. Haben beide Strahlenbündel genau die gleiche Intensität, so sind gar keine Streifen sichtbar, da dann die beiden komplementären Streifensysteme genau gleiche Helligkeit haben, sich also überall zu derselben Helligkeit summieren. So wie aber das eine Bündel eine nur sehr wenig gröfsere Helligkeit hat, sind sofort die Streifen sichtbar.

In welcher Weise Wild diesen Satz zur Konstruktion seines Photometers benutzt, zeigt das Schema Fig. 210. AB und BC sind zwei unmittelbar neben einander liegende Öffnungen in der, das die folgenden Teile enthaltende Rohr, abschliefsenden Endplatte, welche in einer zu dem Hauptschnitte des Kalkspatrhomboeders $RR'R'R'$ senkrechten Geraden zusammenstofsen. Das durch dieselben eindringende Licht passiert zunächst ein polarisierendes Prisma, Nicolsches oder Foucaultsches, das um die Axe des

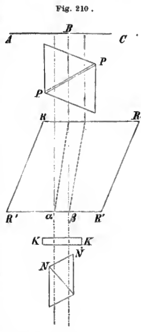
---

[1]) *Savart*, Poggend. Annal. Bd. XLIX. p. 292. Die Gleichungen für die gekreuzten Platten, welche unter einem Winkel von 45° gegen die Axe geschnitten sind, gibt *Müller*, Poggend. Annal. Bd. XXXV. p. 261 ff.

[2]) *Wild*, Poggend. Annal. Bd. CXVIII.

Apparates gedreht werden kann. Das Licht tritt dann in ein nicht zu kurzes Kalkspatrhomboeder; jedes der durch die beiden Öffnungen eindringenden Lichtbündel wird doppelt gebrochen, und es treten jedenfalls innerhalb des Raumes $\alpha\beta$ aus dem Rhomboeder Strahlen von AB, welche ordentlich gebrochen sind und solche von BC, welche aufserordentlich gebrochen sind. Die in $\alpha\beta$ sich überdeckenden Strahlen, welche notwendigerweise gleich grofsen Streifen der beiden Öffnungen entsprechen, und welche senkrecht zu einander polarisiert sind, pflanzen sich als ein gemeinschaftliches Strahlenbündel fort und durchsetzen dann das aus der Doppelplatte KK und dem Nicol NN bestehende Savartsche Polariskop. Auf die Betrachtung dieses Strahlenbündels beschränkt sich die Beobachtung. Sei die Intensität des durch AB eindringenden Lichtes J_1, durch BC gleich J_2. Im Polarisator PP werden beide polarisiert, die Intensität beider wird dadurch gleichmäfsig geschwächt auf pJ_1 und pJ_2. Bildet die Polarisationsebene des Polarisators mit dem Hauptschnitt des Kalkspatrhomboeders den Winkel α, ist k_1 die Schwächung, welche der ordentliche Strahl durch die verschiedenen Brechungen erfährt, so wird die Intensität des ordentlichen Strahles nach dem Durchtritt durch den Kalkspat $pk_1J_1\cos^2\alpha$. Bedeutet k_2 den Schwächungskoefficienten des aufserordentlichen Strahles, so wird dessen Intensität $pk_2J_2\sin^2\alpha$. Die beiden Bündel treten in das Polariskop; sind dieselben von genau gleicher Intensität, so verschwinden in dem Polariskop, soweit eben die beiden Bündel sich überdecken, die Streifen. Aus dem Verschwinden der Streifen folgt somit

Fig. 210.



$$pk_1J_1\cos^2\alpha = pk_2J_2\sin^2\alpha$$

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{k_2}{k_1}\operatorname{tang}^2\alpha.$$

Welches auch das Verhältnis der Intensitäten sein mag, es läfst sich durch Drehung des Polarisators PP immer das Verschwinden der Streifen bewirken, also ein Winkel α finden, der obiger Gleichung genügt. Um das Intensitätsverhältnis zu bestimmen, mufs das Verhältnis der Schwächungskoefficienten bekannt sein. Wild erhielt dasselbe, indem er das Photometer auf eine gleichmäfsig beleuchtete weifse Fläche richtete, so dafs jedenfalls J_1 und J_2 einander gleich waren. Wäre $k_2 = k_1$, so hätte sich in dem Falle $\alpha = 45^0$ finden müssen, Wild fand dagegen $\alpha = 44^0\,36'$, somit

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 44^0\,36'} = 1{,}028\,3.$$

Es folgt somit, dafs das Malussche Gesetz, nach welchem der ordent-

liche und aufserordentliche Strahl, wenn J die Intensität eines in den Kalkspat eintretenden Strahles ist, $J \cos^2 \alpha$ und $J \sin^2 \alpha$ sein sollen, nicht strenge richtig ist.

Wild gibt an, dafs bei sorgsamer Beobachtung und mittlerer Helligkeit und, wenn die beiden Helligkeiten näher oder nicht weiter als 1 : 3 verschieden sind, eine Einstellung des zum Verschwinden der Streifen erforderlichen Winkels α bis auf 1—2 Minuten Unsicherheit sich erreichen läfst. Die dadurch in dem Verhältnis der beiden Helligkeiten entstehende Unsicherheit beträgt nur etwa 0,002, so dafs man mit diesem Photometer die gröfste Genauigkeit bei Lichtmessungen erhalten könnte, eine erheblich gröfsere als mit den übrigen Photometern.

Auf die mechanische Einrichtung des Apparates, auf die Vorrichtung, welche Wild anwandte, um die beiden Bündel Licht, welche verglichen werden sollen, unmittelbar neben einander in den Apparat zu bringen, gehen wir hier nicht ein, wir verweisen deswegen auf die Abhandlung Wilds.

§ 105.

Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen. Wenn man ein dünnes Blättchen oder eine dickere Platte aus einem zweiaxigen Krystalle geschnitten zwischen die beiden Nicols eines Polarisationsapparates bringt, so müssen aus denselben Gründen, wie bei den einaxigen Krystallen, die beiden Strahlen, in welche ein in den Krystall eintretender Strahl zerfällt, nach dem Durchtritte interferieren und so in parallelem Licht Farben, in konvergentem farbige Kurven erzeugen. Die Erscheinungen werden jedoch, wegen der verwickelteren Brechungsgesetze etwas komplicierter sein. Ist bei Anwendung von parallelem Licht die Dicke des Blättchens überall dieselbe, so wird die Phasendifferenz der durchtretenden Strahlen überall dieselbe sein, das Blättchen also im homogenen Lichte überall gleich hell, im weifsen überall mit derselben Farbe erscheinen. Die Farbe des Blättchens wird bei gleicher Dicke eine andere sein müssen, wenn die Doppelbrechung sich ändert, deshalb wird bei Blättchen desselben Krystalles die Farbe sich mit der Richtung ändern, mit welcher parallel das Blättchen aus dem Krystall geschnitten ist. Ist das Blättchen senkrecht zu einer der optischen Axen geschnitten, so wird das Gesichtsfeld bei gekreuzten Nicols dunkel erscheinen, neigen wir die Richtung, nach welcher das Blättchen geschnitten ist, indem wir es aber immer senkrecht zur Ebene der optischen Axe lassen, so nimmt die Phasendifferenz zu, bis es parallel der ersten oder zweiten Mittellinie geschnitten ist, indem dann die Schwingungen der gröfsern und mittlern oder der kleinern und mittlern Elasticitätsaxe parallel sind. Noch mehr nimmt die Phasendifferenz zu, wenn die Richtung, nach welcher das Blättchen geschnitten ist, gegen die Ebene der optischen Axen geneigt wird, sie wird am gröfsten, wenn das Blättchen der Ebene der optischen Axen parallel geschnitten wird, da dann die Schwingungen der gröfsten und kleinsten Elasticitätsaxe parallel werden. Die Blättchen würden daher, wenn sie nach diesen verschiedenen Richtungen geschnitten werden, die Farben der Newtonschen Skala (§ 67) zeigen und das mit der Ebene der optischen Axen parallel geschnittene wird am weitesten vom Schwarz der ersten Ordnung entfernt sein.

Die Änderung der Farbe mit der Dicke der Blättchen folgt denselben Gesetzen wie bei den einaxigen Krystallen.

Dasselbe gilt von den Änderungen der Erscheinung, wenn das Blättchen in seiner Ebene gedreht wird, es zeigt sich keine Änderung in der Farbe, sondern nur in der Intensität derselben. Am hellsten erscheint auch hier die Färbung, wenn die beiden Polarisationsebenen des Blättchens mit denen der Nicols Winkel von 45° einschliefsen, da dann die beiden Komponenten, in welche das einfallende Licht zerlegt wird, gleiche Intensität haben, die Strahlen also, welche schliefslich die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge haben, ganz ausgelöscht werden.

Bei unveränderter Stellung des Blättchens geht auch hier und aus denselben Gründen bei einer Drehung des obern Nicols aus der gekreuzten in die parallele Stellung die Farbe durch Weifs in die komplementäre über.

Am besten wendet man zur Untersuchung dieser Erscheinungen von den zweiaxigen Krystallen den Glimmer oder Gips an, da diese von allen am vollkommensten spaltbar sind und in den feinsten Blättchen erhalten werden können. Die Spaltungsebene im Glimmer ist zur Ebene der optischen Axen senkrecht, parallel dem durch die mittlere und gröfste Axe der Elasticität gelegten Hauptschnitte der Elasticitätsfläche.

Der Gips ist parallel der Ebene der optischen Axen, also in der Ebene der gröfsten und kleinsten Elasticitätsaxe vollkommen spaltbar. Ein Gipsblättchen von $0^{mm},027$ Dicke zeigt das Weifs der ersten Ordnung bei gekreuzten Nicols, bei $0^{mm},044$ das Rot derselben Ordnung; bei einer Dicke von $0^{mm},05 - 0,116$ zeigt es nach und nach die Farben der zweiten, bis 0,18 die der dritten Ordnung, bei einer Dicke schliefslich von $0^{mm},395$ erscheint es farblos, in einem aus allen Farben zusammengesetzten Weifs. Schleift man daher ein Gipsblättchen keilförmig, so dafs es an dem einen Ende eine Dicke von $0^{mm},027$, an dem andern von $0^{mm},395$ hat, so zeigt es neben einander die Farbenstreifen der verschiedenen Ordnungen, wie man sie in den Newtonschen Ringen sieht. Ein Glimmerblättchen erscheint gefärbt, so lange es weniger als $0^{mm},658$ dick ist[1]).

Da man Glimmerblättchen mit grofser Leichtigkeit beliebig dünn erhalten kann, so sind sie sehr geeignet, um cirkular oder elliptisch polarisiertes Licht herzustellen, indem man die Dicke des Blättchens so wählt, dafs die Phasendifferenz der beiden senkrecht zu einander polarisierten Strahlen eine viertel Wellenlänge wird. Bilden dann die Polarisationsebenen des Glimmerblättchens mit denen der Nicols Winkel von 45°, so dafs die beiden Strahlen in demselben von gleicher Intensität sind, so sind nach dem Frühern die Bedingungen der Cirkularpolarisation, zwei senkrecht zu einander polarisierte Strahlen gleicher Intensität mit der Phasendifferenz von ¼ Undulation, erfüllt. Durch eine Drehung des Glimmerblättchens in seiner Ebene geht das cirkular polarisierte Licht in elliptisch polarisiertes und dieses wieder in linear polarisiertes Licht über, wenn man das Blättchen um 45° gedreht hat, so dafs keine Doppelbrechung eintritt.

Bringt man ein cirkular polarisierendes Blättchen zwischen die Nicols, so tritt bei Drehung des obern Nicols gar keine Änderung in der Helligkeit

[1]) *Arago*, Mémoires de l'Institut de France. T. XII. 1811. *Fresnel*, Poggend. Annal. Bd. XII. p. 366. Annales de chim. et de phys. T. XVII.

des Gesichtsfeldes ein, das Licht verhält sich also in dieser Beziehung wie unpolarisiertes natürliches Licht. Man hat jedoch in den bereits beschriebenen Ringerscheinungen ein sehr bequemes Mittel, um das cirkular polarisierte Licht vom natürlichen zu unterscheiden. Läfst man natürliches Licht auf eine Krystallplatte fallen, welche eins der beschriebenen Ringsysteme zeigt, so sind dieselben nicht wahrzunehmen, läfst man cirkular oder elliptisch polarisiertes Licht auffallen, so erscheinen sie, aber mit gewissen charakteristischen Modifikationen[1]), welche wir zum Teil im nächsten Paragraphen besprechen werden.

Die Cirkularpolarisation kann sich der Natur der Sache nach immer nur auf Licht bestimmter Farbe erstrecken.

Will man weifses Licht cirkular polarisieren, also die Erscheinungen der Ringe bei der Cirkularpolarisation im weifsen Lichte untersuchen, so wendet man am besten ein Glimmerblättchen an, welches dem gelben Licht vollständig cirkulare Polarisation erteilt, den Strahlen dieser Farbe also eine Phasendifferenz von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge erteilt, da dann die übrigen Lichtarten am wenigsten von der cirkularen Polarisation abweichen. Ein solches Blättchen zeigt zwischen gekreuzten Nicols das Weifs der ersten Ordnung.

Wendet man anstatt parallelen konvergentes Licht an, so dafs die Phasendifferenz der unter verschiedener Neigung in das Auge dringenden Strahlen verschieden ist, so ist das Gesichtsfeld nicht mehr überall gleich hell, sondern es zeigen sich auch hier, im homogenen Licht, helle und dunkle Kurven. Im allgemeinen sind die Erscheinungen von denen in einaxigen Krystallen nicht sehr verschieden; so zeigen sich auch Hyperbeln, wenn die Platten parallel der Ebene der optischen Axen geschnitten sind, wie bei den einaxigen Krystallen, wenn dieselben parallel der optischen Axe geschnitten sind.

Besonders ist über die Ringerscheinungen zu bemerken nur für den Fall, wenn die Platten senkrecht zur ersten Mittellinie, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbiert, geschnitten sind.

Ist der Winkel der optischen Axen, wie beim Salpeter, Topas, Baryt, Zucker, klein genug, um bei Polarisationsapparaten mit grofsem Gesichtsfelde, wie dem Nörrembergschen, diejenigen Strahlen, welche in der Richtung der Axen durch die Platte hindurchgehen, nach ihrem Austritte zugleich zu übersehen, so sieht man um die Punkte, von denen die parallel den Axen hindurchgetretenen Strahlen ausgehen, helle und dunkle Ringe, welche nahezu (Fig. 211) die Form von Lemniscaten haben[2]). Diese Kurven sind geometrisch definiert durch die Eigenschaft, dafs das Produkt der von den beiden Polen c und c' zu irgend einem Punkte m der Kurve gezogenen Leitstrahlen eine konstante Gröfse ist, wo auch der Punkt m auf der Kurve liegt. Der Wert dieser konstanten Gröfse ändert sich von einer Kurve zur andern; er ist ein anderer für die Kurve α, ein anderer für β oder γ. Diese Kurven können sowohl in der Form eines Ovals beide Pole umgeben, als auch sich in zwei Ovale zusammenziehen, deren jedes einen Pol umgibt, α, α'.

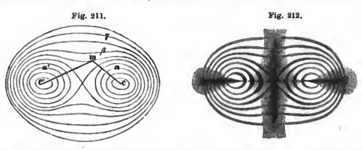
---

[1]) *Dove*, Farbenlehre. Versuche über Cirkularpolarisation. p. 244 ff. Berlin 1853. *Airy*, Poggend. Annal. Bd. XXIII.

[2]) *Herschel*, Philosophical Transactions for the year 1820. On Light. art. 902 ff. *Zech*, Poggend. Annal. Bd. XCVII und Bd CII.

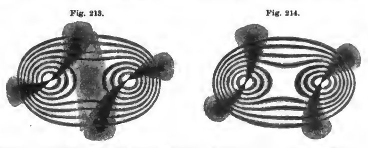
Man sieht um jeden Pol der Krystallplatte zunächst eine Anzahl heller und dunkler Ovale, von denen das folgende immer gröfser ist, weiterhin berühren sich die beiden Ovale, so dafs beide Kurven die Form einer 8 er-

Fig. 211. Fig. 212.



halten, und noch weiter vereinigen sich beide Ovale zu einem einzigen, welches beide Pole umgibt (Fig. 212). Bei gekreuzten Nicols ist dieses Ringsystem von schwarzen, bei parallelen von hellen Büscheln durchschnitten. Fällt die durch die beiden Pole gelegte Richtung, also die Ebene der optischen Axen mit der Polarisationsebene des einen Nicols zusammen, so bilden die

Fig. 213. Fig. 214.



Büschel ein einfaches geradliniges Kreuz wie Fig. 212, dessen Arme den Polarisationsebenen der beiden Nicols parallel sind. Dreht man den obern Nicol aus der gekreuzten in die parallele Lage, so geht das schwarze Kreuz in ein weifses über, während die vorher hellen Ringe dunkel, die dunklen hell werden.

Fig. 215.

Dreht man bei unveränderter Stellung der Nicols die Platte in ihrer Ebene, so bleibt die Gestalt der Ringe ganz ungeändert, sie drehen sich nur einfach mit der Platte, die schwarzen Büschel dagegen ändern ihre Gestalt; anstatt ein geradliniges Kreuz bilden sie jetzt Hyperbeln, welche aber stets durch die Pole gehen. Fig. 213 zeigt sie, wie man sie sieht, wenn die Platte nur sehr wenig aus der ersten Lage gedreht ist, Fig. 214 nach einer Drehung von ungefähr $22\frac{1}{2}^{0}$, Fig. 215 nach einer Drehung von 45^{0}.

Ist der Axenwinkel der Krystalle zu grofs, so übersieht man nur eins der um die beiden Pole gelegten Ringsysteme.

Das Auftreten der Ringe sowohl als der schwarzen Büschel erklärt sich aus denselben Principien, aus welchen wir die in einaxigen Krystallen beobachteten Erscheinungen ableiteten.

Parallel den optischen Axen geht das Licht ohne Doppelbrechung hindurch, dort kann daher keine Interferenz stattfinden, die Pole erscheinen daher immer dunkel, wenn die Nicols gekreuzt sind. Denken wir uns durch jeden der Pole eine Linie gelegt, so werden alle auf den verschiedenen Punkten dieser Linie austretenden Strahlen doppelt gebrochen sein, und daher einen Unterschied der Phase beim Austritt zeigen, der um so gröfser ist, je weiter man sich von dem Pole entfernt. In einem gewissen Abstande ist die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda$, in einem gröfsern λ, weiter $\frac{3}{2}\lambda$ u. s. f.

Dreht sich die Linie in der Ebene der Platte um den Pol, so können wegen der verschiedenen Doppelbrechung an den verschiedenen Seiten der Axe die Abstände, in welchen die Phasendifferenzen $\frac{1}{2}\lambda$, λ, $\frac{3}{2}\lambda$ werden, auf jener Linie in den verschiedenen Lagen nicht gleich sein. Deshalb müssen die hellen und dunklen Linien von der Kreisform abweichen, und die Rechnung ergibt mit der Beobachtung übereinstimmend, dafs die Ringe annähernd die Form von Lemniscaten annehmen müssen. Die dunklen Büschel rühren von den Strahlen her, welche in dem Krystall nur einfach gebrochen werden. Demnach müssen alle die Punkte dunkel erscheinen, welche so liegen, dafs die Polarisationsebene der an ihnen austretenden Strahlen im Krystall der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes parallel ist.

Fällt z. B. die durch die Pole gelegte Richtung, also die Ebene der optischen Axen mit der untern Polarisationsebene zusammen, so werden alle in dieser und der darauf senkrechten Ebene einfallenden Strahlen nur einfach gebrochen. Denn die in der Ebene der optischen Axen einfallenden Strahlen werden in einem zweiaxigen Krystalle immer in zwei zerlegt, deren Polarisationsebene der Ebene der optischen Axe parallel und zu ihr senkrecht ist; ist demnach der einfallende Strahl der Ebene der optischen Axen parallel polarisiert, so kann keine Doppelbrechung eintreten. Die Einfallsebene der Strahlen, welche den andern Balken des schwarzen Kreuzes bildet, ist die durch die erste Mittellinie und die Axe der mittlern Elasticität gelegte Ebene. Alle Strahlen, welche in einen zweiaxigen Krystall in dieser Ebene eintreten, werden in zwei zerlegt, deren Schwingungen der zweiten Mittellinie parallel oder zu ihr senkrecht sind. Wenn demnach die Schwingungen des eintretenden Lichtes schon zur zweiten Mittellinie senkrecht sind, so kann auch dort keine Doppelbrechung eintreten.

Wird der Krystall gedreht, so liegen die Punkte, in welchen Strahlen austreten, deren Polarisationsebene im Krystall derjenigen des einfallenden Lichtes parallel sind, nicht mehr auf geraden Linien, sondern wie die Rechnung zeigt, auf Hyperbeln, welche aber immer durch die Pole gehen müssen, da die parallel den Axen durch den Krystall tretenden Wellen immer nur einfach gebrochen werden.

Dafs auch hier die schwarzen Büschel immer in die Breite gezogen erscheinen, bedarf nach den Entwicklungen über die Erscheinungen in einaxigen Krystallen keiner besondern Erwähnung.

Die Ringe werden bei Anwendung verschiedenen homogenen Lichtes breiter oder enger; je kleiner die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist, um so näher rücken die Punkte zusammen, bei denen die Phasendifferenz

um eine halbe Wellenlänge zugenommen hat. Bei Anwendung weifsen Lichtes erscheinen deshalb anstatt der hellen nnd dunklen Ringe farhige wie bei den einaxigen Krystallen.

Wären nun, wie es bei den einaxigen Krystallen die Regel ist, die optischen Axen für alle Farben gleich gelegen, so würde die Farbenfolge wie dort mit derjenigen der Newtonschen Ringe übereinstimmen. Ist das nicht der Fall, so zeigen die Ringe andere Farbenfolge. Die verschiedene Lage der optischen Axen läfst sich am besten an der Färbung des ovalen Fleckes erkennen, welcher von dem ersten die Pole umgebenden Ringe eingeschlossen wird. Ist der Winkel, welchen die optischen Axen für rotes Licht bilden, kleiner als derjenige für hlaues Licht, so ist die dem andern Pole zugewandte Seite des ovalen Fleckes rot, die abgewandte blau gefärbt, ist der Winkel der optischen Axen für rotes Licht gröfser, so ist die Färbung umgekehrt. Ersteres ist der Fall für Salpeter, Arragonit, schwefelsauren Baryt, letzteres bei Glimmer, Topas, schwefelsaurer Magnesia.

Der Grund hierfür liegt, wie leicht zu übersehen, darin, dafs der ovale Fleck diejenige Fläche ist, in welcher die Phasendifferenz von 0 am Pole, bis zu λ, in dem ersten dunklen Ringe, zunimmt. Diese Fläche legt sich um den Pol der betreffenden Farbe herum, für eine Farbe, deren Pol der Mittellinie näher liegt, wird sich daher jene Fläche anch der Mittellinie näher befinden, nnd deshalb nach dieser Seite, bei hinlänglicher Verschiedenheit der Axenwinkel, über die anderen Farben hinaus erstrecken; nach aufsen wird sie sich weiter erstrecken für die Farben, deren Axen gröfsere Winkel bilden.

Sehr auffallend ist diese Färbung im Seignette-Salz, wo der Winkel der Axen für rotes Licht 76^0, für violettes dagegen nur 56^0 beträgt. Dort ist der ovale Fleck in ein langgezogenes Spektrum ausgedehnt.

Noch komplicierter werden natürlich die Erscheinungen, wenn die optischen Axen in verschiedenen Ebenen liegen.

Da sich die hellen und dunklen Ringe in jeder Farbe um die Pole dieser Farbe legen, so erkennt man leicht, dafs auch in den Ringen die Farbenfolge bei verschiedenem Axenwinkel anders werden mufs; es würde hier zu weit führen die verschiedenen Modifikationen zu betrachten[1]).

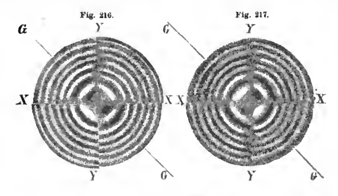
§ 106.

Bestimmung optischer Konstanten, Messung der Axenwinkel. Mit Hülfe der in den letzten Paragraphen beschriebenen Interferenzerscheinungen ist es leicht, den Charakter der Doppelbrechung eines Krystalles anch ohne Kenntnis seiner krystallographischen Beschaffenheit zu bestimmen. Zunächst erkennt man aus dem Charakter der Knrven in senkrecht zur Axe oder der Mittellinie geschnittenen Platten sofort, ob man es mit einem einaxigen oder zweiaxigen Krystalle zu thun hat. Bei den einaxigen Krystallen kann man noch die Frage aufwerfen, oh dieselben optisch positiv oder negativ sind. Es läfst sich das sofort erkennen, wenn man zwischen die Krystallplatte und einen der Nicols ein cirkular polarisierendes Glimmer-

[1]) *Neumann*, Poggend. Annal. Bd. XXXIII. Man sehe auch *Radickes* Optik. Bd. I. Berlin 1839.

blättchen bringt, also entweder auf die Platte cirkular polarisiertes Licht fallen läfst oder das Licht nach dem Durchtritt durch die Platte cirkular polarisiert[1]). Man mufs dazu, wie wir § 105 bemerkten, das Glimmerblättchen so zwischen die Nicols bringen, dafs die Ebene der optischen Axen mit der untern Polarisationsebene einen Winkel von 45° bildet.

Befindet sich ein solches Blättchen zwischen dem ersten Nicol und dem Krystall, so wird das Licht beim Eintritt in das Blättchen in zwei senkrecht zu einander polarisierte Komponenten zerlegt; die Polarisationsebene der ersten ist parallel den Ebenen der optischen Axe, die der zweiten dazu senkrecht. Da die Schwingungen der ersten parallel der mittlern, die der zweiten parallel der kleinsten Elasticitätsaxe geschehen, so pflanzt sich die erstere rascher durch den Krystall fort; die senkrecht zur Ebene der optischen Axen polarisierte Komponente bleibt also um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge hinter der andern zurück. Ist Fig. 216 und Fig. 217 YY die Lage der untern, XX die Lage



der obern Polarisationsebene, GG die Lage der Axenebene des Glimmerblättchens, so zeigt sich in negativen Krystallen anstatt der Kreisringe mit schwarzem Axenkreuz die Fig. 216, im positiven die Fig. 217. Bei den negativen Krystallen sind in den beiden Quadranten, welche die Ebene der optischen Axen des Glimmerblättchens aufnehmen, die Ringe erweitert, in den beiden andern Quadranten verengert, so dafs die einzelnen Ringe in vier getrennte Bögen zerfallen, von denen die in den GG aufnehmenden Quadranten liegenden von der Mitte um eine gewisse Gröfse weiter entfernt sind, die in den beiden andern Quadranten liegenden um ebensoviel der Mitte näher liegen, als es ohne Glimmerblättchen der Fall ist. Das dunkle Kreuz ist verschwunden und statt dessen erscheinen nur mehr zwei dunkle Punkte, welche auf der Linie GG liegen, in der Nähe des Mittelpunktes O. Bei positiven Krystallen ist die Erscheinung nur in sofern anders, als die Fig. 216 um 90° gedreht erscheint; was bei negativen in den die Richtung GG aufnehmenden Quadranten liegt, findet sich bei positiven in den beiden anderen. Kennt man demnach die Lage der Axenebene in dem Glimmerblättchen, so lehrt ein Blick in den Polarisationsapparat sofort den Charakter des in demselben befindlichen einaxigen Krystalles kennen.

[1]) *Dove*, Poggend. Annal. Bd. XL.

Wir können die Erscheinung leicht durch Benutzung der für gekreuzte Platten entwickelten allgemeinen Gleichung ableiten, kommen aber noch kürzer zum Ziel, wenn wir die Rechnung direkt durchführen[1]). Sei deshalb die Gleichung eines an der untern Grenze des Glimmerblättchens ankommenden Strahles

$$y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

so wird derselbe im Glimmerblättchen in zwei zerlegt, deren einer parallel, deren anderer senkrecht zu GG polarisiert ist; bildet GG mit der Polarisationsebene des Nicols den Winkel β, so sind nach dem Durchtritt durch das Blättchen die beiden Komponenten

$$y_o = \cos\beta \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \Delta}{\lambda}\right) = \cos\beta \,.\, \sin\xi,$$

$$y_e = -\sin\beta \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \Delta}{\lambda} - \frac{1}{4}\right),$$

wenn wir mit Δ die Verschiebung der Phase des ordentlichen Strahles bezeichnen; für y_e können wir auch schreiben

$$y_e = \sin\beta \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \Delta}{\lambda}\right) = \sin\beta \,.\, \cos\xi.$$

Jeder dieser beiden Strahlen wird bei dem Durchtritt durch die Krystallplatte wieder in zwei Komponenten zerlegt; betrachten wir einen Hauptschnitt, der mit dem untern Nicol den Winkel α bildet, so werden die vier Komponenten, nachdem sie durch den Nicol, dessen Polarisationsebene mit der des untern den Winkel ψ bilde, wieder in einer Ebene polarisiert sind, wie man ganz analog den Entwicklungen des § 104 für gekreuzte Platten erhält,

$$y_{oo} = \cos(\psi - \alpha) \,.\, \cos(\alpha - \beta) \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\xi - \delta_o)$$
$$y_{eo} = \cos(\psi - \alpha) \,.\, \sin(\alpha - \beta) \,.\, \sin\beta \,.\, \cos(\xi - \delta_o)$$
$$y_{oe} = -\sin(\psi - \alpha) \,.\, \sin(\alpha - \beta) \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\xi - \delta_e)$$
$$y_{ee} = \sin(\psi - \alpha) \,.\, \cos(\alpha - \beta) \,.\, \sin\beta \,.\, \cos(\xi - \delta_e),$$

worin δ_o die Verschiebung der Phase des im Krystall ordentlich gebrochenen, δ_e die des aufserordentlich gebrochenen Strahles bedeutet.

Wir zerlegen jeden Strahl in zwei, deren einer die Phase ξ, deren anderer die Phase $\xi - \frac{1}{2}\pi$ hat und erhalten dann die resultierende Intensität, indem wir die Quadrate der Amplituden der zwei Strahlen addieren. Es wird nicht notwendig sein, die Rechnungen durchzuführen, da sie frühern ähnlichen ganz analog sind, und auch die Reduktionen nicht schwer zu übersehen sind. Die resultierende Intensität wird

$$R = \tfrac{1}{2}\{1 + \cos 2(\psi - \alpha)\cos 2(\alpha - \beta)\cos 2\beta$$
$$- \cos 2\beta \sin 2(\alpha - \beta) \sin 2(\psi - \alpha)\cos(\delta_e - \delta_o)$$
$$- \sin 2\beta \,.\, \sin 2(\psi - \alpha)\sin(\delta_e - \delta_o)\}.$$

[1]) *Airy*, Poggend. Annal. Bd. XXIII.

Um cirkular polarisiertes Licht zu erhalten, müssen wir $\beta = 45^0$ machen; dann wird

$$R = \tfrac{1}{2}\{1 - \sin 2(\psi - \alpha) . \sin(\delta_e - \delta_o)\}$$

und nehmen wir schliefslich an, die beiden Nicols seien gekreuzt, so wird

$$R = \tfrac{1}{2}\{1 - \sin 2\alpha . \sin(\delta_e - \delta_o)\}.$$

Nach § 102 ist für einaxige Krystalle

$$\frac{2\pi\varDelta}{\lambda} = \delta_e - \delta_o = \left(\frac{d}{2\omega}(\varepsilon^2 - \omega^2) . \sin^2 i\right) \cdot \frac{2\pi}{\lambda},$$

worin für negative $\varepsilon > \omega$, für positive $\varepsilon < \omega$ ist, so dafs wir für negative erhalten

$$R = \tfrac{1}{2}\left\{1 - \sin 2\alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2\omega}(\varepsilon^2 - \omega^2)\sin^2 i\right\}$$

und für positive

$$R = \tfrac{1}{2}\left\{1 + \sin 2\alpha . \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2\omega}(\omega^2 - \varepsilon^2)\sin^2 i\right\},$$

worin jetzt die Argumente der Sinus positiv sind.

Ohne Glimmerblättchen war unter diesen Verhältnissen das schwarze Kreuz zu sehen, und überall wo die Phasendifferenz $n\lambda$ war, ein dunkler Ring. Jetzt dagegen ist für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ das zweite Glied gleich null, somit an Stelle des schwarzen ein allerdings schmales helles Kreuz.

Bei negativen Krystallen ist dann zunächst für

$$\varDelta = \frac{d}{2\omega}(\varepsilon^2 - \omega^2)\sin^2 i = \frac{\lambda}{4},$$

$$R = \tfrac{1}{2}(1 - \sin 2\alpha),$$

somit für $\alpha = 45^0$ gleich null, es liegen somit in der Nähe des Mittelpunkts, bei negativen Krystallen in der Richtung der Axenebene des Glimmers von ihm entfernt, zwei schwarze Flecke.

In den die Axenebene des Glimmers aufnehmenden Quadranten liegt der Wert von α zwischen $0^0 - 90^0$ oder zwischen $180^0 - 270^0$, somit 2α zwischen 0 und 180 oder 360 und 540, $\sin 2\alpha$ ist deshalb jedenfalls positiv. Die dunklen Ringe entsprechen also den Werten der Phasendifferenz, welche $\sin 2\pi\frac{\varDelta}{\lambda} = +1$ machen, also

$$\varDelta = \tfrac{5}{4}\lambda, \quad \tfrac{9}{4}\lambda \cdots \frac{4n+1}{4} \cdot \lambda.$$

In diesen Quadranten mufs also an Stelle der dunklen Ringe der Wert von $\varDelta$ um $\frac{1}{4}\lambda$ gröfser sein als ohne Glimmerblatt, die Ringe sind dort weiter von der Mitte entfernt.

In den beiden andern Quadranten ist α zwischen $90^0 - 180^0$ und zwischen $270 - 360^0$, somit $\sin 2\alpha$ jedenfalls negativ; hier treten also die dunklen Ringe dort auf, wo $\sin 2\pi\frac{\varDelta}{\lambda} = -1$, somit wo

$$\varDelta = \tfrac{3}{4}\lambda, \quad \tfrac{7}{4}\lambda \cdots \frac{4n-1}{4} \cdot \lambda,$$

es mufs also der Wert von $\varDelta$ um $\frac{1}{4}\lambda$ kleiner sein als ohne Glimmerblatt,

die Ringe liegen der Mitte um ebensoviel näher, als sie in den beiden andern Quadranten weiter von der Mitte entfernt sind.

Da nun für positive Krystalle das zweite Glied, wenn sin 2α positiv ist, positiv ist, so folgt, dafs bei diesen in den Quadranten 0—90 und 180—270 die Erscheinung so ist, wie bei den negativen in den beiden andern Quadranten und umgekehrt.

Da im übrigen die optischen Verhältnisse sich bei einaxigen Krystallen direkt aus der krystallographischen Beschaffenheit ergeben, sind die einaxigen Krystalle auf diese Weise vollständig bestimmt.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen deshalb, weil sie ein leichtes Mittel an die Hand geben, die Lage der Hauptrichtungen in optischer Beziehung zu erkennen, die aus der krystallographischen Beschaffenheit, wie wir sahen, nicht immer geschlossen werden kann. Beobachtet man in einer Krystallplatte das Lemniscatensystem, so weifs man, dafs die durch die Pole gelegte, zur Ebene der Platte senkrechte Ebene die Ebene der optischen Axen ist. Kann man in einer gegebenen Krystallplatte nur eines der Ringsysteme übersehen, so hat man sie in einer bestimmten Ebene zu drehen, damit das den andern Pol umgebende Ringsystem sichtbar wird; diese Ebene ist die der optischen Axen. Die auf dieser Ebene senkrechte Richtung ist dann die Axe der mittlern Elasticität; die Axen der gröfsten und kleinsten Elasticität sind die beiden Mittellinien der optischen Axen, man erhält dieselbe durch eine Messung der Axenwinkel.

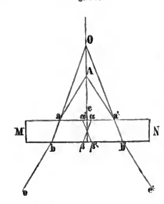
Zur Messung derselben ist der Dovesche Polarisationsapparat recht geeignet[1]); man versieht das zweite Nicolsche Prisma mit einem Okular und Fadenkreuz und ersetzt den Ring k (Fig. 201) durch einen in der Axe eines vertikalen Kreises befestigten Ring. Der Kreis ist geteilt und mit einem Index versehen, welcher die Gröfse der Drehung abzulesen gestattet. Man befestigt die Krystallplatte, so dafs ihre Begrenzungsebenen zur Axe des Instrumentes senkrecht sind, wie wir es bisher immer annahmen, und zugleich, dafs die Ebene der optischen Axen vertikal ist, wenn der geteilte Kreis auf dem Nullpunkte einsteht. Darauf dreht man mit dem Ringe den Krystall um die Axe des Kreises so lange, bis der Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes mit dem einen Pole zusammenfällt, und beobachtet die Stellung des Kreises; dann stellt man ebenso durch Zurückdrehen des Kreises den andern Pol der Ringfigur ein, und hat in dem Winkel, um welchen man den Kreis gedreht hat, den scheinbaren Winkel der optischen Axen, das heifst den Winkel, welchen die Strahlen nach ihrem Austritte aus dem Krystall mit einander bilden, die den Krystall in der Richtung der optischen Axen durchsetzt haben.

Den Winkel der optischen Axen erhält man aus dieser Beobachtung mit Hülfe des mittlern Brechungsexponenten β. Denn ist MN (Fig. 218) die Krystallplatte, $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ die Richtung der optischen Axen, so ist der Winkel aAa' derjenige, welchen man gemessen hat. Die Hälfte dieses

[1]) *Dove*, Poggend. Annal. Bd. XXXV. Farbenlehre. p. 203. II. Aufl. Berlin 1853. Man sehe auch *v. Lang*, Verbesserter Axenwinkel-Apparat. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. LV. *Descloiseaux*, Poggend. Annal. Bd. CXXVI. *Groth*, Poggend. Annal. Bd. CXLIV und Physikalische Mineralogie.

Winkels aAc ist demnach derjenige Winkel, welchen die Strahlen, welche im Krystall in der Richtung der optischen Axe sich fortgepflanzt haben, nach ihrem Austritte mit dem Einfallslote bilden. Da der Brechungsexponent der in der Richtung der optischen Axe sich fortpflanzenden Wellen gleich β ist, so berechnet man nach dem Brechungsgesetze den Winkel aOc, welchen ab mit Ac bildet, und daraus den Winkel der optischen Axen.

Fig. 218.

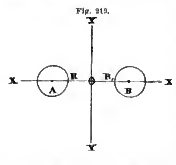


Auf diese Weise ist für die meisten zweiaxigen Krystalle die Richtung der optischen und Elasticitätsaxen, sowie ihre Beziehung zu den krystallographischen Hauptrichtungen festgestellt worden, für welche die sonstigen optischen Konstanten noch nicht bestimmt sind. Kennt man die Richtung dieser, so kann man in der § 96 und 97 angegebenen Weise die sonstigen optischen Konstanten bestimmen.

Man kann weiter mit Hülfe der Interferenzkurven in den zweiaxigen Krystallen erkennen, ob die Krystalle positiv oder negativ sind, das heifst ob nach § 96 die erste Mittellinie die Axe der kleinsten oder die Axe der gröfsten Elasticität ist. Es geschieht das, indem man zwischen die Krystallplatte und den obern Nicol, nahe dem letztern, eine dicke senkrecht zur optischen Axe geschliffene Platte eines einaxigen Krystalles bringt. Gewöhnlich wendet man dazu eine Quarzplatte, also einen positiven Krystall an, in welchem der ordentliche Strahl eine gröfsere Wellenlänge besitzt als der aufserordentliche Strahl.

Nehmen wir an, die Nicols seien gekreuzt und die Platte des zweiaxigen Krystalles so gelegt, dafs man die Fig. 215 sieht; legt man die Quarzplatte senkrecht zur Axe des Polarisationsapparates unter den obern Nicol, so wird dadurch, wenn die Quarzplatte nur dick genug ist, die Erscheinung nicht geändert. Neigt man die Quarzplatte um die Verbindungslinie der beiden Pole der Interferenzerscheinung, also um eine der zweiten Mittellinie parallele Axe, so nähern sich bei negativen Krystallen die der Mitte zugewandten Seiten der Ringe der Mitte der ganzen Erscheinung; bei positiven Krystallen dagegen entfernen sie sich von der Mitte. Um diese Veränderung abzuleiten seien Fig. 219 R und R_1 die ersten Ringe, welche sich um die Axen herumlegen, also jene, für welche die Phasendifferenz eine Wellenlänge beträgt, und betrachten wir etwa den Punkt R_1, in welchem der Ring die Axenebene XX schneidet. Von der Axe B aus, wo die Phasendifferenz null ist, wächst dieselbe allmählich bis λ, welchen Wert sie im ersten Ringe erreicht. Von den beiden Strahlen, deren Interferenz den Ring R_1 bildet, schwingt der eine parallel XX, der andere parallel YY. Nehmen wir an,

Fig. 219.



XX sei die Axe der gröfsten Elasticität, der Krystall also ein positiver, so ist der parallel XX schwingende Strahl dem andern in R um eine Wellenlänge voraus. Liegt die senkrecht zur Krystallaxe geschliffene Quarzplatte parallel der Ebene XY, so treten beide Strahlen nahe parallel der Axe durch die Platte, sie werden also beide in derselben die gleichen Verzögerungen erfahren, die Erscheinungen bleiben ungeändert. Neigen wir die Quarzplatte um XX, so dafs die Axe nicht mehr senkrecht zur Ebene XY ist, sondern mit der Richtung YY einen Winkel α bildet, so bleiben die Schwingungen des Strahles, der parallel XX schwingt, senkrecht zur Axe des Quarzes, der Strahl geht also als ordentlicher durch den Quarz. Der parallel YY schwingende Strahl geht dann als aufserordentlicher durch den Quarz, da seine Schwingungsrichtung mit der Axe einen Winkel α bildet. Da der aufserordentliche Strahl im Quarz stärker verzögert wird als der ordentliche, so bewirkt dieser Durchtritt durch die Quarzplatte, dafs die Phasendifferenz der bei R_1 austretenden Strahlen vergröfsert, oder was dasselbe ist, dafs ein näher bei B den zweiaxigen Krystall verlassendes Strahlenpaar die Phasendifferenz von einer Wellenlänge erhält. Da diejenige Stelle R_1 dunkel erscheint, an der Strahlen austreten, welche beim Eintritt in den obern Nicol die Phasendifferenz von einer Wellenlänge haben, so folgt, dafs in dem Falle die Durchschnitte der Ringe mit der Ebene XX sich von der Mitte entfernen.

Bei negativen Krystallen dagegen, bei denen parallel XX die Axe der kleinsten Elasticität ist, hat der parallel XX schwingende Strahl die Verzögerung von einer Wellenlänge erhalten; da derselbe in der um XX geneigten Quarzplatte eine geringere Verzögerung erhielt als der parallel YY schwingende Strahl, so haben die bei R_1 austretenden Strahlen beim Eintritt in den obern Nicol eine kleinere Phasendifferenz als eine Wellenlänge, oder die Strahlen, deren Phasendifferenz einer Wellenlänge entspricht, treten näher bei O aus. Bei negativen Krystallen mufs also eine Neigung der Krystallplatte um eine XX parallele Axe ein Wachsen der Ringe gegen die Mitte O hin zur Folge haben.

Neigt man die Quarzplatte um YY als Axe, so sind die Änderungen gerade umgekehrt, bei negativen Krystallen tritt ein Zurückweichen, bei positiven ein Wachsen der Ringe gegen die Mitte ein. Es folgt das unmittelbar daraus, dafs dann der parallel XX schwingende Strahl als aufserordentlicher durch die Quarzplatte hindurchgeht, dagegen der parallel YY schwingende Strahl als ordentlicher. Derjenige Strahl, der bei der eben betrachteten Neigung im Quarz zurückbleibt, eilt daher jetzt vor, es müssen somit die Änderungen gerade die entgegengesetzten sein.

Dafs es zu dieser Erkennung des Charakters der Doppelbrechung nicht erforderlich ist, die Axen selbst zu sehen, braucht kaum bemerkt zu werden, es genügt, die Mitte der Erscheinung zu sehen, so weit, dafs man die Axenebene erkennen kann, und Teile der Ringe, welche die Axe umschliefsen.

Auch mit der cirkular polarisierenden Glimmerplatte läfst sich der Charakter der Doppelbrechung zweiaxiger Krystalle erkennen, indem dadurch ganz ähnliche Verschiebungen der Ringstücke eintreten, wie bei einaxigen Krystallen, wir können indes diese Änderungen hier nicht näher besprechen[1]).

[1]) Man sehe *Dove*, Farbenlehre und optische Untersuchungen.

§ 107.

Doppelbrechung in geprefsten und gekühlten Gläsern. Mit Hülfe der Interferenz des polarisierten Lichtes gelang es zuerst Brewster[1]) und Seebeck[2]), den innigen Zusammenhang zwischen der Doppelbrechung und den Elasticitätsverhältnissen der Körper auch an nicht krystallinischen Substanzen nachzuweisen. Brewster fand, dafs in allen Körpern, deren Substanz nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität hat, Interferenzerscheinungen auftreten, wenn man sie im polarisierten Licht betrachtet. Prefst man eine quadratische Glasplatte mit planparallelen Begrenzungsflächen von zwei gegenüberliegenden Punkten ihrer Ränder, *a* und *b* Fig. 220 zusammen, so dafs sie in der Richtung *ab* komprimiert wird, so zeigt sie zwischen gekreuzten Nicols und wenn die Richtung *ab* der Polarisationsebene des einen parallel ist, das schwarze Kreuz und bei schwachem Drucke

Fig. 220.

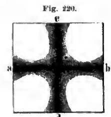
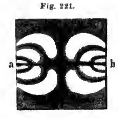


Fig. 221.



in den vier Feldern eine Farbe der ersten Ordnung, wie ein sehr dünnes Krystallblättchen. Steigert man den Druck, so ändert sich die Farbe der Felder, und es bilden sich nach und nach um die Punkte *a* und *b* helle und dunkle, im weifsen Licht farbige Ringe (Fig. 221). Die Ringe haben Ähnlichkeit mit den Kurven der zweiaxigen Krystalle.

In der That treten nach den im ersten Bande besprochenen Gesetzen der Elasticität in einer so komprimierten Platte drei Axen der Elasticität auf, indem die Kompression parallel *ab* eine Ausdehnung parallel *cd* und eine von dieser verschiedene Ausdehnung senkrecht zur Ebene *abcd* zur Folge hat. Diese Kompression und Ausdehnung mufs eine Änderung der Lagerung der Moleküle und mit dieser der Elasticität des Glases nach verschiedenen Richtungen zur Folge haben. Wie Brewsters Versuche zeigen, nimmt die Elasticität des Äthers im Glase an dieser Änderung teil, das Glas wird doppelbrechend.

Das Auftreten und die Änderung der Ringe bei stärkerem Drucke beweist, dafs die Doppelbrechung des Glases mit dem Drucke zunimmt, dafs die Phasendifferenzen der nach derselben Richtung austretenden Strahlen gröfser werden; eine Verstärkung des Druckes bewirkt also dasselbe, was bei Krystallplatten die Anwendung dickerer Platten hervorbringt. Es gelang Dove[3]), den Druck so zu normieren, dafs sich die Glasplatte gerade so ver-

[1]) *Brewster*, Philosophical Transactions for 1815, for 1816. Edinburgh, Transactions vol. VIII.

[2]) *Seebeck*, Schweiggers Journal. Bd. VII.

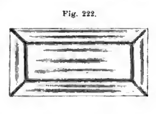
[3]) *Dove*, Farbenlehre. Versuche über Cirkularpolarisation. Berlin 1853. Poggend. Annal. Bd. XXXV.

hält, wie ein dünnes cirkular polarisierendes Glimmerblättchen, dafs das aus den Eckfeldern hervortretende Licht cirkular polarisiert war. Ja, wie Dove zeigte, ist diese Methode zur Erzeugung cirkular polarisierten Lichtes bequemer als das mühsame Abspalten von Glimmerblättchen, da man mit passenden Apparaten die Stärke des Druckes ganz in seiner Hand hat.

Man kann durch die Kompression des Glases Erscheinungen hervorbringen, welche dem Ringsysteme in einaxigen Krystallen mit dem Kreuz ganz analog sind. Man erhält dieselben, wenn man eine konvexe Glaslinse in der Richtung ihrer Axe in ihrer Mitte zusammenprefst, oder wenn man einen massiven Glascylinder mit einem Metalldrahte straff umwindet und dann in der Richtung der Axe hindurchsieht.

Ähnliche Erscheinungen zeigen Glasstücke im Polarisationsapparate, welche ungleichmäfsig erwärmt oder abgekühlt werden[1]). Wenn man z. B. ein parallelepipedisches Glasstück auf eine heifse Metallplatte legt, und so zwischen gekreuzten Nicols aufstellt, so sieht man die Fig. 222, wenn die Polarisationsebenen der Nicols mit der auf der heifsen Metallplatte liegenden Grundfläche Winkel von 45° bilden. Das Gesichtsfeld ist durch dunkle Linien in fünf Felder geteilt, in welchen den dunklen Linien parallel sich farbige Streifen zeigen. Bei fortschreitender Erhitzung ändert sich sowohl die Figur als auch die Anordnung der Farben.

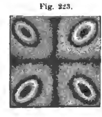
Fig. 222.



Wenn man ein cylindrisches Glasstück vom Umfange aus gleichmäfsig erwärmt, so zeigt es die Ringfigur der einaxigen Krystalle mit dem schwarzen Kreuze, erwärmt man ein ovales Glasstück gleichmäfsig vom Umfange aus, so erhält man beim Durchsehen parallel der Axe die Ringfigur zweiaxiger Krystalle.

Gleiches erhält man beim Abkühlen erhitzten Glases, indem man es z. B. auf eine kalte Metallplatte legt.

Fig. 223.



Man kann den Gläsern die doppelbrechenden Eigenschaften auch bleibend beibringen, indem man geglühte Gläser schnell erkalten läfst. So erhält man z. B. die Erscheinung (Fig. 223), wenn man einen nicht zu stark erhitzten Glaswürfel rasch abkühlt, und ihn so zwischen die Nicols bringt, dafs seine Seiten den Polarisationsebenen derselben parallel sind. Es erscheint ein schwarzes Kreuz und in jedem der vier Felder ein farbiges Ringsystem. Die Figur ändert sich, wenn die Polarisationsebenen gegen die Würfelseiten eine andere Lage annehmen.

Dafs auch in den zuletzt erwähnten Erscheinungen die geänderte Elasticität des Glases, die in der schlechten Wärmeleitung desselben ihren Grund hat, das Bedingende ist, wird in dem folgenden Teile in der Wärmelehre hervortreten[2]).

Die durch künstliche Mittel erzeugte Doppelbrechung unterscheidet sich

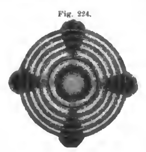
[1]) *Brewster*, Philosophical Transactions for 1814; 1815; 1816.
[2]) Man sehe auch *F. Neumann*, Poggend. Annal. Bd. LIV.

jedoch in einer Beziehung von derjenigen in krystallinischen Mitteln wesentlich, sie ist nicht in jedem Stückchen des Glases, in welchem sie erzeugt ist, dieselbe, sondern haftet an dem bearbeiteten Glasstücke als solchem. Ein Beispiel wird das klarer machen. In einer Doppelspatplatte, welche senkrecht zur Axe geschnitten ist, ist die Axe nur eine Richtung, nicht eine bestimmte Linie; wenn man daher auch eine solche Platte zur Hälfte bedeckt, so zeigt sie immer das ganze Ringsystem; anders in einem künstlich einaxigen Glase, dort ist die Axe eine bestimmte Linie; bedeckt man daher einen Teil der Oberfläche, durch welche das Licht austritt, so verschwindet der entsprechende Teil des Ringsystems[1]).

§ 108.

Erscheinungen in senkrecht zur Axe geschnittenen Bergkrystallplatten; Drehung der Polarisationsebene. Bei den einaxigen Krystallen zeigt sich in senkrecht zur Axe geschnittenen Krystallplatten zwischen gekreuzten Nicols nach § 102 das Ringsystem mit dem dunklen Kreuz; die Mitte des Gesichtsfeldes ist also stets dunkel, welches auch die Dicke der Platte ist. Von diesem Verhalten machen jedoch einige einaxige Krystalle, unter diesen der Quarz eine Ausnahme. Betrachtet man eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte in einem Polarisationsapparate mit grofsem Gesichtsfelde, so erhält man anstatt der Ringfigur (Fig. 203) das in Fig. 224 dargestellte Ringsystem. Die Ringe, welche beim Kalkspat ganz nahe an der dunklen Mitte anfangen, treten hier, wegen des geringern Grades der Doppelbrechung erst in einiger Entfernung von der Mitte auf; das schwarze Kreuz ist verschwunden, statt dessen zeigen sich nur die äufsersten Ringe von schwarzen Büscheln durchzogen, den Resten des Kreuzes, deren Längsrichtung mit der Richtung der Arme des schwarzen Kreuzes zusammenfällt. Bei Anwendung weifsen Lichtes ist die Mitte niemals dunkel, sondern immer, und zwar je nach der Dicke der Platte verschieden gefärbt[2]).

Fig. 224.



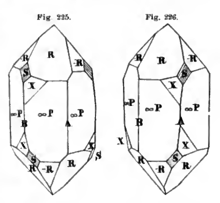
Von da ab, wo die Ringe auftreten, zeigen sie dieselbe Farbenfolge, wie die Ringe in sonstigen Krystallen, so dafs also ein verschiedenes Verhalten der Quarzplatten nur in Bezug auf diejenigen Strahlen sich zeigt, welche nahezu parallel der optischen Axe durch sie hindurchgegangen sind.

Wenn man die Nicols aus der gekreuzten Stellung dreht, so findet man, dafs bei keiner Stellung derselben die Mitte dunkel oder weifs, dafs sie vielmehr stets und zwar je nach dem Winkel, den die Polarisationsebenen der Nicols bilden, verschieden gefärbt erscheint. In Betreff der Reihenfolge, in welcher die Farben bei Quarzplatten gleicher Dicke auftreten, unterscheidet man zwei Arten von Quarzen, rechtsdrehende und linksdrehende. Geht man bei der ersten Art von Krystallen von einer bestimmten Stellung der Nicols aus, so erscheinen die Farben in der Reihen-

[1]) *Brewster* a. a. O.
[2]) *Arago*, Mémoires de l'acad. des sciences. Paris 1811.

folge ihrer Brechbarkeit, wenn man den analysierenden Nicol wie den Zeiger einer Uhr dreht. So erscheint bei einer Quarzplatte von 2^{mm} Dicke bei parallelen Nicols das Gesichtsfeld rötlich gefärbt. Dreht man bei der ersten Art Quarz den Nicol wie den Zeiger einer Uhr, so treten nach und nach gelbliche, grünliche, bläuliche Färbungen auf; bei den Quarzen der zweiten Art tritt dagegen dieselbe Reihenfolge der Farben auf, wenn man den analysierenden Nicol in entgegengesetzter Richtung, also umgekehrt wie den Zeiger einer Uhr dreht. Erstere Art nennt man rechtsdrehende, letztere Art linksdrehende Quarze.

Welche Quarze rechtsdrehende, welche linksdrehende sind, läfst sich schon an den Krystallen unterscheiden, aus denen die Platten geschnitten sind, vorausgesetzt, dafs die charakteristischen Flächen an denselben entwickelt sind[1]). Die Quarze erscheinen gewöhnlich als eine Kombination der sechsseitigen Säule (∞P) Fig. 225 und Fig. 226 und der doppeltsechsseitigen Pyramide. Die doppeltsechsseitige Pyramide ist indes die Kombination zweier Rhomboeder des sogenannten Hauptrhomboeders (R) und seines Gegenrhomboeders ($-R$) Fig. 225 und 226, wie sich schon daran erkennen läfst, dafs diese beiden Rhomboeder in der Regel verschieden stark ausgebildet sind. An dieser Kombination kommen eigentümliche hemiedrische oder genauer tetartoedrische Flächen vor, welche für die Art der Drehung bestimmend sind, es sind die Flächen S und X Fig. 225 und 226. Von diesen ist die Fläche S das sogenannte Trigonoeder $\frac{1}{4}(2P2)$. Die Flächen X sind das Tetartoeder einer doppelt zwölfseitigen Pyramide (mPn); derartige Flächen X können gleichzeitig mehrere verschieden gegen die Axen geneigte auftreten, Tetartoeder verschiedener Pyramiden, entsprechend verschiedenen Werten von m und n.



Diese Flächen S und X treten bei den einfachen Krystallen stets nur an den abwechselnden Säulenkanten auf, und zwar oben und unten, wie Fig. 225 an der Kante B, Fig. 226 an der Kante A; in den nach Fig. 225 gebildeten Krystallen kommen die Flächen nie an A, in 226 nie an B vor. Sind die Flächen X vorhanden, so erkennt man den Charakter der Drehung schon aus der Lage dieser Flächen; da dieselben nämlich schiefe Abstumpfungen der Ecken $R - R \infty P$ bilden, so liegen die Flächen bei jeder Stellung des Krystalles unter R entweder links, Fig. 225, oder rechts, Fig. 226. Diejenigen Krystalle, bei denen die Flächen X links liegen, sind linksdrehende Krystalle, diejenigen, bei denen sie rechts liegen, sind rechtsdrehende Krystalle.

1) *J. F. W. Herschel*, Transactions of the Cambridge Philos. Society. vol. I. On light § 1042.

Die Flächen S sind gerade Abstumpfungen derselben Ecken $R - R \infty P$, deshalb bringt eine Drehung des Krystalles von 60^0 um die Hauptaxe dieselben von der linken Seite des Beschauers zur rechten Seite, ihre Anwesenheit allein genügt deshalb nicht, den Charakter der Drehung zu erkennen. Dagegen zeigen diese Flächen meist Streifungen, welche bei den linksdrehenden Krystallen stets anders verlaufen als bei den rechtsdrehenden. Dieselben sind nämlich stets der Kante ∞PR, die sich bei fehlender Fläche S über derselben ausbilden würde, parallel, gehen also bei linksdrehenden Krystallen (Fig. 225), wenn man die Fläche S zur Linken stellt, von oben links nach unten rechts, bei rechtsdrehenden Krystallen dagegen, Fig. 226, von oben rechts nach unten links.

Diese Flächen sind die am häufigsten vorkommenden und deshalb die am meisten charakteristischen. Aufser den Flächen X unter R, welche Gustav Rose Trapezoeder I. Ordnung nennt, kommen auch zuweilen Flächen von Trapezoedern II. Ordnung unter $- R$ vor. Nennt man die Trapezoeder der I. Ordnung bei rechtsdrehenden Krystallen rechte, bei linksdrehenden linke, und unterscheidet ebenso die Trapezoeder II. Ordnung als rechte oder linke, so ergibt sich, dafs bei den rechtsdrehenden Krystallen das Trapezoeder I. Ordnung ein rechtes, das Trapezoeder II. Ordnung ein linkes ist, dagegen bei den linksdrehenden Krystallen das Trapezoeder I. Ordnung ein linkes, das Trapezoeder II. Ordnung aber ein rechtes ist [1]).

Das eigentümliche Verhalten des Quarzes, wenn weifses Licht parallel der Axe durch ihn hindurchgeht, wurde sehr bald durch die Untersuchungen Biots [2]) über das Verhalten des Quarzes gegen homogenes Licht aufgeklärt, indem Biot nachwies, dafs im Quarz eine Drehung der Polarisationsebene des Lichtes eintritt.

Nehmen wir eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke, wo fast nur die Mitte der Erscheinung, nicht die Ringe sich zeigen, und legen auf den obern Nicol ein gut homogen gefärbtes Glas. Bei gekreuzten Nicols ist dann bei andern Krystallen die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel, beim Quarz jedoch nicht; liegt die senkrecht gegen die Axe geschnittene Quarzplatte zwischen den Nicolschen Prismen, so müssen wir den obern Nicol um eine bestimmte Anzahl von Graden drehen, um das Gesichtsfeld wieder dunkel zu erhalten. Die Gröfse der Drehung ist für verschiedene Farben verschieden, sie beträgt nach den Messungen von Biot für

	äufserstes Rot	$17^0,49$	mittleres	Rot	$19^0,0$
Grenze zwischen	Rot und Orange	$20^0,47$	„	Orange	$21^0,4$
„ „	Orange „ Gelb	$22^0,31$	„	Gelb	$24^0,0$
„ „	Gelb „ Grün	$25^0,67$	„	Grün	$27^0,8$
„ „	Grün „ Blau	$30^0,04$	„	Blau	$32^0,3$
„ „	Blau „ Indigo	$34^0,57$	„	Indigo	$36^0,1$
„ „	Indigo „ Violett	$37^0,68$	„	Violett	$40^0,8$
	äufserstes Violett	$44^0,08$			

Aus diesen Versuchen ergibt sich, dafs die Polarisationsebene der parallel der Axe durch einen Bergkrystall hindurchgetretenen Strahlen gedreht

[1]) *Groth*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVII.
[2]) *Biot*, Mémoires de l'Acad. des sciences. T. II. Paris 1819.

wird, und weiter, dafs die Drehung für die verschieden gefärbten Strahlen einen verschiedenen Wert hat. Denn durch das Nicolsche Prisma geht das polarisierte Licht nicht hindurch, das Gesichtsfeld ist dunkel, wenn die Polarisationsebene des Prismas senkrecht ist zu derjenigen des das Prisma treffenden Lichtes. Da nun das Gesichtsfeld dunkel ist, wenn das Prisma um eine bestimmte Anzahl Grade gedreht ist, so folgt, dafs dann die Polarisationsebene des die Quarzplatte verlassenden Lichtes zu derjenigen des Prismas senkrecht ist, somit dafs die Polarisationsebene des durch die Quarzplatte hindurchgegangenen Lichtes gegen diejenige des eintretenden Lichtes um ebensoviel gedreht ist, als wir das Prisma aus der gekreuzten Stellung drehen mufsten, um das Gesichtsfeld wieder dunkel zu machen.

Die Gröfse der Drehung ist nach den Versuchen Biots weiter abhängig von der Dicke der Platten, und zwar ist sie einfach der Dicke der Platten proportional; um also die Drehung bei einer Platte beliebiger Dicke zu erhalten, hat man sowohl für rechts als für links drehende Quarze die Zahlen Biots mit der in Millimetern angegebenen Dicke der Platten zu multiplicieren.

Aus der Thatsache der verschiedenen Drehung für verschiedenes Licht erklärt sich sofort die Erscheinung, dafs bei Anwendung weifsen Lichtes das Gesichtsfeld niemals weifs, hell oder dunkel, sondern immer farbig ist. Wir sahen früher, dafs wenn die Polarisationsebene des Nicols mit derjenigen des ihn treffenden Lichtes den Winkel α bildet, dafs dann die Intensität des aus dem Nicol tretenden Lichtes dem Quadrate von $\cos \alpha$ proportional ist. Wie die Versuche von Biot ergeben, hat α für die verschiedenen Farben immer einen andern Wert, wenn weifses Licht durch eine Quarzplatte gegangen ist. Sind die Nicols gekreuzt, so ist für keine Farbe α gleich 0, also wird keine Farbe ausgelöscht; drehen wir den Nicol um $17^0,49$ nach der einen Seite, so wird Rot vollständig ausgelöscht, die andern Farben sind aber noch mit um so gröfserer Intensität vorhanden, als ihre Polarisationsebene stärker gedreht ist. Durch weiteres Drehen verschwindet dann immer eine andere Farbe, aber die frühern treten wieder auf. Es verschwinden also nie alle Farben zugleich, deshalb kann das Gesichtsfeld nie dunkel werden; es sind aber auch nie alle Farben nach dem Durchtritt durch den zweiten Nicol in derselben Stärke vorhanden, als im weifsen Lichte, deshalb mufs das Gesichtsfeld immer farbig erscheinen. Die Farbe mufs aber bei verschiedener Dicke der Platte verschieden sein, da die Drehung der einzelnen Farben mit der Dicke der Platte sich ändert.

Biot schlofs aus seinen Versuchen, indem er die von ihm beobachteten Drehungswinkel mit den von Fresnel aus den Messungen Newtons bei den Farben dünner Blättchen abgeleiteten Wellenlängen verglich, dafs die Drehung der Polarisationsebene dem Quadrate der Wellenlängen umgekehrt proportional sei. Wir haben p. 411 die Werte, welche Newton für die Dicke der Schicht bei dem ersten hellen Ring erhielt, angegeben; das Vierfache dieser Werte sind, wie wir dort sahen, die Wellenlängen der betreffenden Farben, wie sie Fresnel berechnete. Multiplicieren wir das Quadrat dieser Zahlen mit den von Biot beobachteten Drehungswinkeln, so ist das Produkt in der That mit grofser Annäherung konstant. So erhalten wir für das äufserste Rot die Wellenlänge 6,45, für das äufserste Violett den Wert 4,06, in zehntausendstel Millimeter. Das Produkt aus dem

Drehungswinkel ϱ und dem Quadrate von λ ist damit für Rot 72,8, für Violett 72,5.

Bei der immerhin ziemlich bedeutenden Unsicherheit in der Bestimmung der Wellenlängen aus der Farbe des angewandten Lichtes kann man aus den Beobachtungen Biots das erwähnte Gesetz nur als ein angenähertes folgern; es ist deshalb die Frage nach der Abhängigkeit der Drehung der Polarisationsebene von der Wellenlänge später von Broch[1]) und Stefan[2]) wieder aufgenommen worden. Die von beiden angewandte Versuchsanordnung war im wesentlichen dieselbe. Zwischen die beiden Nicols wurde die Quarzplatte gebracht, und der Apparat so aufgestellt, dafs die von einem Heliostaten durch einen engen Spalt reflektierten Sonnenstrahlen durch die Nicols und die Quarzplatten hindurchtraten. Vor dem zweiten Nicol wurde ein Prisma aufgestellt, dessen brechende Kante der Spalte parallel war, so dafs die Strahlen, nachdem sie durch beide Nicols und die drehende Platte hindurchgegangen waren, in ein Spektrum aus einander gelegt wurden. Blickt man durch das Prisma nach der Spalte, so sieht man in dem Spektrum derselben aufser den Fraunhoferschen Linien einen, oder je nach der Dicke des Quarzes mehrere dunkle Streifen, welche von der Mitte aus gegen die Ränder allmählich heller werden. Die Streifen entsprechen jenem Lichte, dessen Polarisationsebene senkrecht ist zur Ebene des zweiten Nicols; der Winkel, um welchen bei Beobachtung eines bestimmten schwarzen Streifens der zweite Nicol aus der gekreuzten Stellung, das heifst aus der, in welcher seine Polarisationsebene zu der des ersten Nicols senkrecht ist, gedreht ist, ist dann der Drehungswinkel der betreffenden Lichtart. Um gleichzeitig die schwarzen Streifen und die Fraunhoferschen Linien, welche die Streifen decken, zu beobachten, liefs Broch von der Bergkrystallplatte nur die obere Hälfte der Spalte bedecken, so dafs er unmittelbar unter dem betreffenden schwarzen Streifen die Fraunhoferschen Linien beobachten konnte.

Die aus 18 Messungen an 4 bis $7^{mm},6$ dicken sowohl rechts als links drehenden Quarzen abgeleiteten Werte für die Drehungswinkel in einer 1^{mm} dicken Quarzplatte sind für die verschiedenen Fraunhoferschen Linien folgende:

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
$15^0,30$;	$17^0,24$;	$21^0,67$;	$27^0,46$;	$32^0,50$;	$42^0,20$.

Mit den Fraunhoferschen Wellenlängen für

B	*C*	*E*	*G*
6,88;	6,56;	5,26;	4,29

werden die Produkte $\varrho \,.\, \lambda^2$

72,32; 74,08; 76,08; 77,66;

dieselben nehmen also gegen das violette Ende hin beträchtlich zu.

Stefan brachte die beiden Nicols mit zwischen gelegter Quarzplatte vor dem Spalt eines Spektrometers an, mafs indes die Drehungswinkel der Fraunhoferschen Linien nicht direkt, sondern bestimmte die Lage der Streifen im Spektrum, indem er die Ablenkung derselben durch ein Prisma mit dem

[1]) *Broch*, Doves Repertorium. Bd. VII. p. 115.
[2]) *Stefan*, Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. L.

Spektrometer mafs. Er verglich so die Drehungswinkel der ausgelöschten Lichtarten mit deren Brechungsexponenten. Er wandte Platten von beträchtlich gröfserer Dicke an als Broch, einmal um eine gröfsere Anzahl von Streifen gleichzeitig im Spektrum zu übersehen, dann aber auch, weil mit dickern Platten die Streifen schmaler werden, und so die Einstellung auf dieselben genauer wird.

Die Drehungswinkel der verschiedenen bei einer bestimmten Stellung, etwa der parallelen Stellung der Nicols beobachteten Streifen erhält man folgendermafsen. Die in dem Spektrum des durch eine dicke Platte gegangenen Lichtes vorhandenen Streifen entsprechen den Lichtarten, deren Polarisationsebenen genau um ein ungerades Vielfaches von rechten Winkeln gedreht ist. Bezeichnen wir die Dicke der Quarzplatten mit D und den Drehungswinkel irgend eines Strahles für 1^{mm} Dicke mit ϱ, so werden bei parallelen Nicols an allen Stellen des Spektrums dunkle Streifen erscheinen, für welche

$$D \,.\, \varrho = (2n + 1) \,.\, 90^0$$

ist; woraus dann folgt

$$\varrho = (2n + 1) \cdot \frac{90^0}{D} \cdot$$

Aus den Versuchen von Biot und Broch folgt, dafs für den gewöhnlich sichtbaren Teil des Spektrums ϱ nicht unter 15^0 beträgt, da nach Broch der Drehungswinkel für $B = 15^0{,}30$ ist. Für den dem roten Ende nächsten Streifen haben wir daher für n die Zahl einzusetzen, welche ϱ nicht kleiner, aber am nächsten gleich 15 macht. Die Drehung des folgenden Streifens in der dicken Platte ist um 180^0 gröfser, der Drehungswinkel in einer Platte von 1^{mm} Dicke ist also gleich $\varrho_1 + 2 \cdot \frac{90^0}{D}$ u. s. f., so dafs die Differenz der Drehungswinkel der auf einander folgenden Streifen konstant ist. Die Drehung des Violetten ist etwa 51^0; die Zahl der im Spektrum erscheinenden Streifen ist deshalb so grofs, als Werte von n solche von ϱ liefern, die zwischen 15^0 und 51^0 liegen. Für eine Bergkrystallsäule von $70^{mm}{,}08$ Dicke erhalten wir

$$\varrho = (2n + 1) \,.\, 1^0{,}284\,2.$$

Der erste Wert von n, der $\varrho > 15$ werden läfst, ist $n = 6$, und dieser liefert $\varrho = 16^0{,}694\,6$; jene Strahlen werden also zuerst im Spektrum fehlen, für welche der Drehungswinkel diesen Wert hat. Für den folgenden Streifen ist dann $\varrho = 16^0{,}694\,6 + 2 \,.\, 1^0{,}284\,2$ gleich $16^0{,}694\,6 + 2^0{,}568\,4$, und die gleiche Drehungsdifferenz gilt für die folgenden Streifen. Die Zahl der Streifen ist in diesem Falle 13, denn für $n = 19$ wird $\varrho = 50^0{,}083$.

Folgende kleine Tabelle enthält die Beobachtungen, welche Stefan bei einer Quarzplatte der angegebenen Dicke unter Anwendung eines Crownglasprismas von $40^0\,53'\,43''$ brechendem Winkel angestellt hat. Das Prisma war so gestellt, dafs der Strahl D das Minimum der Ablenkung erhielt, und aus dem für diesen beobachteten Minimum der Ablenkung der Einfallswinkel bestimmt. Nach der § 16 am Schlufs angegebenen Gleichung kann dann für jeden Strahl aus der beobachteten Ablenkung der Brechungsexponent berechnet werden.

Nr. des Streifens	Ablenkung Δ	Differenz $\Delta - \Delta_{n-1}$	Brechungs-exponent μ	Differenz $\mu_n - \mu_{n-1}$
1	31° 1′ 27″		1,610 90	
2	31° 10′ 37″	9′ 10″	1,613 66	0,002 76
3	31° 19′ 45″	9′ 8″	1,616 40	0,002 74
4	31° 28′ 52″	9′ 7″	1,619 13	0,002 73
5	31° 38′ 3″	9′ 11″	1,621 87	0,002 74
6	31° 47′ 10″	9′ 7″	1,624 59	0,002 72
7	31° 56′ 20″	9′ 10″	1,627 29	0,002 70
8	32° 5′ 39″	9′ 19″	1,630 09	0,002 80
9	32° 15′ 5″	9′ 26″	1,632 89	0,002 80

Die Beobachtungen zeigen, dafs die Dispersion, welche durch Drehung der Polarisationsebene im Quarz eintritt, gleich ist der Dispersion, welche durch die prismatische Brechung in dem benutzten Crownglasprisma hervorgerufen wird. Denn die letzte Kolumne der Tabelle zeigt, dafs gleichen Differenzen in den Drehungswinkeln auch gleiche Differenzen in den Brechungsexponenten entsprechen, oder dafs die Zunahme der Brechungsexponenten jener der Drehungswinkel einfach proportional ist. Man kann deshalb sofort die Brechungsexponenten μ als eine lineare Funktion der Drehungswinkel ϱ, oder auch umgekehrt ϱ als eine lineare Funktion der Brechungsexponenten ausdrücken. Benutzt man alle in der Tabelle angegebenen Werte von μ und die zugehörigen ϱ, so findet man

$$\mu = 1{,}593\,08 + 0{,}001\,067 \cdot \varrho,$$

oder auch

$$\varrho = \frac{1}{0{,}001\,067} \cdot \mu - \frac{1{,}593\,08}{0{,}001\,067} \;\ldots\ldots\; \text{(a)}.$$

Kennt man nun μ als Funktion der Wellenlänge, so kann man auch ϱ als solche ausdrücken. Stefan bestimmte deshalb die Cauchysche Dispersionsformel für das von ihm benutzte Crownglas, indem er die Brechungsexponenten der Fraunhoferschen Hauptlinien mafs. Er fand mit den Fraunhoferschen Wellenlängen bei denselben die zehntausendstel Millimeter als Einheiten gesetzt:

$$\mu = 1{,}599\,22 + \frac{0{,}871\,58}{\lambda^2},$$

woraus sich dann für ϱ ergibt

$$\varrho = \frac{816{,}85}{\lambda^2} - 1{,}743.$$

Aus fünf mit Quarzplatten verschiedener Dicke durchgeführten Reihen erhielt Stefan für ϱ die Gleichung

$$\varrho = \frac{816{,}22}{\lambda^2} - 1{,}753 \;\ldots\ldots\; \text{(b)}.$$

Diese Gleichung für ϱ kann, wie Stefan hervorhebt, nur eine angenäherte sein, da zunächst die Proportionalität der Dispersion im Quarz und im Prisma nur eine angenäherte ist, und da ganz besonders die Cauchysche Formel mit zwei Konstanten die Brechungsexponenten nur angenähert wiedergibt.

Zur Kontrole der Gleichung hat deshalb Stefan auch direkt die Drehungswinkel der Fraunhoferschen Linien bestimmt. Er erhält für dieselben

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
15,55;	17,22;	21,67;	27,46;	32,69;	42,37;	50,98;

während Gleichung (b) liefert

15,50; 17,19; 21,79; 27,75; 33,05; 42,58; 51,15.

Wurden in Gleichung (a) die direkt beobachteten Werte der Brechungsexponenten der Hauptlinien eingesetzt, so ergaben sich die Werte

15,68; 17,32; 21,71; 27,57; 32,79; 42,88;

während die von Broch gefundenen Werte sind.

15,30; 17,24; 21,67; 27,46; 32,50; 42,20;

welche sich mit grofser Genauigkeit durch die Gleichung darstellen lassen

$$\varrho = \frac{804,03}{\lambda^2} - 1,581.$$

Die Unterschiede zwischen den von Broch und Stefan direkt gemessenen Zahlen sind nicht viel kleiner als die zwischen Stefans Messungen und den nach Stefans Gleichungen berechneten, so dafs man zu dem Schlusse berechtigt ist, dafs diese Gleichung die Drehungswinkel im Quarz mit der erreichbaren Genauigkeit wiedergibt.

Noch in einer andern Weise hat Stefan die obige Gleichung geprüft. Wendet man bei der von ihm benutzten Versuchsanordnung an Stelle des Prismas ein Beugungsgitter an, so treten in dem Beugungsspektrum ganz dieselben schwarzen Streifen auf. Bestimmt man die Lage derselben im Spektrum, so erhält man aus der bekannten Öffnungsbreite direkt die Wellenlängen der betreffenden Stellen, deren Drehungswinkel man kennt. Die einzelnen Streifen entsprechen Wellenlängen, deren Drehungswinkel sich um eine konstante Gröfse unterscheiden. Daraus folgt, dafs wenn die Stefansche Gleichung richtig ist, die Differenz zwischen den reciproken Werten der Quadrate der Wellenlängen der in einem Spektrum auf einander folgenden Streifen konstant sein müsse. Bei einem Gitter, dessen Spaltbreite $0^{mm},012\,582$ war, erhielt Stefan folgende Werte:

Nr. des Streifens	Ablenkung	Wellenlänge λ	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_{n-1}^2}$
1	1° 29′ 12″	0,000 666 9	2248	
2	1° 23′ 29″	0,000 624 2	2567	309
3	1° 18′ 36″	0,000 587 7	2825	328
4	1° 14′ 34″	0,000 557 5	3217	322
5	1° 11′ 7″	0,000 531 7	3537	320
6	1° 8′ 12″	0,000 509 9	3846	309
7	1° 5′ 41″	0 000 491 1	4146	300
8	1° 3′ 27″	0,000 474 4	4443	297

In der That findet man die Zahlen der letzten Kolumne sehr annähernd konstant; wenn auch gegen das violette Ende hin eine Abnahme

der Differenzen einzutreten scheint, so ist dieselbe doch so klein, dafs sie den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden kann. Man würde deshalb auch aus diesen Beobachtungen die Stefansche Gleichung ableiten können, wenn sie vielleicht auch noch genauer durch eine Gleichung dargestellt würden, welche noch ein Glied mit λ^4 enthielte.

Boltzmann[1]) hat von gewissen theoretischen Erwägungen ausgehend, nach welchen für sehr grofse Wellenlängen eine Drehung der Polarisationsebene nicht eintritt, die Stefansche Gleichung durch eine solche ohne konstantes Glied ersetzt, indem er statt dessen ein Glied setzt, welches die vierte Potenz von λ im Nenner hat, also schreibt

$$\varrho = \frac{A}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^4}.$$

Mit Berücksichtigung sämtlicher von Stefan für die Fraunhoferschen Linien beobachteten Werte fand er

$$\varrho = \frac{707{,}018}{\lambda^2} + \frac{1498{,}3}{\lambda^4}.$$

Im folgenden sind die hiernach berechneten Werte unter den beobachteten angegeben

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
15,55	17,22	21,67	27,46	32,69	42,37	50,98
15,65	17,24	21,64	27,42	32,62	42,43	50,98.

In der That liegen die beobachteten und berechneten Werte sich nicht unerheblich näher.

Später haben Soret und Sarrasin[2]) die Drehung der Polarisationsebene im Quarz bis tief in das Ultraviolette verfolgt. Sie fanden, dafs die Boltzmannsche Gleichung auch in dieser Ausdehnung die Beobachtungen gut darstellt. Die Konstanten der Gleichungen waren etwas gröfser, als sie sich aus den Stefanschen Messungen ergeben hatten; sie fanden

$$\varrho = \frac{710{,}123}{\lambda^2} + \frac{1519{,}5}{\lambda^4}.$$

Im folgenden sind einige der beobachteten und berechneten Werte zusammengestellt, die berechneten unter den beobachteten

A	*C*	*E*	*G*	*H*	*L*	*M*	*N*
12,68	17,35	27,61	42,63	51,22	55,88	59,04	64,47
12,74	17,31	27,55	42,60	51,22	55,83	59,00	64,63.

Die gleichen Linien entsprechenden Werte sind etwas gröfser als die von Stefan gefundenen. Da die beiden Beobachter ihre Messungen bei erheblich höherer Temperatur des Quarzes ausführten als Stefan, stimmt das mit den Beobachtungen von Langs[3]) und Sohnkes[4]), nach denen die Drehung mit steigender Temperatur wächst.

---

[1]) *Boltzmann,* Poggend. Annal. Jubelband.
[2]) *Soret* und *Sarrasin,* Archives des sciences phys. de Genève November 1875. Poggend. Annal. Bd. CLVII.
[3]) *von Lang,* Wiener Ber. Bd. LXXI. Poggend. Annal. Bd. CLVI.
[4]) *Sohnke,* Wiedem. Annal. Bd. III.

Die bisher beschriebenen und auf eine Drehung der Polarisationsebene zurückgeführten Erscheinungen in Quarzplatten bezogen sich nur auf parallel der Axe durch den Quarz dringendes Licht; auch in Betreff der Ringfiguren zeigt der Quarz einige Eigentümlichkeiten, welche zuerst Airy[1]) vollständig beschrieben und abgeleitet hat.

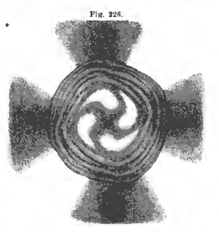
Die Ringe in Quarzplatten sind nur bei parallelen oder gekreuzten Nicols kreisrund, bei der Drehung des zweiten Nicols aus diesen Stellungen nehmen sie allmählich eine viereckige Form an, indem sie sich in den Richtnngen, welche die von den Polarisationsebenen der Nicolschen Prismen gebildeten Winkel halbieren, ausbiegen. Während der Drehung nach der Rechten scheinen sich die Ringe in rechtsdrehenden Krystallen zu erweitern, in linksdrehenden zn verengern; das Umgekehrte zeigt sich bei einer Drehung nach der Linken. Bei nicht zu dicken Platten zeigt sich (Fig. 227) in der Mitte des ersten Ringes ein farbiges knrzarmiges Krenz, dessen Arme in die Richtung der Diagonalen der Ringe fallen, und dessen Farbe mit der Drehung sowie mit der Dicke der Platten sich ändert. Bei dünnen Platten ans rechtsdrehenden Krystallen geht bei Drehung nach rechts hin die Farbe des Kreuzes von Blau durch Violett zu Gelb. Bei linksdrehenden resultiert dieselbe Farbenfolge bei entgegengesetzter Drehung.

Fig. 227.



Legt man zwei Quarzplatten auf einander, von denen die eine rechts-, die andere linksdrehend ist, so ist die resultierende Drehung der Polarisationsebene gleich der Differenz der Drehungen, welche jede Platte für sich erzeugen würde. Sind daher beide Platten von gleicher Dicke, so wird die Drehung aufgehoben und die Mitte des Gesichtsfeldes bleibt bei gekreuzten Nicols dunkel. Indes verhält sich eine solche doppelte Platte doch nicht wie die eines nicht drehenden Krystalles, sondern es erscheinen Farbenringe, mit den schwarzen Büscheln wie bei einer einzigen Platte von gleicher Dicke, in Form von vier in einander gewundenen Spiralen (Fig. 228), welche von einem kurzen gegen die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes und des obern Nicols geneigten Kreuze ausgehen und sich mehrfach durchschneiden. Die Neigung der Kreuzesarme gegen die Polarisationsebene ist gleich der Hälfte des Winkels, um welchen die Polarisationsebene durch die eine Platte ge-

Fig. 228.



[1]) *Airy*, Transactions of the Cambridge Philos. Soc. vol. IV. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

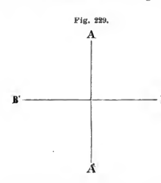
dreht wird. Die Durchschnittspunkte der Spiralen liegen in der Polarisationsebene der Nicols.

Die Spiralen sind verschieden gewunden, je nachdem das Licht zuerst in die linksdrehende oder in die rechtsdrehende Platte tritt. Fig. 228 zeigt sie so, wie sie auftreten, wenn das Licht zuerst in die linksdrehende Platte tritt.

§ 109.

Ableitung der Erscheinungen im Bergkrystall. Cirkularpolarisation. Die im vorigen Paragraphen beschriebenen Erscheinungen in Quarzplatten sind von Fresnel[1]) durch die Annahme erklärt worden, dafs in dem Quarz parallel der Axe eine eigentümliche Art der Doppelbrechung eintrete, dafs das durch den Krystall hindurchgehende Licht in zwei cirkular polarisierte Strahlen zerlegt werde, von denen der eine rechtsgedreht, der andere linksgedreht sei, also in zwei Strahlen zerfalle, in welchen die Äthermoleküle in kreisförmigen Bahnen sich bewegen, in der einen im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers, in der andern im entgegengesetzten[2]). Der eine der beiden Strahlen pflanzt sich durch den Krystall rascher fort; im rechtsdrehenden der rechts cirkulare, im linksdrehenden der links cirkular polarisierte Strahl. Es gelang Fresnel[3]) durch einen einfachen Versuch das Dasein beider Strahlen nachzuweisen. Später hat Airy[4]) aus der Fresnelschen Annahme alle im vorigen angegebenen Einzelheiten analytisch abgeleitet und berechnet. Wir begnügen uns hier, den Nachweis zu liefern, dafs die Drehung der Polarisationsebene und die Biotschen Gesetze derselben aus dieser Annahme folgen. Betreffs der eigentümlichen Gestalten der farbigen Ringe verweisen wir auf Airys Abhandlung.

Fig. 229.



Wie wir früher sahen, resultiert ein cirkular polarisierter Strahl durch die Interferenz zweier geradlinig senkrecht zu einander polarisierten Strahlen gleicher Intensität, welche in der Phase um eine viertel Wellenlänge differieren. Geschehen die Schwingungen des einen Strahles parallel AA (Fig. 229), die des andern parallel BB, so wird die Drehung der schwingenden Moleküle in dem einen oder andern Sinne erfolgen, je nachdem die Bewegung parallel BB der andern um eine viertel Wellenlänge voraus ist oder hinter ihr zurück ist. Hieraus ergibt sich, dafs wir jeden geradlinig polarisierten Strahl als aus der Interferenz zweier entgegengesetzt cirkular polarisierter Strahlen gleicher Wellenlänge hervorgehend betrachten können. Denn wird die Bewegung des geradlinig polarisierten Strahles durch die Gleichung gegeben

[1]) *Fresnel*, Annales de chim. et de phys. T. XXVIII. Poggend. Annal. Bd. XXI.

[2]) Man sehe § 130 des ersten Teiles.

[3]) *Fresnel* a. a. O.

[4]) *Airy*, Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Vol. IV. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

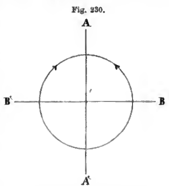
so können wir dieselbe schreiben

$$y = \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right)$$

$$+ \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right).$$

Die Snmme dieser vier Glieder ist dem Ausdrucke für y gleich; das erste und dritte Glied stellt die mit AA parallele Bewegung dar; stellt das zweite und vierte nun mit BB parallele Bewegungen dar, so ist die Phasendifferenz dieser beiden Bewegungen eine halbe Wellenlänge, die jeder einzelnen gegen die mit AA parallele eine viertel Wellenlänge. Die durch das zweite Glied dargestellte schwingende Bewegung ist derjenigen des ersten um $\frac{1}{4}\lambda$ voraus, die durch das vierte dargestellte hinter der des dritten um $\frac{1}{4}\lambda$ zurück. Die Bewegungen eins und zwei geben daher einen links cirkular polarisierten Strahl, wenn wir annehmen, dafs das Licht von hinten gegen die Ebene der Zeichnung sich fortpflanzt, und die Oscillationen nach rechts nnd oben mit dem positiven Vorzeichen versehen; die Bewegungen drei und vier geben einen rechts cirkular polarisierten Strahl, in welchem die Ätherteilchen sich in dem Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers bewegen.

Fig. 230.



Von dieser Zerlegungsweise des linear polarisierten Strahles kann man sich durch folgende Betrachtung eine dentliche Vorstellung machen. Ist der Kreis (Fig. 230) die Bahn der Äthermoleküle in beiden Schwingungen, so wirken auf die Ätherteilchen in jedem Momente drei Impnlse; z. B. wenn es sich bei A befindet, einer nach A', einer nach B und einer mit dem letztern von genau gleicher Stärke nach B'. Die beiden nach B und B' gerichteten Bewegungen heben sich daher auf und es bleibt nnr die lineare Bewegung parallel AA' übrig.

Denken wir uns nun, dafs ein geradlinig parallel BB' polarisierter Strahl an irgend einer Stelle seiner Bahn in zwei solche cirkular polarisierte Strahlen zerfalle und in dieser Weise durch die Strecke d sich fortpflanze. Haben die beiden cirkular polarisierten Strahlen gleiche Wellenlänge, so wird die Bewegung des Äthers am Ende der Strecke d dargestellt durch

$$y = \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right) + \frac{a}{2} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right)$$

$$+ \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right) - \frac{a}{2} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right),$$

und wie man unmittelbar sieht, ist die resultierende Bewegung wieder die

frühere, geradlinig parallel BB polarisiert, das heifst, die Schwingungen geschehen parallel AA, ihre Gleichung ist

$$y = a \cdot \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda}\right),$$

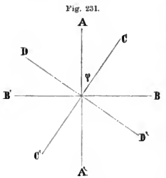
wenn wir $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \xi$ setzen.

Anders jedoch, wenn wir annehmen, dafs die Wellenlängen der beiden cirkular polarisierten Strahlen in der Strecke d verschieden, dafs sie λ' und λ'' sind, dann erhalten wir für die resultierende Bewegung am Ende von d

$$y' = \frac{a}{2} \cdot \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) + \frac{a}{2} \cdot \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right)$$
$$+ \frac{a}{2} \cdot \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right) - \frac{a}{2} \cdot \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right).$$

Man sieht, die algebraische Summe dieser vier Glieder ist nicht dem frühern Werte von y gleich. Indes auch jetzt geht aus der Interferenz der beiden Strahlen am Ende der Strecke d, von wo aus sie sich wieder mit gleicher Wellenlänge fortpflanzen, ein linear polarisierter Strahl hervor, dessen Polarisationsebene aber gegen die frühere um einen Winkel φ geneigt ist. Diesen Winkel φ können wir aus der Bedingung bestimmen, dafs kein nach einer zur Richtung dieser Ebene senkrechten Richtung polarisiertes Licht aus dem Zusammenwirken der vier Bewegungen entstehe. Sei nun, um diese Bedingung analytisch auszudrücken, AA die ursprüngliche Schwingungsrichtung, BB die dazu senkrechte Richtung, in welcher die Komponenten schwingen, welche die Cirkularpolarisation erzeugten. CC' bilde mit AA' den Winkel φ und DD' sei zu CC' senkrecht. Jede der vier in y' enthaltenen Bewegungen gibt dann im allgemeinen sowohl eine CC' parallele Komponente als auch eine parallel DD'. Die Summe der CC' parallelen Komponenten ist

Fig. 231.



$$v = \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) + \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right)$$
$$+ \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right) - \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right).$$

Die mit DD' parallele Komponente wird ebenso

$$u = \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) - \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right)$$
$$+ \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right) + \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right).$$

Ist $u = 0$, so resultiert nur eine mit CC' parallele Bewegung. Ob $u = 0$, das hängt offenbar nur von dem Werte des Winkels φ ab; entwickeln wir aus der Gleichung $u = 0$ den Wert von φ, so gibt uns dieser den Winkel, welchen die Schwingungsebene des aus der Interferenz der beiden cirkular polarisierten Strahlen resultierenden linear polarisierten mit der ursprünglichen Schwingungsebene bildet.

Wir erhalten dann

$$\sin\varphi\left\{\frac{a}{2}\sin\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda'}\right) + \frac{a}{2}\sin\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda''}\right)\right\}$$
$$- \cos\varphi\left\{\frac{a}{2}\cos\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda'}\right) - \frac{a}{2}\cos\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda''}\right)\right\} = 0.$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda'}\right) - \cos\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda''}\right)}{\sin\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda'}\right) + \sin\left(\xi - 2\pi\frac{d}{\lambda''}\right)}$$

und nach einer bekannten trigonometrischen Formel

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\pi \,.\, d\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right)$$

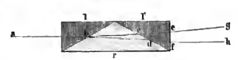
oder

$$\varphi = \pi \,.\, d\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right).$$

Die Schwingungsebene oder Polarisationsebene des aus der Interferenz der cirkular polarisierten Strahlen resultierenden linear polarisierten ist also in in diesem Falle um einen Winkel φ gedreht, welche der Strecke proportional ist, in der die cirkular polarisierten Strahlen verschiedene Wellenlängen hatten, und welcher überdies abhängt von der Wellenlänge der Strahlen. Ist ferner $\lambda'' > \lambda'$, so ist φ positiv, die Drehung geschieht in dem Sinne des Zeigers einer Uhr, ist $\lambda'' < \lambda'$, so ist φ negativ, die Drehung geschieht nach der entgegengesetzten Seite. Ist aber $\lambda'' > \lambda'$, so heifst das, der rechts cirkulare Strahl eilt dem andern voraus, da die Schwingungsdauer beider Strahlen die gleiche ist, ist $\lambda'' < \lambda'$, so eilt der links cirkulare Strahl dem andern vor.

Die Fresnelsche Annahme, dafs die parallel der Axe in einem Bergkrystall eindringenden linear polarisierten Strahlen in zwei entgegengesetzt cirkular polarisierte zerlegt werden, von denen der eine dem andern je nach der Farbe mehr oder weniger voreile, erklärt also die beobachteten Drehungserscheinungen vollkommen.

Fig. 232.



Um das Dasein dieser beiden Strahlen nachzuweisen, schnitt Fresnel aus einer Säule rechtsdrehenden Bergkrystalles ein Prisma r, dessen brechender Winkel 152^0 war, und dessen Seiten gegen die Axen des Krystalles die gleiche Neigung hatten. Ein ebensolches schnitt er aus einem linksdrehenden Krystall, und teilte es dann mit einem durch die brechende Kante senkrecht zur Axe des Kry-

stalles gelegten Schnitte in zwei Teile l und l' Fig. 232. Er kittete diese an das erste Prisma, so dafs die Kombination Fig. 232 entstand, ein Cylinder, dessen Axe der Axe des Krystalles parallel ist, dessen Endflächen auf derselben senkrecht sind und dessen mittlerer Teil aus einem Prisma von rechtsdrehendem Qnarze und dessen beide äufsern Teile aus zwei Halbprismen linksdrehenden Qnarzes bestanden. Da die Brechungsexponenten beider Qnarze dieselben sind, so kann ein durch diese Kombination hindurchgehender Strahl keine Ablenkung durch einfache Brechung erhalten, und da die Axe der Krystalle auf den Endflächen senkrecht ist, bei senkrechter Incidenz des Lichtes auch keine Zerteilung des Strahles durch gewöhnliche Doppelbrechung eintreten.

Fresnel fand aber, dafs immer, wenn man einen Lichtstrahl ab auf den Cylinder fallen liefs, zwei Strahlen cg und fh denselben verliefsen und ferner, dafs die austretenden Strahlen, mochte ab polarisiert sein oder nicht, keine Spur von Polarisation erkennen liefsen, sie verhielten sich gerade so wie die durch das Parallelepiped (§ 84) cirkular polarisierten Strahlen. Ein parallel der Axe durch einen Bergkrystall gehender Strahl wird also immer in zwei cirkular polarisierte Strahlen zerlegt, und das Auseinandertreten derselben in dem angewandten Apparate beweist, dafs der eine in dem Krystall sich rascher bewegt als der andere, und dafs derjenige, welcher in dem ersten Krystall sich rascher bewegt, in dem mittlern sich langsamer bewegt.

Denn in dem linksdrehenden ersten Prisma zerfällt der Strahl in die zwei cirkularen Strahlen, von denen der links cirkulare sich rascher fortpflanzt als der rechts cirkulare. Beide Strahlen pflanzen sich wegen der senkrechten Incidenz nach b fort, und treten dort in den rechtsdrehenden Krystall ein; sie behalten in demselben den Charakter ihrer Polarisation bei, aber in r pflanzt sich der links cirkulare langsamer fort, r ist für ihn optisch dichter, er wird daher nach bd znm Einfallslote hin gebrochen. Der rechts cirkulare Strahl pflanzt sich aber in r rascher fort als in l, für ihn ist also r optisch dünner, er wird nach bc vom Einfallslote fortgebrochen. Beim Eintritt in l' wird nun der in r raschere bc wieder der langsamere, er wird, da die brechende Kante des letzten Prismas umgekehrt liegt als die des mittlern, weiter nach oben von der brechenden Kante fort, nach ce gebrochen; der langsamere bd wird der raschere und daher nach df gebrochen. Schliefslich verlassen die Strahlen in der Richtung eg und fh den Krystall.

Dieser Versuch Fresnels beweist somit, dafs in der That in der Axe nahe parallelen Richtungen im Quarz eine Doppelbrechung eigentümlicher Art stattfindet, so dafs in diesen Richtungen ein ordentlicher Strahl nicht existiert. Vor kurzem ist es von Lang nicht nur gelungen diese Doppelbrechung nachzuweisen, sondern anch die Brechungsexponenten der beiden Strahlen zu messen, indem er durch ein Quarzprisma, dessen brechende Kante senkrecht zur optischen Axe war und dessen Seiten nahe gleich gegen die optische Axe geneigt waren, rechts oder links cirkulares Licht hindurchgehen liefs[1]). Der Quarz war rechtsdrehend. Die gefundenen Werte der Brechungsexponenten sind:

[1]) *von Lang*, Sitzungsber. der Wiener Akad. LX. Bd. November 1869. Man sehe auch *Jamin*, Annal. de chim. et de phys. III. Série. T. XXX.



Winkel des Strahls mit der Axe	*n* des rechts cirkularen Strahls	*n* des links cirkularen Strahls
0° 27′ 0″	1,544 188 7	1,544 260 5
1° 54′ 7″	1,544 192 5	1,544 264 9
2° 48′ 4″	1,544 194 2	1,544 276 6
4° 40′ 0″	1,544 204 3	1,544 300 9
5° 4′ 8″	2,544 208 8	1,544 304 3

Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles in Quarz, wenn das Licht einen grofsen Winkel mit der Axe bildet, ist nach von Lang 1,544 224 3. Man sieht also, wie in der Nähe der Axe der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles, hier der rechts cirkulare kleiner wird, während der des aufserordentlichen Strahles nicht so weit abnimmt, wie er thun würde, wenn im Quarz keine Cirkularpolarisation vorhanden wäre. Der Einflufs der Cirkularpolarisation auf beide Strahlen dauert, bis etwa das Licht mit der Axe einen Winkel von 25° bildet; dann ist der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles gleich dem oben angegebenen und der des aufserordentlichen wie er aus den gewöhnlichen Gesetzen der Doppelbrechung folgt.

In neuerer Zeit ist der Versuch gemacht, die Drehung der Polarisationsebene im Quarz aus der krystallinischen Struktur desselben abzuleiten. Reusch[1]) zeigte zunächst, dafs man künstlich Krystallpräparate herstellen könne, welche ebenso die Polarisationsebene drehen, ja die sämtlichen Erscheinungen im wesentlichen ebenso zeigen, wie es senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatten, sowohl rechts- als linksdrehende, thun. Schichtet man dünne Blättchen aus zweiaxigem Glimmer so auf einander, dafs der zu den Blättchen senkrechte Hauptschnitt in jedem folgenden Blättchen mit dem vorhergehenden Hauptschnitt einen Winkel von 60° bildet, so erhält man eine rechtsdrehende Kombination, wenn die Drehung in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne erfolgt ist, eine linksdrehende, wenn die Drehung im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers vorgenommen ist. Sohnke[2]) untersuchte diese Erscheinung später genauer, sowohl experimentell als auch indem er den Durchgang der Strahlen durch solche Glimmerkombinationen berechnete. Zur Berechnung hat man nur den Durchgang durch eine Triade, das heifst durch drei Glimmerblättchen zu verfolgen, von denen das folgende gegen das vorherige jedesmal um 60° in dem einen oder, was dasselbe ist, um 120° im entgegengesetzten Sinne gedreht ist; denn schichtet man mehr Glimmerblättchen auf einander, so ist das vierte wieder dem ersten, das fünfte dem zweiten u. s. f. parallel; $3n$ Glimmerblättchen bilden somit n Triaden, und die Wirkung jeder Triade ist die gleiche. Wie Sohnke zeigte, sind die Gesetze der Drehung in einer solchen Kombination ganz dieselben wie im Quarz, um so genauer, je dünner die einzelnen Blättchen sind. Es liegt daher nahe, für die Struktur des Quarzes eine ähnliche Molekularanordnung zu vermuten. Indes hebt Sohnke

[1]) *Reusch*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVIII.
[2]) *Sohnke*, Mathematische Annalen. Bd. IX. Poggend. Annal. Ergänzungsband VIII.

am Schlusse seiner Arbeit[1]) hervor, dafs die auf diese Auffassung aufgebaute Theorie der Drehung noch nicht imstande sei das Hervortreten der beiden cirkular polarisierten Strahlen, wie es Fresnel bei der vorhin erwähnten Prismenkombination beobachtet hat, zu erklären. Wir gehen deshalb auf die Reusch-Sohnkesche Theorie noch nicht näher ein.

§ 110.

Drehung der Polarisationsebene in andern Körpern. Die Eigenschaft, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, kommt dem Quarz nur im krystallisierten Zustande, in der Form als Bergkrystall zu; amorphe Kieselsäure oder kieselsaure Salze zeigen diese Eigenschaft nicht. Lange galt der Quarz für den einzigen Krystall, der diese Eigenschaft besitzt, bis Marbach[2]) dieselbe an mehreren dem regulären System angehörigen Krystallen entdeckte, und zwar am chlorsauren Natron, bromsauren Natron, bromsauren Nickeloxydul und einigen andern. Bei diesen und den übrigen Krystallen des regulären Systems, die keine Hauptaxe haben, ist es auch nicht eine bestimmte Richtung, nach welcher das Licht den Krystall durchsetzen mufs, damit eine Drehung der Polarisationsebene eintritt, sondern es tritt eine solche ein, sobald das Licht durch zwei gegenüberliegende Begrenzungsflächen der Krystalle durch dieselben hindurchgeht. Insofern ist also das Verhalten der Krystalle ein etwas anderes als beim Quarz, bei dem die cirkulare Polarisation nur nahe parallel der Axe eintritt.

Ganz ebenso wie der Quarz verhält sich nach den Beobachtungen von Descloizeaux[3]) der krystallisierte Zinnober; derselbe krystallisiert wie der Quarz im hexagonalen System und ist ebenso optisch positiv, der ordentliche Brechungsexponent ist gleich 2,854, der aufserordentliche ist 3,201. Auch beim Zinnober kommen rechts- und linksdrehende Krystalle vor; das Drehungsvermögen ist etwa 15 mal stärker als bei dem Quarze.

Das im hexagonalen Systeme krystallisierte überjodsaure Natron ($NaJo_4 + 3aq$) zeigt nach den Versuchen von Ulrich und Groth[4]) ebenfalls cirkulare Polarisation und zwar etwas stärker als der Quarz. Bei diesen Krystallen finden sich ebenfalls rechtsdrehende und linksdrehende, und wie Groth gezeigt hat, zeigen sich bei diesen Krystallen ebenfalls den Sinn der Drehung bestimmende Flächen, es sind in der schon beim Quarz angeführten Bezeichnung Trapezoeder II. Ordnung, welche hier auftreten. Auch hier zeigen, wie beim Quarz, rechtsdrehende Krystalle linke Trapezoeder II. Ordnung, dagegen linksdrehende Krystalle rechte Trapezoeder II. Ordnung. Die Gröfse der Drehung, verglichen mit der des Quarzes, zeigt folgende Zusammenstellung:

---

[1]) *Sohnke*, Poggend. Annal. Erg.-Bd. VIII. p. 63.
[2]) *Marbach*, Poggend. Annal. Bd. XCI. Bd. XCIV. Bd. CXIX.
[3]) *Descloizeaux*, Comptes Rendus. T. XLIV. p. 876 u. 909.
[4]) *Groth*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVII.

Drehung durch 1mm dicke Platte überjodsauren Natrons		des Quarzes	Differenz
für C	= 19° 24′	17° 12′	2° 12′
D	23 18	21 42	1° 36′
E	28 30	27 30	1° 0′
F	34 12	32 42	1° 30′
G	47 6	42 24	4° 52′

Die Dispersion würde darnach im überjodsauren Natron von derjenigen des Quarzes sehr verschieden sein, indem für die mittleren Wellenlängen die Drehung relativ viel kleiner ist als für jene der Grenzen des Spektrums.

Pape[1]) hat als zum hexagonalen System gehörige cirkularpolarisierende Krystalle weiter aufgefunden die unterschwefelsauren Salze des Bleis, Kalium, Strontium und Calcium. Die Drehung der Polarisationsebene in diesen Salzen ist indes erheblich geringer als im Quarz, die Dispersion in dem Bleisalze relativ indes gröfser. Pape gibt folgende Zahlen

	Bleihyposulfat		Kaliumhyposulfat	
C	4°,09	0,238	6°,18	0,360
D	5 ,53	0,255	8 ,39	0,386
E	7 ,25	0,264	10 ,51	0,382
F	8 ,88	0,271	12 ,33	0,378.

Neben den Drehungswinkeln sind die Verhältnisse zu den Drehungen im Quarz angegeben.

Ebenso hat Descloizeaux bei dem im quadratischen System krystallisierenden wasserfreien schwefelsauren Strychnin die Drehung der Polarisationsebene beobachtet und zwar bei als Quadratoktaeder ausgebildeten Krystallen, welche senkrecht zur Hauptaxe sehr leicht in dünne Blättchen gespaltet werden können. Parallel der Axe sind die Krystalle linksdrehend und zwar beträgt ihr Drehungsvermögen etwa $^2/_3$ von dem des Quarzes. Ein zweiter dem tetragonalen System angehöriger Krystall, welcher eine Drehung der Polarisationsebene bewirkt, ist das schwefelsaure Äthylendiamin[2]). Bei diesen Krystallen kommen, wie von Lang angibt, rechts- und linksdrehende vor, ohne dafs man hemiedrische Flächen an den Krystallen findet.

In einer Beziehung unterscheidet sich aber das schwefelsaure Strychnin wesentlich von den bisher besprochenen cirkular polarisierten Medien; bei ihm ist die Cirkularpolarisation nicht an die Krystallform gebunden, sondern es dreht die Polarisationsebene auch im gelösten Zustande, wie das schon früher Bouchardat[3]) nachgewiesen hat.

Dadurch bildet dieses Salz gewissermafsen den Übergang zu der zweiten Klasse cirkular polarisierender Medien, bei denen im krystallisierten Zustande eine Drehung der Polarisationsebene sich nicht nachweisen läfst, welche aber die Polarisationsebene im amorphen Zustande oder in Lösungen zu drehen imstande sind. Zu diesen Substanzen gehören nach den Versuchen

---

[1]) *Pape*, Poggend. Annal. Bd. CXXXIX.
[2]) *von Lang*, Berichte der Wiener Akademie Bd. LXV. Poggend. Annal. Bd. CXLVIII.
[3]) *Bouchardat*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. IX.

von Biot[1]) zunächst Rohrzucker, Kampfer, Weinsäure und alle weinsauren Salze. Alle diese Substanzen sind krystallisiert optisch zweiaxig, und bei zweiaxigen Krystallen, in denen es keine Richtung gibt, in welcher nur eine einfache Brechung stattfindet, lassen sich die Erscheinungen der cirkularen Doppelbrechung nicht beobachten, sie werden eben von der gewöhnlichen Doppelbrechung verdeckt. Diejenigen der erwähnten Körper aber, welche man im amorphen Zustande fest darstellen kann, zeigen in diesem die Cirkularpolarisation. Giefst man eine mit ein wenig Essigsäure versetzte koncentrierte klare Auflösung von Rohrzucker von Syrupkonsistenz auf eine kalte Marmorplatte, so trocknet dieselbe zu durchsichtigen Platten ein; dieselben drehen die Polarisationsebene, und das Drehungsvermögen ist gleich dem des gelösten Rohrzuckers. Ebenso ist es Biot gelungen, die Drehung durch feste Weinsäure nachzuweisen; man erhält solche amorphe feste Weinsäure, indem man dieselbe unter gewissen Vorsichtsmafsregeln schmilzt und dann in flache Glasgefäfse ausgiefst, oder indem man die Weinsäure mit Borsäure zusammenschmilzt.

Vorzugsweise läfst sich aber die Drehung dieser Substanzen im gelösten Zustande beobachten, wie zuerst Biot und Seebeck[2]) und später Biot[3]) allein gezeigt haben. Von den genannten Substanzen drehen die Polarisationsebene:

Rechts Lösungen von Rohrzucker, Milchzucker, Traubenzucker (Dextrose) Dextrin, Laurineenkampfer, Borneokampfer, Glycolsäure, Cholalsäure, Chinidin, Cinchonin[4]).

Links Levulose, Inulin, Arabin, Amygdalin, Äpfelsäure, Menthakampfer, Cholesterin, Leimarten, Eiweifsstoffe, Chinin, Cinchonidin, Morphin, Strychnin, Brucin, Nicotin[5]).

Ein eigentümliches Verhalten zeigt nach den Beobachtungen von Pasteur[6]) die Traubensäure. Die gewöhnliche Traubensäure dreht die Polarisationsebene nicht; Pasteur gelang es diese in zwei Säuren zu spalten, die Rechtstraubensäure und die Linkstraubensäure; beide drehen sowohl für sich als in ihren Salzen die Polarisationsebene gleich stark, die eine aber zur Rechten, die andere zur Linken.

Aufser diesen Lösungen haben Biot und Seebeck die Cirkularpolarisation noch bei einer Anzahl Flüssigkeiten entdeckt; so ist rechtsdrehend Citronenöl, linksdrehend Lorbeeröl; Terpentinöl ist bald rechtsdrehend, bald linksdrehend.

Beim Terpentinöl haben Biot und Gernez[7]) auch die Drehung der Polarisationsebene in Dämpfen nachgewiesen, indem sie das Licht durch

[1]) *Biot*, Mémoires de l'Académie. T. XIII. Comptes Rendus. T. XV. T. XVI. T. XVIII. T. XIX. T. XXIX.

[2]) *Biot* und *Seebeck*. Biot, Traité de physique. T. IV. Paris 1818.

[3]) *Biot*, Annales de chim. et de phys. T. LII. Poggend. Annal. Bd. XXVIII. XXXII. XXXVIII. Mémoires de l'Académie. T. II. Paris 1819. T. XIII.

[4]) Man sehe u. A. *Bouchardat*, Annales de chim. et de phys. III. Ser. T. IX.

[5]) *Bouchardat*, a. a. O. und *Buignet*, Comptes Rendus. T. LII. p. 1084. Eine Aufzählung sämtlicher drehenden Substanzen gibt *Landolt*: Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. Braunschweig 1879.

[6]) *Pasteur*, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XXVIII. Poggend. Annal. Bd. LXXX.

[7]) *Gernez*, Annales de l'école normale supérieure. T. I. 1864.

mehrere Meter lange mit diesen Dämpfen gefüllte Röhren hindurchgehen liefsen, und ebenso hat Biot bei durch eine Kältemischung erstarrtem Terpentinöl Cirkularpolarisation beobachtet.

Die Einwirkung, welche diese ganze Gruppe von Körpern auf das Licht ausübt, mufs nach allem dem ihre Ursache in der molekularen Beschaffenheit und nicht in den Krystallisationsverhältnissen, wie beim Quarz und den übrigen die Polarisationsebene drehenden Krystallen, ihren Grund haben. Während beim Quarz es nur eine bestimmte Lagerung der Moleküle ist, welche die cirkulare Doppelbrechung bewirkt, zeigen diese Substanzen ganz besonders im flüssigen Zustande, in welchem von einer bestimmten Anordnung der Moleküle keine Rede sein kann, diese Art der Doppelbrechung; es mufs dieselbe demnach von den Molekülen als solchen, unabhängig von ihrer Lage, bewirkt werden.

Dem entspricht auch, dafs nach den Versuchen Biots die Drehung nicht nur wie bei dem Quarz der Länge der durchstrahlten Schicht, sondern dafs sie bei gleicher Länge der durchstrahlten Schicht dem Gehalte derselben an aktiver Substanz annähernd proportional ist. Biot nahm nach seinen ersten Versuchen über die Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen an, dafs die Drehung der Menge der gelösten Substanz genau proportional sei, ebenso nach seinen Versuchen mit Mischungen von Äther und Terpentinöl, dafs bei Mischungen aus aktiven und nicht aktiven Flüssigkeiten die Drehung der Menge der aktiven Flüssigkeit proportional sei[1]).

Dieser Auffassung entsprechend führte Biot den Begriff des molekularen Drehungsvermögens ein[2]). Lösen wir p Gramme einer aktiven Substanz in q Grammen eines Lösungsmittels, und ist δ die Dichtigkeit der Lösung, so ist $\frac{p+q}{\delta}$ das Volumen der Lösung und $\frac{p}{p+q}\,\delta$ die Menge der in der Volumeinheit der Lösung vorhandenen aktiven Substanz. Füllen wir mit einer solchen Lösung eine Röhre von der Länge l, so können wir den Drehungswinkel für irgend eine homogene Farbe, welche durch die Röhre hindurchstrahlt, schreiben

$$\varrho = [\varrho] \cdot \frac{p}{p+q}\,\delta l,$$

wenn wir mit $[\varrho]$ eine für die betreffende aktive Substanz charakteristische Konstante bezeichnen. Diese Konstante nennt Biot das molekulare Drehungsvermögen. Dieselbe bedeutet den Drehungswinkel in einer Schicht der reinen Substanz von der Länge eins dividiert durch die Dichtigkeit der betreffenden Substanz. Denn setzen wir $q = 0$ und $l = 1$, so wird

$$\varrho = [\varrho]\delta; \qquad [\varrho] = \frac{\varrho}{\delta}.$$

Das molekulare Drehungsvermögen kann man auch noch anders definieren; setzen wir $l = 1$ und $\frac{p}{p+q}\,\delta = 1$, so wird $\varrho = [\varrho]$, so dafs das molekulare Drehungsvermögen einer Substanz gleich dem Drehungswinkel in einer Schicht von der Länge eins ist, wenn die aktive Substanz in einem indifferenten Mittel so verteilt ist, dafs sich in einem Kubikcentimeter ein

1) *Biot*, Mémoires de l'Acad. T. II. Paris 1819.
2) *Biot*, Mémoires de l'Acad. T. II. T. XIII.

Gramm befindet. Als Längeneinheit nimmt Biot bei den Flüssigkeiten eine Schicht von ein Decimeter Länge.

Die Definition des molekularen Drehungsvermögens setzt strenge genommen voraus, dafs die Drehung der Menge der gelösten Substanz proportional sei, und dafs es gleichgültig sei, mit welcher indifferenten Substanz die aktive gemischt sei. Denn nur dann kann man diese Konstante als eine für die betreffende aktive Substanz charakteristische bezeichnen. Beides ist indes nicht der Fall. Schon Biot[1]) fand, dafs für Lösungen von Weinsäure in Wasser, von Kampfer in Alkohol und Essigsäure die Drehung nicht der Menge der in der Volumeinheit vorhandenen Substanz proportional ist. Bei Weinsäure nimmt die Drehung in einem langsamern Verhältnisse zu als der Gehalt der Lösung, ebenso bei der Apfelsäure, bei alkoholischen Kampferlösungen nimmt die Drehung rascher zu.

Ebenso zeigte Biot[2]) schon, dafs bei gleichem Gehalte der Lösung die Drehung verschieden ist je nach der Natur des Lösungsmittels; bei gleichem Gehalt der Lösung sind die Drehungen der Weinsäure andere je nachdem sie in Wasser oder Äthylalkohol oder Methylalkohol gelöst ist. Spätere Untersuchungen von Hesse, Oudemanns, Tollens, Schmitz, Landolt[3]) u. a. haben ergeben, dafs in keinem Falle die Drehung der Menge der gelösten Substanz proportional ist, und dafs die Drehung sich bei gleichem Gehalte stets mit dem Lösungsmittel ändert.

Obwohl demnach der Begriff des molekularen Drehungsvermögens als einer die aktive Substanz charakterisierenden Konstante eigentlich seine Bedeutung verloren hat, so hat man doch diesen Begriff festgehalten in der ihm oben gegebenen Definition, und spricht von einer Änderung des molekularen Drehungsvermögens je nach der Koncentration der Lösung und der Natur des Lösungsmittels. Nimmt mit Vermehrung des Lösungsmittels die Drehung rascher ab als der Gehalt der Lösung an aktiver Substanz, so bezeichnet man das als Abnahme des molekularen Drehungsvermögens oder, wie es Biot auch nannte, des specifischen Drehungsvermögens, nimmt dagegen mit Vermehrung des Lösungsmittels die Drehung langsamer ab als der Gehalt an aktiver Substanz, so bezeichnet man das als Zunahme des molekularen Drehungsvermögens.

Die Änderung des specifischen Drehungsvermögens mit der Menge und Natur des Lösungsmittels ist besonders von Landolt[4]) verfolgt worden, wesentlich um zu erkennen, ob die Änderung desselben kontinnierlich erfolgt, ob man also, indem man das Drehungsvermögen durch eine empirische Gleichung in seiner Abhängigkeit von der Menge des Lösungsmittels darstellt, imstande sei aus einer solchen Gleichung dasjenige der reinen Substanz abzuleiten. Landolt untersuchte zu dem Zwecke vorzugsweise Flüssigkeitsgemische, so dafs sich direkt das Drehungsvermögen der reinen Substanz beobachten liefs.

Die Versuche ergaben, dafs in der That die Änderung des specifischen Drehungsvermögens mit Zusatz des Lösungsmittels eine kontinuierliche ist.

---

[1]) *Biot*, Mémoires de l'Acad. de Paris. T. XV.
[2]) *Biot*, Mémoires de l'Acad. de Paris. T. XV.
[3]) Man sehe *Landolt*, das optische Drehungsvermögen etc. Braunschweig 1879.
[4]) *Landolt*, Liebigs Annalen Bd. CLXXXIX.

Es zeigte sich nämlich, dafs sich das molekulare Drehungsvermögen stets als Funktion des Gehaltes einer Lösung an aktiver Substanz darstellen liefs. Bezeichnet q die Gewichtsmenge Lösungsmittel in 100 Gewichtsteilen der Lösung, so genügte in der Regel eine Gleichung von der Form

$$[\varrho] = A + Bq + Cq^2$$

und wenn man hinreichend koncentrierte Lösungen zur Berechnung der Konstanten dieser Gleichung verwenden konnte, ergab sich die Konstante A als das Drehungsvermögen der reinen Substanz.

Landolt beobachtete mit den im nächsten Paragraphen zu besprechenden Mefsapparaten das Drehungsvermögen für das Natronlicht. So ergab sich z. B. für linksdrehendes Terpentinöl

$$[\varrho]_D = 37^0{,}010.$$

Für Mischungen des Terpentinöles fanden sich die Gleichungen

1. mit Alkohol

$$[\varrho]_D = 36^0{,}974 + 0{,}004\,816\,4\,q + 0{,}000\,133\,10\,q^2,$$

2. mit Benzol

$$[\varrho]_D = 36^0{,}970 + 0{,}021\,531\,q + 0{,}000\,066\,727\,q^2,$$

3. mit Essigsäure

$$[\varrho]_D = 36^0{,}894 + 0{,}024\,553\,q + 0{,}000\,136\,89\,q^2.$$

Selbst für solche Substanzen, welche in koncentrierter Lösung die Polarisationsebene in einem andern Sinne drehen als in verdünnter, zeigt sich ein solcher kontinuierlicher Übergang. So ergibt sich nach den Versuchen von G. Schneider[1]) für Apfelsäure

$$[\varrho]_D = 5^0{,}891 - 0{,}089\,59\,q,$$

worin die Rechtsdrehung als positiv bezeichnet ist. Für

$$q = \frac{5{,}891}{0{,}089\,6} = 65{,}7$$

tritt darnach gar keine Drehung ein, koncentriertere Lösungen sind rechtsdrehend, verdünntere linksdrehend.

Sehr klein ist nach den Versuchen von Tollens[2]) und Schmitz[3]) die Änderung des specifischen Rotationsvermögens in Lösungen von Rohrzucker, von denen man früher annahm, dafs das specifische Rotationsvermögen derselben ganz konstant sei. Nach Schmitz ist dasselbe

$$[\varrho]_D = 64{,}156 + 0{,}051\,596\,q - 0{,}000\,250\,52\,q^2.$$

Alle diese Zahlen beziehen sich auf eine Schichtdicke von 100^{mm}.

Viel stärker als die Änderungen des Drehungsvermögens bei Lösung einer aktiven Substanz in einem indifferenten Lösungsmittel sind diejenigen, welche eintreten, wenn eine aktive Substanz mit nicht aktiven eine chemische Verbindung eingeht. In der Regel aber behält die Verbindung das Ver-

[1]) *G. Schneider*, Liebigs Annalen. Bd. CCVII.
[2]) *Tollens*, Berichte der deutschen chem. Gesellschaft. 1877.
[3]) *Schmitz*, Berichte der deutschen chem. Gesellschaft. 1877.

mögen die Polarisationsebene zu drehen. So drehen die weinsauren und apfelsauren Salze. Die Änderungen des Drehungsvermögens, wenn aktive Substanzen solche Verbindungen eingehen, zeigen indes keine Gesetzmäfsigkeit.

Das Drehungsvermögen der Lösungen und Flüssigkeiten ändert sich mit der Wellenlänge des angewandten Lichtes und zwar für die meisten untersuchten Lösungen in demselben Sinne wie beim Quarz.

Wiedemann[1]) hat die Drehung in Citronenöl und Terpentinöl nach der Brochschen Methode bestimmt; er findet für die Drehung in einer 100^{mm} langen Schicht nach der Brochschen Methode die Werte

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
34,07;	37,9;	48,5;	63,3;	77,5;	106,0;

welche sich nach Stefan[2]) durch die Gleichung darstellen lassen

$$\varrho = \frac{2145{,}67}{\lambda^2} - 12{,}54.$$

Für nicht rektificiertes linksdrehendes Terpentinöl erhielt Wiedemann die Werte

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
21,5;	23,4;	29,3;	36,8;	42,6;	55,9,

welche der Gleichung entsprechen

$$\varrho = \frac{1039{,}2}{\lambda^2} - 0{,}64.$$

Ein in einem Strome von Wasserdampf rektificiertes Terpentinöl war rechtsdrehend, und zwar

C	*D*	*E*	*F*	*G*
10,9;	14,0;	18,6;	23,2;	32,7;

Werte, welche sich mit grofser Annäherung wiedergeben lassen durch

$$\varrho = \frac{650{,}8}{\lambda^2} - 4{,}4.$$

So verschieden auch die Dispersion durch diese Flüssigkeiten ist, so läfst sich dieselbe hiernach doch immer durch die Stefansche Gleichung darstellen.

Die Drehung von Rohrzuckerlösungen ist später von Arndtsen[3]) genauer untersucht worden; derselbe gibt für das von ihm als konstant betrachtete molekulare Drehungsvermögen folgende nach der Brochschen Methode gefundene Werte

	C	*D*	*E*	*b*	*F*	*e*
$[\varrho] =$	$53^0{,}41$;	$67^0{,}07$;	$85^0{,}406$;	$88^0{,}56$;	101,38,	$126^0{,}325$.

Diese Werte lassen sich sehr genau wiedergeben durch die Gleichung

$$[\varrho]_z = \frac{2538}{\lambda^2} - 5{,}58.$$

[1]) *G. Wiedemann*, Poggend. Annal. Bd. LXXXII.
[2]) *Stefan*, Wiener Berichte Bd. L (1864).
[3]) *Arndtsen*, Poggend. Annal. Bd. CV.

Wenn wir das Drehungsvermögen des Quarzes in derselben Weise ausdrücken, so wird

$$[\varrho]_q = 100\,\frac{\varrho}{\delta} = \frac{30766}{\lambda^2} - 66{,}1$$

und dividieren wir diesen Ausdruck durch 12,12, so wird

$$\frac{1}{12{,}12}\,[\varrho]_q = \frac{2538}{\lambda^2} - 5{,}45 = [\varrho]_z,$$

so dafs also die Dispersion durch die Drehung der Polarisationsebene beim Zucker dieselbe ist wie beim Quarz; das Drehungsvermögen für irgend eine Lichtart durch Zucker ist darnach $\frac{1}{12{,}12}$ des molekularen Drehungsvermögens des Quarzes für dieselbe Lichtart; oder man hat die Drehungswinkel beim Quarz für eine Dicke von 100^{mm} durch 32,155 zu dividieren, um die Drehungswinkel durch eine 100^{mm} dicke Schicht einer Zuckerlösung zu erhalten, welche in einem Kubikcentimeter ein Gramm Zucker enthält.

Einen etwas von dem so erhaltenen verschiedenen Wert für das Verhältnis zwischen den Drehungswinkeln des Quarzes und des Zuckers erhält man aus der Angabe Clergets[1]), dafs eine Schicht von 200^{mm} Länge einer Zuckerlösung, welche im Kubikcentimeter 0,164 71 Gramm Zucker enthält, die Polarisationsebene ebenso stark drehe, wie eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke. Diese Angabe Clergets ist später von einer aus Pouillet, Schlösing, Barresville und Duboscq zusammengesetzten Kommission[2]) in 0,163 5 korrigiert worden. Nach dieser letztern Zahl mufs man den Drehungswinkel in einer 100^{mm} dicken Quarzplatte durch 32,70 dividieren, um das molekulare Drehungsvermögen des Zuckers zu erhalten. Für die Fraunhofersche Linie *D* wird darnach $[\varrho] = 66^0{,}27$, also $0^0{,}8$ kleiner als nach Arndtsen.

Wegen dieser Verschiedenheit hat Wild[3]) das Drehungsvermögen des Zuckers nochmals mit dem im nächsten Paragraphen zu besprechenden Polaristrobometer bestimmt, er findet für $[\varrho]$ bei Anwendung der Natronflamme

$$[\varrho] = 66^0{,}417,$$

so dafs die Drehung im Quarz durch 32,627 zu dividieren wäre.

Nach den vorhin erwähnten Versuchen von Tollens und Schmitz wächst dagegen für das Natronlicht die specifische Rotation mit wachsender Verdünnung von 64,16 bis 66,81, so dafs der Divisor von 33,77 bis 32,43 abnähme.

Eigentümliche Dispersionsverhältnisse und zwar für verschieden koncentrierte Lösungen erheblich verschieden zeigen nach Arndtsen[4]) die Lösungen von Weinsäure in Wasser; das Drehungsvermögen nimmt nicht mit abnehmender Wellenlänge stetig zu, sondern wächst bis zu einem Maximum und nimmt dann wieder ab. Wenn die in einem Gewichtsteil Lösung vorhandene Menge des Lösungsmittels *e* ist, so kann man das Drehungsver-

1) *Clerget*, Annal. de chim. et de phys. III. Sér. T. XXVI.

2) Man sehe *Landolt* in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleifses in Preufsen 1867.

3) *Wild*, Über ein neues Polaristrobometer. Bern 1865.

4) *Arndtsen*, Poggend. Annal. Bd. CV.

mögen der verschiedenen Farben darstellen durch

$$[\varrho] = a + be,$$

und die Werte von a und b sind für

C . .	$a = + 2^0{,}748$	$b = + \;\; 9^0{,}446$
D	$1^0{,}950$	$+ 13{,}030$
E	$0{,}153$	$+ 17{,}514$
b	$- 0{,}832$	$+ 19{,}147$
F	$- 3{,}598$	$+ 23{,}977$
e	$- 9{,}657$	$+ 31{,}437$.

Wasserfreie Weinsäure dreht also die ersten drei Farben zur Rechten, die letzten drei zur Linken, was auch Biot bei den schon vorhin erwähnten Weinsäureplatten bestätigt fand. In der Lösung liegt, bis die Wassermenge etwa 0,6 beträgt, das Maximum der Drehung bei E und bei den stärker brechbaren Strahlen nimmt sie wieder ab; mit wachsender Wassermenge rückt das Maximum weiter gegen das violette Ende.

Das molekulare Drehungsvermögen nimmt im allgemeinen mit steigender Temperatur ab; nach den Versuchen von Gernez[1]) ist dasselbe bei der Temperatur t für die Linie D in

Pomeranzenöl $[\varrho] = 115^0{,}91 - 0{,}123\,7\,t - 0{,}000\,016\,t^2$

Bigaradenöl $[\varrho] = 118^0{,}55 - 0{,}117\,5\,t - 0{,}002\,160\,t^2$

Terpentinöl links $[\varrho] = 36^0{,}61 - 0{,}004\,437\,t$.

Das Dispersionsvermögen ist indes von der Temperatur unabhängig, so dafs das Verhältnis der Drehungen zweier Strahlen verschiedener Farben von der Temperatur unabhängig ist.

Gernez gelang es auch unter Anwendung von 4^m langen Röhren das Drehungsvermögen der Dämpfe obiger Flüssigkeiten zu messen; es ergab sich, dafs es demjenigen der Flüssigkeiten bei derselben Temperatur fast genau gleich war, für die beiden ersten Substanzen war es etwas kleiner.

Für Rohrzuckerlösungen ist nach Versuchen von Tuchschmid[2]) das Drehungsvermögen von der Temperatur unabhängig; wird aber der Rohrzucker durch Behandeln mit Mineralsäuren in Invertzucker verwandelt, welcher die Polarisationsebene stark links dreht, so ändert sich die Drehung mit der Temperatur sehr stark. Nach Tuchschmid ist das Drehungsvermögen desselben bei der Temperatur t

$$[\varrho] = 27{,}79 - 0{,}320\,6\,t.$$

Für Weinsäurelösungen wächst das Drehungsvermögen mit der Temperatur erheblich[3]).

§ 111.

Saccharimetrie. Für eine Anzahl von Lösungen, besonders für Rohrzucker und Traubenzucker ist das specifische Drehungsvermögen so nahe

---

1) *Gernez*, Annales de l'école normale. T. I. Paris 1864.

2) *Tuchschmid*, Inauguraldissertation. Zürich 1869. Über den Einflufs der Temperatur auf das molekulare Drehungsvermögen.

3) *Krecke*, Arch. Néerlandais. T. VII.

konstant oder die Drehung der Polarisationsebene in einer Schicht von gegebener Dicke so nahe dem Gehalt an aktiver Substanz proportional, dafs man aus der beobachteten Drehung den Gehalt der Lösung an aktiver Substanz ableiten kann[1]). Für solche Lösungen ist der Drehungswinkel nach dem vorigen Paragraphen

$$\varrho = [\varrho] \frac{p}{p+q} \delta l,$$

somit

$$\frac{p}{p+q} \delta = \frac{\varrho}{[\varrho] l},$$

und der Ausdruck auf der linken Seite bedeutet, wie wir sahen, die in einem Kubikcentimeter der Lösung vorhandene Gewichtsmenge der aktiven Substanz. Kennt oder bestimmt man aufserdem die Dichtigkeit der Lösung, so kann man auch sofort den Gehalt der Lösung in Gewichtsprocenten an aktiver Substanz, den Wert $\frac{p}{p+q}$ ableiten.

Von hoher praktischer Wichtigkeit ist diese Bestimmungsweise zur Untersuchung des Gehalts einer Lösung an Zucker geworden, für die Zuckerindustrie sind die optischen Saccharimeter die wichtigsten Mefsinstrumente. Nach Wild ist das specifische Rotationsvermögen des Zuckers gleich $66^0,417$; nach Tollens und Schmitz kommt dieser Wert etwa einer $25\,\%$ Lösung zu und er steigt bei Verdünnung der Lösung auf $5\,\%$ bis $66^0,609$.

Bringt man eine mit der zu untersuchenden Zuckerlösung gefüllte, an ihren Enden mit planparallelen Glasplatten geschlossene Röhre von hinreichender Länge zwischen die Nicols eines Polarisationsapparates, so gibt die obige Gleichung den Gehalt der Lösung an Zucker, wenn man den Drehungswinkel ϱ mifst und für $[\varrho]$ den entsprechenden Wert einsetzt. Man wendet am besten das homogene Licht der Natriumflamme an und stellt die Nicols zunächst so, dafs das Gesichtsfeld dunkel ist; ist dann die Röhre zwischen die Nicols gebracht, so hat man wieder den zweiten Nicol so weit zu drehen, bis das Gesichtsfeld wieder dunkel ist. Die Anzahl c Gramme Zucker im Kubikcentimeter der Lösung erhält man dann, wenn die Länge der Röhre in Millimeter gegeben ist, und man nur Lösungen anwendet, die nicht mehr als 25 Gewichtsprocente Zucker enthalten, mit einer bis auf $0,1\,\%$ reichenden Genauigkeit; wenn man $[\varrho] = 66,53$ setzt, aus der Gleichung

$$c = \frac{100}{[\varrho]} \frac{\varrho}{l} = 1,503\,1 \frac{\varrho}{l}.$$

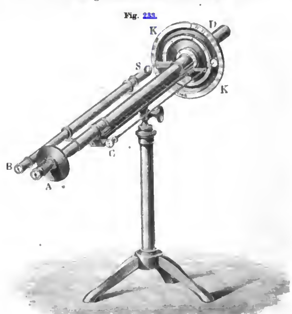
Nach Schmitz wurde der Faktor für eine $25\,\%$ Lösung 1,505 1, für eine $5\,\%$ Lösung 1,501 3. Da für $l = 100$ ersterer Lösung ein Wert $\varrho = 18,338$ entspricht, so liefert unser Wert $c = 0,275\,5$, der richtige $c = 0,275\,9$; da die zweite Lösung $\varrho = 3,388$ gibt, so wird mit unserer Konstanten $c = 0,050\,92$, mit der richtigen $c = 0,0508\,6$, selbst für eine $2\,\%$ Lösung, für welche $[\varrho] = 66,81$, würde, der Fehler nur $0,4\,\%$ betragen. Man hat es aber stets in der Hand Lösungen zwischen den angenommenen Grenzen zu wählen.

[1]) *Biot,* Comptes Rendus. T. XV. p. 523 ff. p. 619 ff.

Eine noch gröfsere Genauigkeit der Rechnung erhält man, wenn man den so erhaltenen Wert von c mit dem Quotienten $\frac{[\varrho]}{[\varrho]_c}$ multipliciert, wenn $[\varrho]_c$ das specifische Drehungsvermögen für die mit dem als konstant vorausgesetzten $[\varrho]$ berechnete Koncentration c bedeutet; denn bei der geringen Änderung des specifischen Rotationsvermögens kann man das Rotationsvermögen für die so bestimmte Koncentration als dasjenige, welches der Lösung zukommt, ohne merklichen Fehler einsetzen.

Das Mitscherlichsche Saccharimeter, das früher am meisten angewandte, besteht aus einem Stativ zur Aufnahme der Röhren, an dessen Enden die Nicols angebracht sind, von denen das Okularnicol mit einem Index versehen und in der Axe eines geteilten Kreises drehbar ist.

Fig. 233.



Diese einfache Form des Saccharimeters ist indes nicht imstande eine grofse Genauigkeit zu geben, da als Kennzeichen der erreichten Einstellung die gröfste Dunkelheit des Gesichtsfeldes dient, ein Punkt, den man durchaus nicht mit grofser Sicherheit erkennen kann.

Wild[1]) hat deshalb ein anderes Mittel benutzt, um den Moment der richtigen Einstellung zu erkennen, er verbindet mit dem Mitscherlichschen Saccharimeter ein Savartsches Polariskop. Die Einrichtung, welche Wild seinem Apparate, den er Polaristrobometer nannte, gab, zeigt Fig. 233. Auf einem Dreifufse ist ganz wie bei dem Doveschen Polarisationsapparate zunächst eine Schiene befestigt, welche an ihrem einen Ende einen ring-

---

[1]) *Wild*, Über ein neues Polaristrobometer. Bern 1865. Die Apparate werden von Hermann und Pfister in Bern in vorzüglicher Ausführung geliefert.

förmigen Aufsatz trägt, der mit einem Index versehen ist. In die kreisförmige Öffnung des Aufsatzes ist die den ersten Nicol enthaltende Hülse *D* eingepafst, so dafs sie mit sanfter Reibung sich in dem Ringe drehen kann. Auf die Hülse ist die Kreisscheibe *K* fest aufgesetzt, welche nahe dem Rande auf der dem Okularende *A* des Apparates zugewandten Seite eine Teilung trägt, auf welche der feste Index einsteht. Auf die Kreisscheibe ist ein gezahnter Ring fest aufgeschrauht, in dessen Zähne der durch den Kopf *C* zu drehende Trieb eingreift, so dafs man durch Drehung des Kopfes *C* den Nicol mit dem geteilten Kreise drehen und der Polarisationsebene des Nicols jede Lage gehen kann. Die Gröfse der Drehung wird an dem geteilten Kreise abgelesen, dessen Teilstriche an dem festen Index vorühergehen. Zur Ablesung dient das Ablesefernrohr *BS*, welches bei *S* zur Beleuchtung der Teilung mit einem schräg gestellten Spiegel versehen ist.

An dem andern Ende der auf dem Dreifufs hefestigten Schiene trägt ein zweiter ringförmiger Ansatz den Okularteil des Apparates; derselhe enthält von *A* angefangen zunächst ein Nicolsches Prisma, hinter demselhen zwei als einfaches Fernrohr wirkende Linsen und hinter der zweiten Linse das aus zwei Kalkspatplatten von 2^{mm} Dicke hestehende Savartsche Polariskop. Die Axenehenen der Kalkspatplatten sind gegen die Polarisationsebene des Okularnicols um 45^0 gedreht.

Wir sahen § 104 hei Besprechung des Savartschen Polariskops, dafs die in demselhen sichtharen Streifen verschwinden, wenn die Polarisationsebene des in dasselhe eintretenden Lichtes einer der Axenebenen parallel ist. Es gibt daher bei dem Wildschen Polaristrohometer vier Lagen des polarisierenden Nicols, welche die Streifen verschwinden lassen. Hat man den ersten Nicol so gestellt, dafs die Streifen nicht sichtbar sind, und bringt dann zwischen den ersten Nicol und die Savartsche Doppelplatte eine mit einer drehenden Flüssigkeit gefüllte Röhre oder einen festen drehenden Körper, so treten die Streifen wieder auf. Man hat dann den ersten Nicol so weit nach entgegengesetzter Seite zu drehen, als die Polarisationsebene in dem drehenden Körper nach der einen gedreht wird, damit die Polarisationsebene des in die Doppelplatte eindringenden Lichtes wieder der einen Axenebene der Doppelplatte parallel wird, und die Streifen wieder verschwinden. Der Winkel also, um welchen man den ersten Nicol hat drehen müssen, damit die Streifen wieder verschwinden, ist der Drehungswinkel in dem zwischen die Nicols gebrachten Körper. Dreht man den Nicol von dieser Stellung aus um 90^0, 180^0, 270^0, so verschwinden die Streifen ebenfalls, so dafs man durch Beobachtung in den vier Quadranten vier sich kontrolierende Werte von ϱ erhält.

Betreffs des Wertes von ϱ ist nur in soweit eine Unsicherheit, oh derselbe gleich der gemessenen Drehung oder gleich dieser vermehrt um irgend eine Anzahl rechter Winkel ist, und deshalb auch oh die Drehung in dem Körper zur Rechten oder zur Linken erfolgt ist. Man heht diese Unsicherheit am hequemsten, indem man mit zwei Röhren verschiedener Länge beobachtet, etwa von 100^{mm} und 200^{mm}.

Der grofse Vorzug des Wildschen Apparates ist die hei sorgfältiger Beohachtung mit demselhen erreichbare Genauigkeit. Man stellt zunächst das im Okularteile des Apparates hefindliche Fernrohr so, dafs man die Streifen scharf sieht; das Fernrohr ist mit einem Andreaskreuz-förmigen Fadenkreuz versehen, und man stellt dann die Doppelplatte so ein, dafs, wie

wir Figur 209 darstellten, die Streifen horizontal sind und den stumpfen Winkel der Kreuzesarme halbieren. Der Einstellungsfehler beträgt weniger als $0^0,1$, ein Fehler, der in der Bestimmung des Zuckergehaltes einer Lösung bei Benutzung einer 200^{mm} langen Röhre nur $0,07\,\%$ entspricht; ja ist der Index an dem Apparate mit einem Nonius versehen, so kann man bei Anwendung von Natriumlicht die Genauigkeit bis auf $\pm 0^0,03$ annehmen. Bei dieser Genauigkeit der Beobachtung mufs man, um das Resultat der Zuckerbestimmung entsprechend genau zu machen, die vorhin erwähnte Korrektion wegen der Veränderlichkeit der specifischen Drehung des Zuckers in Rechnung ziehen.

Betreffs der Erscheinungen in dem Wildschen Polaristrobometer müssen wir noch auf einen Umstand aufmerksam machen. Sind die beiden Platten des Savartschen Polariskops nicht genau senkrecht zu einander gestellt, so ist bei Anwendung weifsen Lichtes die Erscheinung ganz dieselbe, die wir bisher angenommen haben. Bei Anwendung homogenen Lichtes dagegen treten, wenn das bisher besprochene Streifensystem verschwindet, schwache Streifen auf, welche gegen die vorher sichtbaren Streifen unter einem Winkel von 45^0 geneigt sind. Es sind das die Streifen, welche dem zweiten Gliede des Ausdrucks, den wir § 104 entwickelten, also der Gleichung

$$R^2 = \cos^2\psi + \sin 2(\psi - \beta)\cos 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha)\sin^2\frac{\delta'_e - \delta'_o}{2}$$

entsprechen, da wenn $\alpha = 0$ oder 90^0 wird, dieser Ausdruck nicht gleich null wird. Im weifsen Licht gibt auch dieses Glied nur das Weifs höherer Ordnung und liefert deshalb keine sichtbaren Kurven, im homogenen Licht bleiben die Kurven sichtbar, wenn $\cos 2\alpha$ seinen gröfsten Wert ± 1 hat. Da man immer $\beta - \alpha$ so nahe wie möglich gleich 90^0 macht, ist dieses Kurvensystem immer so schwach, dafs es die Beobachtung nicht stört.

Ein anderes Mittel, um den Drehungswinkel mit grofser Schärfe beobachten zu können, ist in den Halbschattenapparaten verwandt, wie sie zuerst von Jellet[1]) und dann in etwas anderer Weise von Cornu[2]) und Laurent[3]) konstruiert sind. In den Halbschattenapparaten wird das Licht zwischen dem ersten Nicol und der drehenden Flüssigkeit durch eine Vorrichtung geführt, welche das Gesichtsfeld in zwei in einer scharfen Linie zusammenstofsende Hälften teilt, und in diesen beiden Hälften die Polarisationsebene des durchtretenden Lichtes etwas gegen einander dreht. In vier Lagen des Okularnicols sind dann die beiden Hälften des Gesichtsfeldes gleich hell, in denen die Polarisationsebene des zweiten Nicols den spitzen oder den stumpfen Winkel zwischen den Polarisationsebenen der beiden Hälften des Gesichtsfeldes halbiert. Von diesen Lagen wird zur Beobachtung jene gewählt, in welcher die Polarisationsebene des zweiten Nicols den stumpfen Winkel halbiert, in welcher das Gesichtsfeld nur sehr wenig beleuchtet ist, die geringste Drehung aus dieser Lage läfst die eine Hälfte vollständig verdunkelt, die andere heller werden. Wegen dieses Wechsels in der Helligkeit der beiden Hälften ist der Punkt der Gleichheit sehr scharf einzustellen.

[1]) *Jellet*, Reports of the British Association 1860.
[2]) *Cornu*, Bulletin de la societé chimique. II. Série. T. XIV.
[3]) *Laurent*, Dingler Polytechnisches Journal. Bd. 223.

Am einfachsten wird dieser Zweck erreicht in dem Apparate von Laurent. In demselben ist zwischen den ersten Nicol und die Flüssigkeitsröhre ein dünnes Glasplättchen gelegt, dessen eine Hälfte mit einem Quarzplättchen belegt ist, welches parallel der Axe geschnitten ist, und eine solche Dicke hat, dafs der ordentliche und aufserordentliche Strahl in demselben für das Licht der Natriumflamme die Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge erhalten. Das Blättchen ist ferner so geschliffen, dafs die Axe parallel der Kante ist, welche das kreisförmige Gesichtsfeld gerade halbiert.

Am Okularteil des Apparates ist ein Galileisches Fernrohr angebracht, welches scharf auf die das Gesichtsfeld halbierende Kante eingestellt ist.

Der erste Nicol ist so gestellt, dafs die Polarisationsebene des eintretenden Lichtes mit der Axe des Quarzplättchens den sehr kleinen Winkel α einschliefst; bildet dann, wenn der Apparat keine drehende Substanz enthält, die Polarisationsebene des Okularnicols mit der des eintretenden Lichtes den Winkel ψ, so ist die Intensität des durch die unbelegte Hälfte des Gesichtsfeldes hindurchdringenden Lichtes

$$R_1 = \cos^2 \psi,$$

wenn die Intensität des eintretenden Lichtes gleich eins gesetzt ist. Die Intensität des durch die belegte Hälfte dringenden Lichtes ist nach § 103 p. 643

$$R_2 = \cos^2 \psi - \sin 2\alpha \,.\, \sin 2\,(\alpha - \psi) \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda},$$

somit wenn

$$d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\lambda$$

$$R_2 = \cos^2 \psi - \sin 2\alpha \sin 2\,(\alpha - \psi).$$

Demnach ist

$$R_2 = R_1,$$

wenn

$$\sin 2\alpha \,.\, \sin 2\,(\alpha - \psi) = 0$$

und das ist, da α von null verschieden ist, der Fall, wenn

$$\sin 2\,(\alpha - \psi) = 0 \qquad 2\,(\alpha - \psi) = n\pi$$

$$\psi = \alpha - n\frac{\pi}{2}.$$

Für $n = 0$ und $n = 2$ sind beide Hälften nahe dem Maximum der Helligkeit, deshalb sind diese Lagen zur scharfen Beobachtung nicht geeignet, für $n = 1$ und $n = 3$, also

$$\psi = \alpha - \frac{\pi}{2} \text{ und } \psi = \alpha - 3\frac{\pi}{2} \text{ oder was dasselbe ist } \alpha + \frac{\pi}{2}$$

sind die beiden Hälften nahezu dunkel; diese Lagen sind daher die zu scharfen Einstellungen geeigneten.

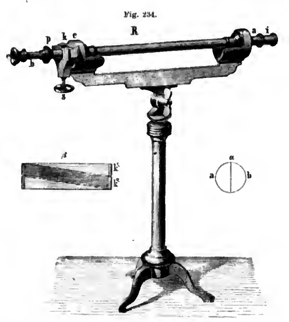
Wird zwischen die mit dem Quarzblättchen versehene Glasplatte und den Okularnicol eine drehende Substanz gebracht, so wird die Polarisationsebene beider Hälften des Gesichtsfeldes um einen Winkel β in dem gleichen Sinne gedreht, das Okularnicol mufs also um denselben Winkel β in demselben Sinne gedreht werden, damit die beiden Hälften des Gesichts-

feldes wieder gleiche Helligkeit haben. Bei den Halbschattenapparaten ist deshalb, wie bei dem Mitscherlichschen Saccharimeter, das Okularnicol drehbar.

Die mit den Halbschattenapparaten erreichbare Genauigkeit ist nach Landolt[1]) der mit dem Wildschen Apparate erreichbaren Genauigkeit ungefähr gleich.

Die bisher erwähnten Apparate sind zu Untersuchungen der Drehung der Polarisationsebene in allen drehenden Substanzen gleich gut geeignet. Einen Apparat, der speciell für die Untersuchung der Zuckerlösungen bestimmt ist, hat schon früher Soleil konstruiert; in demselben wird die Drehung der Zuckerlösung mit derjenigen in einer Quarzplatte von bekannter Dicke verglichen. Die Einrichtung des Apparates zeigt Fig. 234; sie beruht

Fig. 234.



auf der Gleichheit der Dispersion im Quarz und Zucker und auf dem im vorigen Paragraphen erwähnten Satze von Biot, dafs die Drehung der Polarisationsebene, wenn das Licht durch eine Anzahl von drehenden Körpern hindurchgeht, gleich ist der Summe der Drehungen, welche das Licht in jedem einzelnen Körper erfährt, wenn alle die Polarisationsebene in dem gleichen Sinne drehen, und gleich der Differenz der Drehungen, wenn das Licht in einigen nach rechts, in andern nach links gedreht wird. In der Röhre a befindet sich ein achromatisches Prisma von Doppelspat, in welchem das bei i eintretende Licht polarisiert wird; der ungewöhnliche Strahl pflanzt sich in der Axe des Instruments fort, während der gewöhnliche abgelenkt und

[1]) *Landolt,* Das optische Drehungsvermögen. Braunschweig 1879.

von der schwarzen Innenwand der Röhre verschluckt wird. In der Okularröhre *b* des Instrumentes bei *p* findet sich ebenfalls ein Doppelspatprisma, dessen Hauptschnitt senkrecht ist zum Hauptschnitte des polarisierenden Prisma; der ungewöhnliche Strahl des ersten würde also in diesem nur die gewöhnliche Brechung erleiden, oder da auch hier der gewöhnliche Strahl fortgenommen wird, so würde das Gesichtsfeld, wenn zwischen den beiden Prismen sich sonst nichts befände, ganz dunkel erscheinen.

Nun aber tritt das Licht zuerst in eine Doppelplatte von Quarz, das heifst in eine Quarzplatte von $7^{mm},50$ Dicke, welche Fig. 234 *α* besonders gezeichnet ist, deren rechte Hälfte *b* aus einem rechtsdrehenden, deren linke Hälfte *a* aus einem linksdrehenden Quarze geschnitten ist. Die beiden Stücke sind in einem vertikalen Durchmesser zusammengekittet, und dann gemeinsam geschliffen, so dafs ihre Dicke genau $7^{mm},50$ ist. Beide Hälften der Platten sind bei parallelen oder gekreuzten Polarisationsebenen gleich gefärbt, und zwar bei gekreuzten Polarisationsebenen mit der sogenannten empfindlichen Farbe, einem rötlichen Violett; denn in der rechten Hälfte sind genau dieselben Farben nach rechts um 90° gedreht, wie in der andern Hälfte nach links, sie müssen also bei gekreuzten Polarisationsebenen gleichgefärbt erscheinen. Dafs diese Färbung die angegebene sein mufs, ergibt eine Berechnung der Drehungen nach den Biotschen Zahlen. Die Farbe wird die empfindliche genannt, weil die geringste Drehung der Polarisationsebenen die beiden Hälften merklich verschieden färbt. Dreht man die zweite Polarisationsebene nur ein wenig nach rechts, so wird die rechte Hälfte sofort rot, die linke blau gefärbt; auch dieses ergeben die Biotschen Zahlen unmittelbar, sie zeigen, dafs eine Drehung der Polarisationsebene zur Rechten die rechte Hälfte der Platte dem Maximum des Rot ebensoviel nähert, als es die linke davon entfernt; in der rechten Hälfte herrscht daher das Rot, in der linken das Blau vor.

Anstatt der Quarzplatte von $7^{mm},50$ Dicke kann auch eine solche von $3^{mm},75$ genommen werden, jedoch mufs dann die Polarisationsebene des analysierenden Kalkspates derjenigen des polarisierenden parallel gestellt werden. Die Platte der doppelten Dicke ist indes wohl etwas empfindlicher.

Aus der Doppelplatte tritt das Licht in die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllte Röhre *R* (Fig. 234). Das geringste Drehungsvermögen der Flüssigkeit gibt sich dann dem bei *e* in den Apparat blickenden Auge in einer verschiedenen Färbung der beiden Hälften der Doppelplatte zu erkennen, indem eine Drehung der Polarisationsebene in dieser Flüssigkeit ganz denselben Effekt hat als eine Drehung des zweiten Prismas.

Um die Gröfse der Drehung zu messen und so aus dieser den Zuckergehalt der angewandten Flüssigkeit zu bestimmen, wird die Drehung der Flüssigkeit mit jener einer Quarzplatte von verschiedener aber bekannter Dicke verglichen. Zu dem Ende tritt das Licht, nachdem es die Röhre *R* verlassen hat, zunächst in eine rechtsdrehende Bergkrystallplatte bei *c* und aus dieser in zwei keilförmige Platten eines linksdrehenden Quarzes, welche, wie in Fig. 234 *β*, zusammengestellt sind, so dafs sie eine planparallele Platte von linksdrehendem Krystall bilden. In der Stellung Fig. 234 *β* ist diese Platte genau von derselben Dicke als die rechtsdrehende Platte *c*, so dafs also die Wirkung beider Platten sich ganz aufhebt. Die Keile *k'* und *k''* sind, wie es die Figur zeigt, mit Glasprismen zu planparallelen Platten

zusammengekittet und in Messingrähmchen gefafst, welche unten gezähnt sind. In die Zähne pafst ein Trieb, welcher an dem Knopfe *s* befestigt ist, so dafs eine Drehung dieses Knopfes die beiden Keile in einer zur Axe des Instrumentes senkrechten Richtung, den einen nach rechts, den andern nach links hin verschieht. Die Dicke der aus den beiden Teilen zusammengesetzten planparallelen Platte wird dadurch in genau hestimmbarer Weise geändert. Dreht man den Knopf *s* von oben gesehen wie den Zeiger einer Uhr, so geht k' nach rechts, k'' nach links, die Dicke wird vergröfsert, dreht man entgegengesetzt, so wird die Dicke kleiner. Die Veränderung der Dicke wird durch einen kleinen in der Hauptfigur bei *k* angedeuteten auf dem Keile k' befestigten Mafsstab, auf welchen eine auf dem Rahmen des Keiles k'' befestigte Marke einsteht, beobachtet. Steht die Marke auf 0, so sind die Keile in der mittlern Stellung, in welcher die Summe ihrer Dicken gleich ist der Dicke der Platte *c*, steht sie auf 100, so ist die Dicke der linksdrehenden Keile 1^{mm} gröfser als die der rechtsdrehenden Platte.

Das Verfahren, um mittels dieses Apparates den Zuckergehalt einer Lösung zu bestimmen, ergibt sich aus der Beschreibung des Apparates unmittelbar. Damit die Doppelplatte gleich gefärbt sei, mufs die algebraische Summe aller Drehungen der Polarisationsebene des Lichtes, nachdem es die Doppelplatte verlassen hat, gleich 0 sein. Ist in der Röhre *R* keine oder eine nicht drehende Flüssigkeit, so ist das der Fall, wenn die Marke an der Teilung auf 0 steht, da dann die Drehung der Polarisationsebene nach rechts hin in der Platte *c* durch die genau ebenso grofse Drehung in den beiden Keilen aufgehoben wird. Ist aber in der Röhre *R* eine rechtsdrehende Zuckerlösung enthalten, so mufs die Dicke der linksdrehenden Platte vergröfsert werden, und zwar um so viel, dafs in ihr die Polarisationsebene so viel nach links gedreht wird, wie in der Flüssigkeit der Röhre *R* und in der Platte *c* dieselbe nach rechts gedreht wird. Die Drehung der Flüssigkeit wird also durch eine Verschiebung der Keile kompensiert; diese Verschiebung ist daher das Mafs des Drehungsvermögens der Flüssigkeit.

Die empfindliche Farbe der Doppelplatte erscheint natürlich nur, wenn die in der Röhre enthaltene Flüssigkeit nicht gefärbt ist. Um jedoch auch bei gefärbten Flüssigkeiten die empfindliche Farbe zu erhalten, läfst Soleil das Licht, nachdem es durch das zweite Kalkspatprisma gegangen, noch durch eine Bergkrystallplatte und einen Nicol gehen, dessen Polarisationsebene gedreht werden kann. Dadurch kann die Farbe der Doppelplatte geändert werden, ohne dafs die Färbung der beiden Hälften eine verschiedene wird, da das aus dem zweiten Kalkspatprisma hervortretende Licht auf ein und dieselbe Polarisationsebene zurückgeführt ist. Es ist indes leicht ersichtlich, dafs die Flüssigkeit nur sehr wenig gefärbt sein darf, da sonst die Absorption des Lichtes in ihr so bedeutend ist, dafs keine Beobachtung mehr möglich ist.

Das Soleilsche Saccharimeter ist hauptsächlich dazu bestimmt, den Rohrzuckergehalt in Rohzucker zu bestimmen; man löst zu dem Zwecke $16^{gr},35$ der zu untersuchenden Substanz und bringt die Lösung auf genau 100 Kubikcentimeter, so dafs jedes Kubikcentimeter 0,163 5 der Substanz enthält und füllt mit dieser Lösung eine der dem Apparate beigegebenen Röhren von 200^{mm} Länge. Enthält die Substanz aufser dem Rohrzucker keinen andern aktiven Körper, so liest man auf der Skala direkt die Menge

des in 100^{gr} enthaltenen Rohrzuckers ab. Denn da $16^{gr},35$ Rohrzucker zu 100 Kubikcentimeter gelöst in einer Schicht von 200^{mm} die Polarisationsebene so stark drehen, wie eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke, so mufs man die Keile bis zu dem Punkte 100 verschieben, wenn die Substanz reiner Rohrzucker ist. Ist aber nur 0,75, 0,5 ... der gelösten Menge Rohrzucker, so hat man zur Kompensation der Drehung in der Flüssigkeit nur 0,75, 0,5 .. mm. Quarz nötig; da diese Stellen mit 75, 50 ... bezeichnet sind, so gehen diese Zahlen die Anzahl Gramme Rohrzucker in 100^{gr} der angewandten Substanz.

In den meisten Fällen ist aber in den Rohzuckern aufser dem Rohrzucker noch Invertzucker vorhanden, welcher die Polarisationsebene zur Linken dreht. Bezeichnen wir das molekulare Drehungsvermögen des Invertzuckers mit $[\varrho']$, so wird für ein Gemenge $p + p'$ Rohrzucker und Invertzucker, welche zu 100^{cc} gelöst sind,

$$\varrho = [\varrho] \cdot \frac{p}{100} \cdot l - [\varrho'] \frac{p'}{100} \cdot l.$$

Um nun die Menge p zu bestimmen, verwandelt man durch Behandlung mit verdünnter Salzsäure und Erwärmen auf etwa 70^0 den Rohrzucker in Invertzucker, und beobachtet nach eingetretener Abkühlung neuerdings die Drehung, indem man jetzt eine in dem Mafse längere Röhre nimmt, als die Flüssigkeit durch den Zusatz an Salzsäure verdünnter geworden ist. Bei den Soleilschen Apparaten ist zu dem Zwecke eine Röhre von 220^{mm} beigegeben; man setzt deshalb zur Inversion bei Anwendung solcher Röhren zu 100^{cc} Lösung, welche 16,35 Substanz gelöst enthalten, 10^{cc} rauchende Salzsäure. Da dann auch die p Gramme Rohrzucker in Invertzucker verwandelt sind, so dreht jetzt die Flüssigkeit zur Linken um ϱ_1 und wir erhalten

$$-\varrho_1 = -\left\{[\varrho'] \cdot \frac{p}{100}\, l + [\varrho'] \frac{p'}{100}\, l\right\}$$

und aus beiden Gleichungen

$$p = \frac{\varrho + \varrho_1}{([\varrho] + [\varrho'])\, l} \cdot 100.$$

Da $[\varrho']$ nach den im vorigen Paragraphen mitgeteilten Beobachtungen Tuchschmids mit der Temperatur sich rasch ändert, so ist bei der Beobachtung der invertierten Lösung die Temperatur derselben genau zu bestimmen, und die beobachtete Drehung mit der Tuchschmidschen Interpolationsformel auf jene Temperatur zu reducieren, bei der man die erste Beobachtung gemacht hat.

Für das nach Graden eingeteilte Soleilsche Saccharimeter wird die Rechnung folgende. Die dort benutzten 16,35 Gramm fester Substanz geben, wenn sie reiner Rohrzucker wären, invertiert 17,21 Gramm Invertzucker. Diese lenken bei 0^0 die Polarisationsebene, wie sich aus der angegebenen Drehungskonstante ergibt, so stark ab, wie eine linksdrehende Quarzplatte von $0{,}441\,6^{mm}$ Dicke, bei t^0 wie eine linksdrehende Quarzplatte von $0{,}441\,6 - 0{,}005\,058\,t$. Würde demnach eine reine Rohrzuckerlösung invertiert, auf 100^{cc} gebracht, und in der Röhre von 220^{mm} Länge untersucht, so würde das Saccharimeter $44{,}16 - 0{,}505\,8\,t$ Grade an der Skala zur Linken gedreht werden müssen. Sind in den gelösten 16,35 Gramm

Substanz p Gramm Rohrzucker und p' Gramm Invertzucker, so ist demnach die Zahl der abgelesenen Grade

$$G = \frac{p}{16,35} \cdot 100 - \frac{p'}{17,21} (44,16 - 0,505\,8\,t).$$

Nach der Inversion ist jeder Gramm Rohrzucker $\frac{17,21}{16,35}$ Gramm Invertzucker geworden, deshalb

$$-G_1 = -\left\{\frac{p\,\frac{17,21}{16,35}}{17,21} + \frac{p'}{17,21}\right\} (44,16 - 0,505\,8\,t),$$

woraus durch

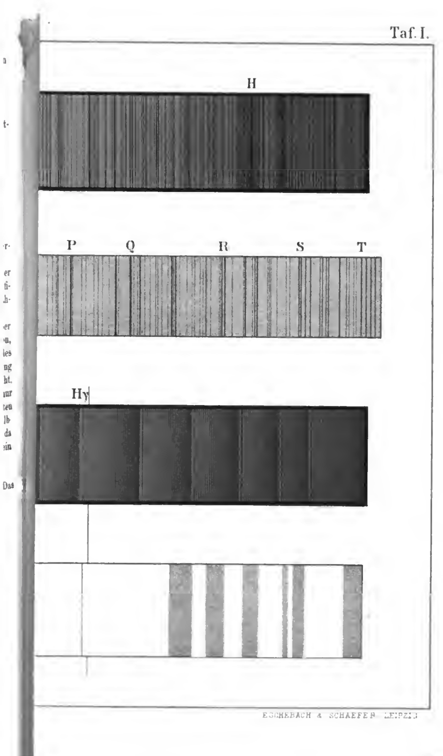
$$100\,\frac{p}{16,35} = \frac{100\,(G + G_1)}{144,16 - 0,505\,8\,t}$$

sich der Gehalt der angewandten Substanz an Rohrzucker in Procenten ergibt. Ebenso kann auch die Menge des Invertzuckers berechnet werden.

Dafs man zur Erreichung gröfserer Genauigkeit auch hier in der vorher angegebenen Weise die Korrektion wegen der Veränderlichkeit des specifischen Drehungsvermögens anbringen mufs, bedarf wohl kaum der Erwähnung[1]).

Die Benutzung des Soleilschen Apparates zu andern Versuchen über die Drehung der Polarisationsebene beschränkt sich auf solche Substanzen, welche die gleiche Dispersion wie der Quarz haben, da die Anwendung des Apparates oder vielmehr seine Genauigkeit wesentlich auf der Herstellung der empfindlichen Farbe, also der Anwendung des weifsen Lichtes beruht. Bei Benutzung homogenen Lichtes sind die Hälften der Doppelplatte nur verschieden hell und die Kompensation ist erreicht, wenn die beiden Hälften gleiche Helligkeit haben. Der Apparat gehört dann in die Klasse der Halbschattenapparate ohne die gleiche Empfindlichkeit wie diese zu haben, da der Wechsel der Helligkeit der beiden Hälften des Gesichtsfeldes nicht ein so scharfer ist.

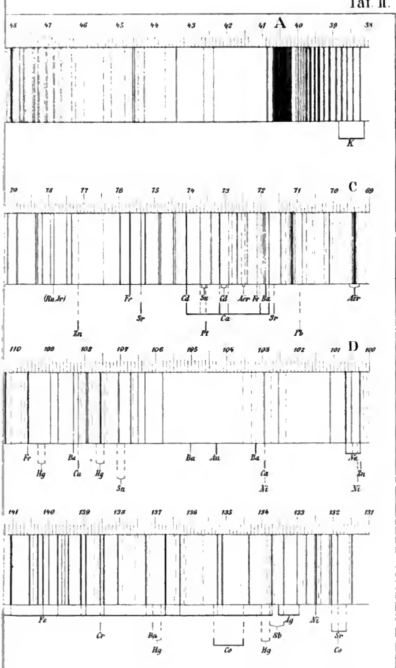
[1]) Genaueres über die optische Saccharimetrie sehe man *Landolt*, Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. Braunschweig 1879.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG



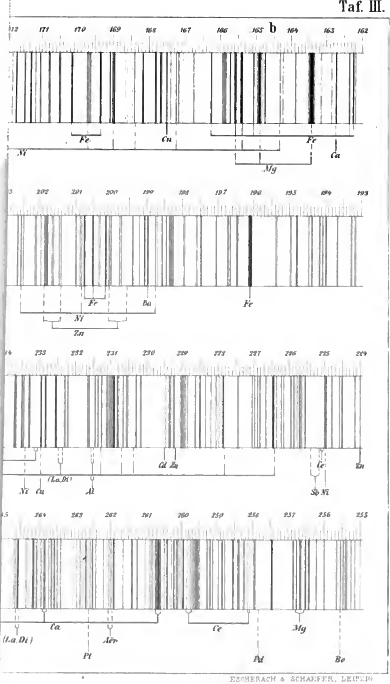
Taf. II.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG



Taf. III.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06693 7189





